Math

406

– 2, 1 –

STADTBIBLIOTHEK
AUGSBURG

Lehrbegriff der gesamten Mathematik.

Aufgesetzt von

Wencesl. Joh. Gustav Karsten,

der Phil. Doctor, Hofrath und Professor der Mathematik und Naturlehre auf der Universität in Halle, der Churf. Bayerschen Academie d. Wissensch. in München, der Holländischen Gesellschaft der Wissensch. in Harlem, und der Königl. Dänischen Gesellschaft in Copenhagen, auch der ökonomischen Gesellschaft in Leipzig und der naturforschenden Gesellschaft in Halle Mitgliede.

Des zweyten Theils erste Abtheilung.

Weitere Ausführung der Rechenkunst. Die Algebra mit den vornehmsten Anwendungen auf Zahlenrechnungen. Die ebene und phärische Trigonometrie, nebst weiterer Ausführ. der Geometrie.

Zweyte Auflage.

Greifswald, gedruckt u. verlegt von Ant. Ferdin. Röse. 1786

STADTBIBLIOTHEK
AUGSBURG

Dem

Durchlauchtigsten Fürsten und Herrn,

Herrn Ludewig,

Herzoge zu Mecklenburg,
Fürsten zu Wenden, Schwerin und Ratzeburg, auch Grafen zu Schwerin, der Lande Rostock und Stargard Herrn.

Meinem Gnädigsten Fürsten und Herrn.

wo Fürsten die Bemühungen der Gelehrten, unter ihren Mitbürgern nützliche Kenntnisse zu verbreiten mit einem huldvollen Beyfall begnadigen, und durch preiswürdige Unterstützungen befördern. Wo Fürsten die Wissenschaften schätzen, da reizt dies hohe Beyspiel die Unterthanen zur Nachfolge, und ein jeder schämt sich dessen, unwissend zu bleiben. Mecklenburg ist hievon ein vorzügliches Beyspiel. Wie einleuchtend ist nicht der ganzen Welt der Beweis, welchen des Regierenden Herrn Herzogs Durchlauchten durch Stiftung nicht allein der hiesigen hohen Schule, sondern auch des Paedagogii hieselbst, von derjenigen Huld abgeleget haben, welche Höchstdieselben den Wissenschaften gönnen.

Ew. Hochfürstl. Durchlauchten beehren die Wissenschaften mit nicht geringerer Huld, und Höchstdieselben haben der hiesigen hohen Schule davon zu mehrern mahlen sehr gnädige Beweise gegeben. Auch mir insbesondre haben Ew.

Hoch=

Hochfürstlichen Durchlauchten zu wiederholten mahlen die gnädigsten Versicherungen von dem huldreichsten Beyfall zu ertheilen geruhet, womit Höchstdieselben meine Bemühungen begnadigen, die ich nach meinem geringen Antheil zur Ausbreitung nützlicher Kenntnisse anzuwenden suche; und ich glaube, dies sey Rechtfertigung genug für mich, wenn ich als ein treuer Diener und Unterthan des Durchlauchtigsten Mecklenburgischen Hauses mich erkühne, Ew. Hochfürstlichen Durchlauchten den zweyten Theil dieses Buchs als eine Frucht meiner hiesigen Akademischen Arbeiten in tiefster Unterthänigkeit zu widmen. Es war meine Pflicht, Ew. Hochfürstlichen Durchlauchten wegen der mir so oft huldreichst versicherten vorzüglichen Gnade meine unterthänigste Dankbarkeit öffentlich zu bezeugen. Und wenn ich dieser Schuldigkeit durch die unterthänigste Ueberreichung dieses Buchs einigermassen ein Genüge zu leisten suche, so kann

ich um so mehr eine gnädigste Aufnahme hoffen, als Ew. Hochfürstlichen Durchlauchten mich auf eine ungemein huldreiche Art zur Fortsetzung dieser Arbeit aufzumuntern geruhet haben.

Unter den treuesten Wünschen für das beständige höchste Wohlergehen des ganzen Durchlauchtigsten Hauses Mecklenburg beharre ich in tiefster Ehrerbietung

Durchlauchtigster Herzog,
Gnädigster Fürst und Herr,
Ew. Hochfürstl. Durchl.

unterthänigster
W. J. G. Karsten.

Vorrede.

Wenn es gleich seine unstreitige Richtigkeit hat, daß man einen desto grössern praktischen Nutzen von der Erlernung der Mathematik erwarten könne, je mehr gründliche Theorie man sich bekannt macht; so ist doch auf der andern Seite so viel gewiß, daß nicht allen, welche die Mathematik auch um des praktischen Nutzens willen treiben, zugemuthet werden könne, gleich viele Theorie zu lernen, und am allerwenigsten dieses, daß sie sich die ganze Theorie in ihrem völligen Umfange bekannt machen, bevor sie zur Anwendung schreiten. Selbst derjenige Theil der theoretischen Mathematik, welchen man als die Anfangsgründe betrachtet, und durch den Nahmen der **Elementar-Mathematik** von der höhern Mathematik unterscheidet, ist schon von einem so weitläuftigen Umfange, daß die vollständi-

ge Erlernung desselben nicht eines jeden Sache ist. Wenigstens gehet es nicht wohl an, diese grosse Menge von Sachen in einem halbjährigen Collegio, so wie es auf Universitäten gewöhnlich ist, mit derjenigen Vollständigkeit vorzutragen, daß die Zuhörer dieselben sich insgesammt so geläufig machen können, als zu fertiger Anwendung derselben erfordert wird. Diese Betrachtungen haben mich bewogen, die gewöhnlich so genannte **Mathesin puram** in zweenen besondern Theilen abzuhandeln, und den mündlichen Vorlesungen über jeden Theil ein besondres halbes Jahr zu bestimmen. Ich unterscheide diejenigen Zuhörer, welche nur wenig Mathematik treiben wollen und können, von andern, die mehr Zeit und Fleiß darauf zu verwenden geneigt sind. Jene können zufrieden seyn, wenn sie so viele Theorie wissen, als der erste Theil vorträgt. Sie werden dadurch ziemlich hinlänglich zur Erlernung der Geodätischen und Architektonischen Wissenschaften vorbereitet seyn; (und diese sind eben diejenigen Theile der praktischen Mathematik, zu deren Erlernung die meisten noch Lust bezeugen) ja sie werden auch Theorie genug wissen, eine Encyclopedie der gesammten praktischen Mathematik, so wie sie in dem Wolfischen Auszuge, und andern ähnlichen Lehrbüchern vorgetragen ist durchzugehen, oder auch statt dessen die Vorlesungen über die dogmotische Phisik

zu besuchen, worin nach der gewöhnlichen Einrichtung der Lehrbücher der gröste Theil dessen ebenfalls vorgetragen wird, was man in den Lehrbüchern der Angewandten Mathematik antrift. Diejenigen aber, welche mehr Theorie als die allerersten Grundlehren zu lernen geneigt sind, werden aus diesem zweyten Theile die übrigen Theorien lernen können, die nach der gewöhnlichen Abtheilung noch zur Theoretischen Elementar-Mathematik gehören.

Dahin rechne ich nun zuerst die Buchstaben-Rechnung. Man kan diesen Theil der Theorie nachdem man die Sache ansehen will, auch schon zur Algebra rechnen. Indessen haben die Herrn **Hausen** und **Kästner** diese Rechnungsregeln in den Anfangsgründen mit vorgetragen: und wenn die Algebra eigentlich lehren soll, wie man mathematische Aufgaben durch Gleichungen auflösen müsse; so ist die Buchstaben-Rechnung noch keine eigentliche Algebra, ob sie gleich dazu die nächste Vorbereitung ist. Nach diesem Begriff der Algebra hätte aus diesem Theile also die Lehre von der Auflösung einfacher und quadratischer Gleichungen wegbleiben müssen, und wer sehr genau seyn will, wird dies vielleicht als einen Fehler wider die strenge Methode ansehen. Allein ich habe mich schon in der Vorrede zum ersten Theile darüber erkläret, daß und warum ich mich an die strenge Methode so sehr nicht hin-

binden werde. Sonst könnte ich mich auch damit vertheidigen, daß doch alle geometrische Aufgaben, die sich durch einfache und quadratische Gleichungen auflösen lassen, zur Elementar-Geometrie gehören. Hiezu kommt noch dies, daß die Trigonometrie nicht ohne grosse Weitläuftigkeit vollständig abgehandelt werden konnte, ohne die einfachen und quadratischen Gleichungen zu brauchen. Eine sehr gute Vorbereitung zur Buchstaben-Rechnung, und zur Erlernung der Methode, wie man mathematische Aufgaben durch Gleichungen auflöset, war die kurze Einleitung zur praktischen Rechenkunst des gemeinen Lebens, womit ich den Anfang mache.

Weil die Trigonometrie und zwar nicht allein die ebene, sondern auch die sphärische Trigonometrie einen sehr wichtigen Theil der mathematischen Erfindungskunst abgiebt, so bin ich bemühet gewesen, sie so vollständig und deutlich vorzutragen, daß ich hoffe, es werden Anfänger bey mittelmässigen Fleiß und Fähigkeiten dabey keine Schwierigkeiten finden. Ich habe ihre Anwendung sowohl in der ebenen als auch in der körperlichen Geometrie vollständig zu zeigen gesucht. Und wenn man hier Lehren antreffen wird, die sonst in den Lehrbüchern der Anfangsgründe gewöhnlich nicht vorgetragen werden, so wird man es, wie ich hoffe, der Absicht eines vollständigern Lehrbegriffes

angemessen finden, wenn sie hier nicht wegge-
lassen sind. Ich rechne dahin ausser einigen
andern Untersuchungen, davon ich gleich nach-
her etwas erwehnen werde, die vollständigere
Theorie von der Kreismessung, so weit sie oh-
ne Differential- und Integral-Rechnung be-
werkstelliget wird. Viele werden im Stande
seyn, die Rechnung, so wie sie **Ludolf von Ceulen** geführt hat, zu übersehen, die mit der Theorie von den Reihen, welche sich auf neuere Erfindungen in der höhern Mathematik gründet, nicht bekannt sind. Und ich glaube, daß es eben um deswillen, weil nicht alle diejenigen, welche die Mathematik treiben, sich alle höhere Theorien bekannt machen können, sehr rathsam sey, die ältern Methoden bey solchen Untersuchungen, wie die Kreismessung ist, in den Lehrbüchern der Anfangsgründe beyzubehalten. Es würde nicht so viele unglückliche neue Erfinder der Quadratur des Kreises geben, wenn diese Herrn sich nur die Mühe nehmen wollten, dasjenige zu lernen worauf **Ludolf von Ceulen** seine Rechnungen gegründet hat.

Die ebene Geometrie habe ich mit der Lehre von Figuren, die einen gleichen Umfang haben, beschlossen. Ich fand, daß sich das meiste, was **Pappus** davon hat, durch Hülfe des analitischen Vortrags ziemlich kurz zusammen ziehen lasse. In der körperlichen Geome-

metrie schien mir die allgemeine Theorie von den eckigten Körpern, worüber, so viel mir wissend ist, Hr. Euler die ersten Untersuchungen angestellet hat, eine Stelle zu verdienen: eben so auch die Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts und der Oberfläche der Prismen und Pyramiden. Und wenn gleich die Theorie von den platonischen Körpern in die Ausübung eben keinen sehr erheblichen Einfluß hat; so ist sie doch eine der sinnreichsten Theorien der Alten, und verdient um deswillen schon, nicht ganz beyseite gesetzt zu werden. Euklides soll ja eben um dieser Theorie willen seine ganze Geometrie aufgesetzt haben, wie Proclus erzählt. Hier hat die Betrachtung der platonischen Körper noch den besondern Nutzen, daß sich Anfänger dabey vorzüglich in der Anwendung der sphärischen Trigonometrie üben können.

Dies alles dürften nun meine Leser noch wohl billigen, wenn nur das Buch nicht zugleich von mir bestimmt wäre darüber Vorlesungen zu halten. Wenn man es als ein solches Buch betrachtet, so ist es doch wohl unstreitig zu weitläuftig gerathen? Ich begehre mich gegen diesen etwanigen Vorwurf nicht umständlich zu vertheidigen, da er mich nach der deswegen in der Vorrede zum ersten Theil bereits gegebenen Erklärung, eigentlich nicht

trift

trift. Ich habe kein eigentliches Compendium schreiben wollen, sondern einen vollständigeren Lehrbegriff, wovon jedoch wenigstens einige Theile zu Vorlesungen dienen könnten. Ich glaube auch, daß dieser zweyte Theil noch eben nicht ganz ungeschickt dazu sey und das aus folgenden Gründen. Es ist ja eben nicht nothwendig, daß der Lehrer grade alles im mündlichen Vortrage durchgehe, was in dem Buche stehet, worüber die Vorlesungen gehalten werden; und in diesem Buche kann bey dem mündlichen Vortrage vieles übergangen, und dem eigenen Fleiß derjenigen Zuhörer empfohlen werden, die sich über das mittelmässige in dieser Wissenschaft erheben wollen. Diese müssen sich ohnehin sehr vieles durch eigenen Fleiß bekannt machen, und sie haben hier ein Buch in Händen, wo sie das alles in einem System beysammen finden, was sie sonst weitläuftig beym Privatfleiß aus vielen Büchern zusammen suchen müsten. Daher fange ich meine Vorlesungen gleich mit der Buchstabenrechnung an, ohne die sechs voranstehenden Abschnitte der Rechenkunst mündlich durchzugehen. Sie dienen zur Grundlage, wenn man etwa in einem öffentlichen Collegio in ein paar Stunden die Woche die praktische Rechenkunst durchgehen wollte. Zuhörer, denen der erste Theil geläufig ist, werden sie nebenher für sich gegen die Zeit durchgehen können, da in den

Vor-

Vorlesungen die Methode der Gleichungen vorkömmt, die ich mit solchen Exempeln erläutere, welche aus diesen erwehnten Abschnitten der Rechenkunst hergenommen sind. Im IV. Abschnitt der allgemeinen Rechenkunst gehe ich nur die Theorie von Ausziehung der Quadrat-Wurzeln beym mündlichen Vortrage genau durch, und überlasse die Theorie von den Cubikwurzeln dem Privatfleiß der Zuhörer, die damit gewiß für sich fertig werden können, wenn sie jene wohl gefaßt haben. Uebrigens bitte ich sie, mich zu befragen, wenn ihnen Schwierigkeiten aufstossen sollten. Eben so können die Sexagesimal-Brüche übergangen werden. Wer sie in der Astronomie einmahl brauchen will, kann hier die Regeln nachschlagen, und sie sich sehr leicht geläufig machen. Der Xte Abschnitt kann allenfalls den Privatfleiß der Zuhörer beschäftigen. Ich darf wohl nicht erinnern, daß es gar nicht nöthig sey, beym mündlichen Vortrage alle die Rechnungen durchzuführen, wovon hier an den gehörigen Stellen die Resultate hingesetzt sind, als in der Lehre von den Logarithmen, von Berechnung der trigonometrischen Linien, von der Kreismessung, u. s. f. Der Zuhörer kann die Richtigkeit der Resultate beym Privatfleiß prüfen, wenn er Zeit dazu hat, und Vergnügen an solchen Rechnungen findet. In der körperlichen Trigonometrie gehe ich nur die

Beweise der Hauptformuln ausführlich durch, die übrigen müssen die fleissigen Zuhörer, die würklich was lernen, und in der Wissenschaft fortkommen, für sich nachrechnen können. So gebe ich auch zur Erlernung der allgemeinen Theorie von den eckigten Körpern, und der besondern von den Platonischen Körpern nur die allgemeine Anleitung, und überlasse das besondre dem Privatfleiß der Zuhörer, allemahl mit dem Vorbehalt, ihnen besonders fortzuhelfen, wenn ihnen Schwierigkeiten aufstossen sollten. Ich meyne, daß dies eben die rechte Methode sey, mit Anfängern die Mathematik zu treiben. Wenn diese nicht selbst Hand anlegen, durch eigene Uebung sich eine Fertigkeit im Calcul erwerben, und die Lehren der Geometrie sich geläufig machen; so ist alle Mühe und Arbeit umsonst, wenn ihnen gleich der Lehrer alles haarklein vordemonstrirt.

Bey dieser Einrichtung des mündlichen Vortrags bin ich sehr wohl im Stande, das Collegium über diesen zweyten Theil in einem halben Jahre zu endigen, und fleissige Zuhörer binnen Jahres Frist so weit zu bringen, daß sie einer weitern Anführung in der theoretischen Mathematik allenfalls ganz entbehren können. Ich bin gut dafür, daß diejenigen ohne sonderlichen Anstoß die ganze Algebra

und

und höhere Geometrie durch eigenen Fleiß lernen können, welche sich die beyden ersten Theile dieses Lehrbuchs recht geläufig gemacht haben. Mein Vorsatz ist nun mit göttlicher Hülfe die praktische Mathematik auf eine ähnliche Art abzuhandeln, und der dritte Theil, welcher bereits zum Abdrucke fertig liegt, wird die Statischen Wissenschaften nebst der Mechanik der festen Körper enthalten.

Bützow im Decemb. des Jahrs 1767.

Vorrede
zur zweyten Auflage.

Als vor einigen Jahren die zweyte Auflage vom ersten Theile dieses mathematischen Lehrbegriffes zum Druck befördert ward, äusserte ich mich in der vorangesetzten Nachricht dahin, daß die Einrichtung des ersten Theiles im Ganzen geblieben sey, wie sie in der ersten Auflage gewesen war. Ich setzte überdem hinzu, es werde ebenfalls keine Aenderung des Plans im Ganzen weiter gemacht werden, wenn auch vom zweyten und den folgenden Theilen vielleicht eine neue Auflage verlangt werden mögte, weil die bisher nacheinander im Druck erscheinenen acht Theile des mathematischen Lehrbegriffes ein eigenes von den seit dem Jahr 1780 hinzugekommenen Anfangsgründen der mathematischen Wissenschaften verschiede-

nes Werk bleiben sollen. Eben darum ist auch die Ordnung und selbst die Anzahl der Abschnitte in dieser zweyten Auflage des zweyten Theiles eben so geblieben, wie es in der ersten Auflage war: nur einzelne Lehren sind hier zum Theil ganz umgearbeitet vorgetragen, zum Theil ganz neu hinzu gekommen. Hieher gehören vornemlich die Lehren von den Potenzen und ihren Wurzeln, von den Logarithmen, von den trigonometrischen Linien und von der Kreismessung. Weil eben diese Lehren, soweit man sie aus den ersten Anfangsgründen der Rechenkunst und Geometrie herleiten kann, schon vollständig genug im ersten Theile meiner mathematischen Anfangsgründe enthalten sind; so war es dem jetzigen Plan des Lehrbegriffes, der sich von den Anfangsgründen durch mehr Vollständigkeit unterscheiden soll, auch mehr angemessen, das alles in grösserer Allgemeinheit hier vorzutragen. Auf die merkwürdige Preisfrage der Königlich Preuss. Academie der Wissenschaften vom Jahr 1784, das Mathematisch-Unendliche betreffend, habe ich dabey vorzüglich Rücksicht genommen: daher ist der zweyte Abschnitt der Algebra oder allgemeinen Rechenkunst hier ganz von neuen aus-

ausgearbeitet worden. Nur eine kurze Zeit vorher, ehe die Verlagshandlung die Besorgung der zweyten Auflage von diesem zweyten Theile des Lehrbegriffes von mir verlangte, hatte sie mir zugleich bekannt gemacht, daß von meiner im Jahr 1760 in Lateinischer Sprache herausgegebenen Matheſi Theoretica nur wenige Exemplare übrig wären, und mir dabey überlassen, ob ich eine neue Auflage davon nöthig fände. Ich entschloß mich aber anstatt dessen, einen etwas kürzern Entwurf desjenigen Theiles davon, der die höhere Mathematik zum Gegenstande hatte, in deutscher Sprache auszuarbeiten, und dieses Werk ist unter dem Titel: Anfangsgründe der Mathematischen Analyſis und höhern Geometrie, mit Rücksicht auf eine Preisfrage von Mathematischs Unendlichen, zugleich als die zweyte Abtheilung des mathematischen Lehrbegriffes 2ter Theil, im Leipziger Michaelis-Meßbücher-Verzeichniß von 1785 unter den Schriften, welche künftig heraus kommen sollen, bereits angezeiget worden. Ich habe diese Anfangsgründe der Analyſis und höhern Geometrie mit Vorbedacht so verfasset, daß das Buch als ein eigenes Werk für

sich

sich angesehen werden kann: zugleich aber schliesset es auch als eine zweyte Abtheilung an den zweyten Theil des Lehrbegriffes an. Daher enthalten nun die drey ersten Bände des Lehrbegriffes die ganze theoretische elementar- und höhere Mathematik so vollständig, als es der Plan des Lehrbegriffes erfordert. Diese zweyte Auflage des zweyten Theiles wird den Liebhabern der Mathematik, welche sich mehr als mittelmässige Kenntnisse zu erwerben wünschen, als eine nähere Vorbereitung dienen, wenn sie den ersten Theil des Eulerischen Werkes: Introductio in Analysin Infinitorum, lesen wollen, so wie die neu hinzugekommene zweyte Abtheilung als eine nähere Anleitung, um Herrn Eulers Werke von der Differential- und Integralrechnung, auch den zweyten Theil des Werks: Introductio in Analisin Infinitorum, ohne Anstoß durchzugehen.

Halle im März des Jahres 1786.

Der Verfasser.

Inhalt des zweyten Theils.

Weitere Ausführung der Rechenkunst.

Der XI. Abschnitt. Von den Kennzeichen einiger Divisoren ganzer Zahlen. Seite 1.

Der XII. Abschnitt. Von der zusammengesetzten Regel Detri und der Regel Multiplex S. 8.

Der XIII. Abschnitt. Von der Rabatt- oder Interusurien und andern Reductionsrechnungen. S. 24.

Der XIV. Abschnitt. Von Zins auf Zins, und der zusammengesetzten Interusurien-Rechnung. S. 31.

Der XV. Abschnitt. Von der Gesellschafts und Vermischungs und Alligations-Rechnung. S. 37.

Der XVI. Abschnitt. Von der Regel Coeci und Regel Falsi S. 62.

Die Algebra, oder die allgemeine Rechenkunst mit ihrer Anwendung auf die Zahlen-Rechenkunst.

Der I. Abschnitt. Von den vier allgemeinen Rechnungsarten. S. 78.

Der II. Abschnitt. Die ersten Grundbegriffe von veränderlichen Grössen und den Gränzen ihrer möglichen Werthe. S. 103.

Der III. Abschnitt. Vor den Potenzen und ihren Wurzeln. S 122.

Der IV. Abschnitt. Berechnung der Quadrat- und Cubicwurzeln, auch allgemeine Formuln für die Potenzen und Wurzeln aller Ordnungen. S. 146.

Der V. Abschnitt. Von den Sexagesimal Brüchen. S. 192.

Der VI. Abschnitt. Von der Zusammensetzung und Theilung der Verhältnisse als dem Ursprunge der Logarithmen. S. 202.

Der VII. Abschnitt. Von den Briggischen Logarithmen. S. 244.

Der VIII. Abschnitt. Von der Auflösung mathematischer Aufgaben durch Gleichungen. S. 281.

Der IX. Abschnitt. Von den Progreßionen, mit allgemeinen Lehren von den Summen unbestimmt fortlaufender Reihen. S. 329.

Der. X. Abschnitt. Von Annuitäten- und andern Rentenrechnungen. S. 353.

Weitere

Weitere Ausführung der ebenen Geometrie.

Der XVI Abschnitt. Von den trigonometrischen Linien und ihren Logarithmen. Seite. 378.

Der XVII Abschnitt. Berechnung der Seiten und Winkel gradlinichter Dreyecke und reguläre Polygone. S. 425.

Der XVIII. Abschnitt Vergleichung der Tangenten und Cotangenten einfacher und vielfacher Winkel. S. 456.

Der XIX Abschnitt. Anwendung der Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts gradlinichter Figuren. S. 462.

Der XX. Abschnitt. Von der Kreismessung und Theilung der Bogen oder Winkel. S. 470.

Der XXI. Abschnitt. Vergleichung des Inhalts der Figuren die einen gleichen Umfang haben. S. 492.

Weitere Ausführung der körperlichen Geometrie.

Der XXII Abschnitt. Von den Kugelschnitten. S. 502.

Der XXIII. Abschnitt. Von den körperlichen Winkeln oder Ecken S. 511.

Der XXIV. Abschnitt. Die sphärische Trigonometrie S. 525

DerXXV. Abschnitt. Allgemeine Theorie von den eckigten Körpern. S. 559.

Der XXVI. Abschnitt. Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts und der Oberflächen der Prismen, Pyramiden und der regulären Körper. S. 573.

Der XXVII. Abschnitt. Von der Cylinder- und Kegelfläche. S. 597.

Der XXVIII. Abschnitt. Von der Kugelfläche und den Abschnitten und Ausschnitten der Kugel. S. 612.

Weitere Ausführung
der Rechenkunst.

Der XI. Abschnitt.

Von den Kennzeichen einiger Divisoren ganzer Zahlen.

211. §.

Wenn die Summe aller einzelnen Ziffern einer Zahl, ohne Rücksicht auf die Verschiedenheit ihrer Ordnungen, durch 9 theilbar ist: so muß auch die Zahl selbst, welche die Ziffern in ihrer Zusammensetzung ausdrücken, durch 9 theilbar seyn.

Beweis. Jedes Glied der Reihe 1, 10, 100, 1000, u. s. w. durch 9 dividirt läßt 1 zum Rest: also läßt jedes Glied der Reihe 2, 20, 200, u. s. w. durch 9 dividirt, 2 zum Rest. Denn $20 = 10 + 10$; jeder Theil läßt 1 zum Rest, also läßt das Ganze 2 zum Rest u. s. f. Etwas ähnliches gilt von einer jeden einfachen Ziffer, die kleiner, als 9 ist. Sie mag so viel Nullen, als sie wolle, bey sich haben, so wird

sie durch 9 dividirt, einen Rest übrig lassen, der dieser Zahl selbst, als einem schlechten Einer betrachtet, gleich ist. So ist z. E. 80 = 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10 + 10. Jedes Stück durch 9 getheilt, läßt 1 zum Rest, also muß das Ganze durch 9 getheilt, 8 zum Rest lassen. Wenn demnach eine Zahl, wie z. E. 375 durch 9 getheilt wird; so muß die Summe der Reste aller Theile ihrer verschiedenen Ordnungen = 15 seyn, und die Zahl 375 durch 9 getheilt muß eben den Rest geben, den die Summe der Reste der Theile, nemlich 15, giebt, welche hier 6 wäre. Aus dem 75. §. aber folgt, wenn die Summe aller dieser Reste durch 9 theilbar ist, daß die Zahl selbst ebenfalls durch 9 theilbar sey. So ist z. E. die Zahl 54738 durch 9 theilbar.

212. §.

Wenn eben die Summe aller Ziffern einer Zahl ohne Rücksicht auf ihre Ordnungen durch 3 theilbar ist: so muß es auch die Zahl selbst seyn.

Dieser Satz beruhet mit dem vorigen auf einerley Gründen. Jede Ziffer mit so viel Nullen, als man will, ist entweder durch 3 theilbar, oder läßt einen Rest, der eben so groß ist, als der Rest, welchen die Division giebt, wenn man diese Ziffer als einen schlechten Einer betrachtet. Summirt man also die einzelnen Ziffern, und dividirt sie durch 3, so muß der Rest mit dem einerley seyn, den die Zahl selbst durch 3 dividirt giebt; und bleibt kein Rest, so ist die Zahl selbst durch 3 theilbar. (75. §.)

213. §.

Man zähle die Ziffern einer Zahl von der Rechten gegen die linke, und nenne die Stellen, worin sie ste-

stehen, grade oder ungrade, nachdem von der niedrigsten bis zu dieser Ziffer, sie selbst mitgerechnet, eine grade, oder ungrade Anzahl Ziffern vorhanden ist.

Wenn man nun in einer Zahl, welche in allen graden Stellen eine Null hat, die Ziffern der ungraden Stellen wie vorhin addirt, und die Summe durch 11 theilbar findet; so ist die Zahl selbst durch 11 theilbar.

Beweis. Wenn ein Glied der Reihe 1, 100, 10000 u. s. f. durch 11 dividirt wird: so ist der Rest allemahl 1. Also läßt jedes Glied der Reihe 2, 200, 20000 u. s. f. zum Rest 2, und jedes Glied der Progreßion 3, 300, u. s. f. läßt 3. Kurz, jede Ziffer mit einer graden Anzahl Nullen läßt durch 11 dividirt einen Rest, der mit der Ziffer einerley ist. Wenn also eine Zahl, wie 7030408 durch 11 dividirt wird; so muß der Rest so groß seyn, als die Summe aller Ziffern 7+3+4+8, und der Rest, den diese Summe durch 11 dividirt läßt, muß mit dem Rest der Zahl selbst einerley seyn. Läßt also diese Summe keinen Rest; so ist die Zahl durch 11 theilbar.

214. §.

Wenn die Summe der graden Stellen durch 11 theilbar ist, und in den ungraden Stellen allenthalben o stehet; so ist die Zahl ebenfalls durch 11 theilbar.

Beweis. Alle Glieder der Progreßion 10, 1000, 100000, 10000000 lassen durch 11 dividirt, den Rest 10, dessen Complement zu 11 die 1 ist. Alle Glieder der Reihe 20, 2000 u. s. f. lassen also zum Rest 9, und sein Complement ist 2. So läßt jede Ziffer, wenn sie hier statt der 1 in der Progreßion

stehet, in jedem Gliede einen Rest, dessen Complement zu 11 der Ziffer gleich ist. Wenn demnach eine Zahl wie 70504020 durch 11 dividirt wird; so muß die Summe der Complemente der Reste aller Theile zu 11 der Summe der einzelnen Ziffern gleich seyn. Ist nun die Summe dieser Complemente durch 11 theilbar: so muß auch die Summe der Reste durch 11 theilbar, folglich die Zahl selbst mit 11 theilbar seyn (75. §.)

Zusatz. Ist die Summe dieser Complemente durch 11 untheilbar; so ist es auch die Summe der Reste, also die Zahl selbst (75. §.) Der Rest, welchen die Theilung durch 11 in die Summe der Complemente giebt, muß mit dem Rest, welchen die Theilung durch 11 in die Summe der Reste giebt, zusammen genommen dem Divisor 11 gleich seyn (74. §.) Denn die Summe der Complemente und Reste ist durch 11 theilbar.

215. §.

Jede Zahl ist als eine Summe zwoer solcher Zahlen anzusehen, dergleichen im 213, und 214 §. betrachtet worden. So ist 374938 = 304030 + 70908. Daraus fliessen folgende Regeln:

Wenn sowohl die Summe der graden, als ungraden Stellen jede für sich in 11 theilbar ist; so ist die ganze Zahl in 11 theilbar (71. §.)

Wenn eine von beyden Summen für sich allein durch 11 theilbar, die andre untheilbar ist; so ist die Zahl selbst durch 11 untheilbar (72. §.)

Wenn jede dieser Summen in 11 untheilbar ist, und beyde Summen einen gleichen Rest lassen: so ist die Zahl durch 11 theilbar.

Denn

Denn der Rest der graden Stellen ist das Comple-
ment des Restes dieses Theils der Zahl zum Divisor
11 (214 §.), und der Rest der ungraden Stellen ist
mit dem Rest dieses zweyten Theils der Zahl selbst
einerley. (213. §.) Wenn demnach dieser Rest der
ungraden Stellen dem Rest der graden Stellen gleich
ist, so giebt jeder Theil der Zahl selbst durch 11 di-
vidirt einen Rest, der den andern zum Divisor 11
ergänzt: folglich ist diese Zahl durch 11 theilbar
(74. §.)

Sind also im letzten Fall beyde Reste un-
gleich: so ist die Zahl durch 11 untheilbar.
(74. §.)

216. §.

Jede Zahl, die zur Rechten eine o hat, ist durch
10, hat sie zwo oo, durch 100, hat sie drey ooo,
durch 1000 u. s. f. theilbar. Hieraus folgt:

Jede Zahl, die am Ende eine o hat, ist durch 2,
und auch durch 5 theilbar (76. §.): also wegen der
ersten Ursache eine grade Zahl.

Jede Zahl, die am Ende eine grade Ziffer hat, ist
eine grade Zahl, und jede Zahl, die am Ende eine
ungrade Ziffer hat, eine ungrade Zahl. Denn jene
ist die Summe zwoer graden, diese die Summe ei-
ner graden, und einer ungraden Zahl: also folgt der
Satz aus dem 79. §.

Zahlen, deren Endziffer ungrade ist, können in
keine grade Zahl theilbar seyn, denn sonst wären sie
auch durch 2 theilbar (76. §.), welches nicht seyn kann.

Alle grade Zahlen, die durch 3 oder 9 theilbar
sind, sind auch durch 6 theilbar.

217. §.

Alle Zahlen, die am Ende eine 5 haben, gehen in 5 auf (216. 71. §.) Ist die Endziffer einer Zahl von 0 und von 5 unterschieden, so geht 5 in der Zahl nicht auf: also geht eben die Zahl auch in kein Product auf, das den Factor 5 hat.

Wenn eine Zahl die Endziffer 5 hat, und in eine grade Zahl multiplicirt wird, so ist 0 die Endziffer des Products: denn das Product ist in 5 theilbar (76. §), also kann nur 0 oder 5 die Endziffer seyn. Eben dies Product ist eine grade Zahl (79. §.), also hat es zur Endziffer 0.

Wird eine Zahl von eben der Art mit einer ungraden Zahl multiplicirt; so ist das Product zwar noch durch 5 theilbar (76. §.), aber eine ungrade Zahl (79. §.), demnach ist die Endziffer 5.

218. §.

Alle Zahlen, welche am Ende zwo Nullen haben, sind durch 4 theilbar, weil sie durch 100 theilbar sind. Demnach sind auch solche Zahlen durch 4 theilbar, deren zwo Endziffern in 4 aufgehen, diejenigen aber in 4 nicht theilbar, deren zwo Endziffern in 4 nicht aufgehen.

Alle Zahlen, deren zwo Endziffern Nullen sind, gehen auch in 25 auf, folglich auch nur diejenigen, deren zwo Endziffern in 25 aufgehen, und keine andre.

Alle Zahlen, die am Ende drey Nullen haben, sind in 8 sowohl, als in 125 theilbar, also auch nur solche, deren drey letzte Ziffern durch 8 oder 125 theilbar sind, keine andre.

Diese bisherige Untersuchung hat in der Ausübung ihren mannigfaltigen Nutzen. So ist es z. E. in vielen Fällen kein geringer Vortheil im Rechnen, wenn man ein Verhältniß, oder einen Bruch leicht durch seine kleinsten, oder auch nur durch kleinere Zahlen, als die gegebenen sind, ausdrücken kann, ohne auf dem etwas weitläuftigen Wege das gemeine Maaß zu suchen, der im 85. und 97. §. erklärt ist. Bey den Rechnungsfragen, die im folgenden Abschnitt sollen betrachtet werden, finden diese Lehren ihre beständige Anwendung.

219. §.

Wäre das Verhältniß
6081075000 : 17775450000 gegeben; so kann man es auf folgende Art nach und nach durch kleinere Zahlen ausdrücken:

6081075ØØØ	: 17775450ØØØ
25) 243243	711018
9) 27027	79002
9) 3003	8778
3) 1001	2926
11) 91	266

So weit reichen die beschriebenen Kennzeichen zu. Man kann jetzt nach der Methode des 85. §. der Rechenkunst prüfen, ob die beyden letzten Zahlen vielleicht noch ein gemeines Maaß haben. Weil aber die Zahlen schon ziemlich klein sind, so kann man auch leicht in Gedanken die Division mit einer oder der andern von den einfachen Ziffern, die bisher noch nicht gebraucht sind, versuchen, und man wird in diesem Falle leicht wahrnehmen, daß man noch durch

7 theilen könne: man erhält alsdenn 13 : 38, da dann 13 schon eine Primzahl ist.

Man kann aus der Art, wie die Zahlen zusammengesetzt sind, zwar ein ähnliches Kennzeichen der Theilbarkeit durch 7 herleiten: allein die Methode ist weitläuftiger, als wenn man die Division mit 7 selbst versucht. Man s. v. Clausbergs Dem. Rech. 617. u. f. §.

Der XII. Abschnitt.

Von der zusammengesetzten Regel Detri, und der Regel Multiplex.

220. §.

Die im VIII Abschnitt der Geometrie vorgetragenen Lehren von der Art, wie man ein Verhältniß aus zweyen oder dreyen andern zusammensetzt, lassen sich viel allgemeiner machen. Hält man nemlich so viele Proportionen als man will, von dieser Art gegen einander

$$A : B = \alpha\ \beta$$
$$B : C = \gamma : \delta$$
$$C : D = \varepsilon : \zeta$$
$$D : E = \eta : \vartheta$$
$$E : F = \iota : \varkappa \text{ u. s. f.}$$

so erhellet, daß allemahl ein solches Verhältniß wie A : F aus den Verhältnissen A : B, B : C, C : D, D : E, E : F, oder $\alpha\ \beta$, $\gamma : \delta$, $\varepsilon : \zeta$, $\eta : \vartheta$, $\iota : \varkappa$ u. s. f. als Theilen zusammengesetzt sey.

221.

221. §.

Wenn man die gleichnahmigen Glieder mehrerer Verhältnisse in einander multiplicirt; so ist das Verhältniß der Producte aus allen Verhältnissen der Factoren zusammengesetzt.

Beweis. Der Satz ist für zwey oder drey Verhältnisse wahr. (243. §. G.) Wenn aber der Satz für eine Gewisse Anzahl von Verhältnissen wahr ist: so gilt er auch für eine Anzahl, die um 1 grösser ist. Denn es sey

$$A:H = \left\{\begin{matrix}\alpha:\beta\\ \gamma:\delta\\ \vdots\ :\ \vdots\\ \varepsilon:\zeta\end{matrix}\right\}$$

und $\alpha.\gamma\ldots\varepsilon:\beta.\delta\ldots\zeta = A:H$, also $H = \frac{A.\beta.\delta\ldots\zeta}{\alpha.\gamma\ldots\varepsilon}$. Es sey ferner $\eta:\vartheta = H:K$,

so ist $\eta:\vartheta = \frac{A.\beta.\delta\ldots\zeta}{\alpha.\gamma\ldots\varepsilon} : K$ also $K = \frac{A.\beta.\delta\ldots\zeta.\vartheta}{\alpha.\beta\ldots\varepsilon.\zeta}$, und $\frac{K}{A} = \frac{\beta.\delta\ldots\zeta.\vartheta}{\alpha.\gamma\ldots\varepsilon.\eta}$, oder

$A:K = \alpha.\gamma\ldots\varepsilon.\eta:\beta.\delta\ldots\zeta.\vartheta$. Es ist aber auch

$$A:K = \left\{\begin{matrix}\alpha:\beta\\ \gamma:\delta\\ \vdots\ :\ \vdots\\ \varepsilon:\zeta\\ \eta:\vartheta\end{matrix}\right\};$$ also erhellet, daß der Schluß von einer jeden Anzahl von Verhältnissen auf eine um Eins grössere Anzahl folge.

Nun ist der Satz für zwey, auch für drey Verhältnisse wahr, folglich für vier, u. s. f. für eine jede Anzahl von Verhältnissen.

222. §.

Bey allen Rechnungsfragen, die zur Regel quinque gehören (210. §.), ist das Verhältniß der gegebenen Zahl zur gesuchten aus zweyen andern gegebenen Verhältnissen zusammen gesetzt, und man hat alsdenn zwey Fragzahlen, auch überdem zwey andre Zahlen, die mit ihnen von einerley Art sind.

Es kann aber das Verhältniß einer gegebenen Zahl zur gesuchten auch aus mehr als zweyen Verhältnissen zusammengesetzt seyn. Soll man zu 7 Zahlen die 8te suchen, so daß das Verhältniß der 7ten zur 8ten aus den dreyen Verhältnissen der ersten zur 2ten, der 3ten zur 4ten, und der 5ten zur 6ten zusammengesetzt ist: so nennen einige Arithmetici dies die Regula septem, und man sieht leicht, daß man auf ähnliche Art eine regulam novem, regulam undecim u. s. f. machen könne. Andere Arithmetici rechnen alle solche Fälle schlechthin zur regula quinque, wegen der Aehnlichkeit des Verfahrens, obgleich dieser Nahme zu speciel ist. Besser und richtiger kann man den allgemeinen Nahmen der zusammengesetzten Regel Detri brauchen. Die vorgelegte Aufgabe muß alsdenn drey oder mehr Fragzahlen, und eben so viele andre Zahlen enthalten, die mit jenen von einerley Art sind: auch überdem noch eine Zahl, die mit der gesuchten von einerley Art ist. Folgendes Exempel würde hieher gehören.

Zu einem gewissen Werk sind 20 Arbeiter 15 Wochen des Tages 6 Stunden zu arbeiten um 1000 Fl. bedungen worden: wieviel würde man nach solcher Proportion an 36 Arbeiter auf 4 Wochen, des Tages 8 Stunden zu arbeiten, bezahlen müssen.

Es

Es liegen hierin diese 3 Proportionen: Für gleiche Wochen und Stunden wäre

20 Arb: 36 Arb. = 1000 fl: ges. Anz. fl. für 36 Arbeiter.

Für ungleiche Wochen, gleiche Stunden, und gleichviel Arbeiter würde man ansetzen

15 W: 4 W. = ges. Anz. fl: Anz. fl. für 36 Arb. auf 4 Wochen.

Für gleiche Wochen, gleichviel Arbeiter, und ungleiche Stunden.

6 St: 8 St. = ges. Anz. fl: ges. Anz. fl. für 36 Arb. auf 4 W. zu 8 St. d. Tages.

Also ist:

$20 \times 15 \times 6 : 36 \times 4 \times 8 = 1000$ fl: ges. Anz. fl.

oder: $5 \times 5 \times 1 : 2 \times 8 = 1000$ fl: ges. Anz. fl.

Demnach ist die gesuchte Zahl $= \frac{16000}{25}$ fl. $= 640$ fl., und wenn man diese Rechnungsfrage mit derjenigen vergleicht, die im 210. §. zum Exempel diente; so ergiebt sich ohne weitere Schwierigkeit, daß man in allen zur zusammengesetzten Regel Detri gehörigen Fällen nach folgender allgemeinen Regel verfahren könne.

Man setze alle Fragzahlen am Ende untereinander, das was mit dem gesuchten von einerley Art ist, in der Mitte, und alle übrige Zahlen, deren eben so viele als Fragzahlen seyn müssen, vorne an untereinander. Alle Fragzahlen, imgleichen alle Zahlen in der ersten Stelle multiplicire man in einander, so geben sich drey Zahlen, womit man übrigens nach der gewöhnlichen Regel Detri umgehet.

Wenn man in der ersten und dritten Stelle gleich anfangs die gemeinschaftlichen Factoren wegstreicht,

so

so ändert dies die Proportion nicht (190. §. G.), und die Rechnung wird kürzer. Hiebey kann man nun die im vorigen Abschnitt erwiesenen Regeln die Divisoren zu finden häufig mit Vortheil brauchen.

Nach dieser Vorschrift würde man demnach bey dem vorigen Exempel die ganze Rechnung so führen können.

5	℔ Arb.			
5	auf x ℔ W. bek.	1000 fl.	Wiev? ℔ A.	62
1	und ℔ St. div.	25	auf 4 W.	1
25		40	und 8 St.	8
		mult. mit 16		16
		Fac. 640 fl.		

Die zur Seite gesetzten Zahlen sind die Quotienten, welche die Divisionen mit den gemeinschaftlichen Factoren geben.

223. §.

Oft ist das Verhältniß der Zahl, die mit der gesuchten von einerley Art ist, zur gesuchten, aus den Verhältnissen der übrigen Zahlen nicht in einerley Ordnung zusammengesetzt, welches aus der Natur der gegebenen Zahlen eben so, wie bey der einfachen Regel Detri (206. §) beurtheilet werden muß: und dies ist der Grund von der so genannten **umgekehrten Regula quinque**, und überhaupt der **umgekehrt zusammengesetzten Regel Detri**. Zerlegt man die gegebene Rechnungsfrage in die darin liegenden Proportionen; so giebt es sich allemahl von selbst, in welchem Verhältniß man die Glieder umgekehrt setzen muß. Ist man aber an die gemeine Art, den Ansatz zu machen, gewohnt; so muß man sich mit dieser Regel helfen.

Kann

Kann man sagen: je grösser jede der Fragzahlen ist, desto grösser; und je kleiner jede der Fragzahlen ist, desto kleiner muß die gesuchte Zahl seyn: so bleibt alles in der Ordnung stehen, wie es sich nach der Regel des 222. §. ergiebt. Wenn man aber bey einer der Fragzahlen findet, daß man sagen müsse: je grösser diese Fragzahl ist, desto kleiner, und je kleiner diese Fragzahl ist, desto grösser muß die gesuchte Zahl seyn: so muß man diese Fragzahl in die erste Stelle setzen, und die zugehörige Zahl aus der ersten in die dritte bringen.

Es sey folgendes Exempel gegeben. Wenn 125 Soldaten mit 16500 fl. 1 Jahr unterhalten werden können, wie lange kann man 2150 Soldaten mit 709500 fl. unterhalten?

Bey gleicher Menge Fl. hätte man

2150 Sold: 125 Sold. = 1 J.: Zeit, in welcher 2150 Sold. mit gleichem Gelde zu erhalten sind.

Denn jemehr Soldaten, desto kürzere Zeit kommt man mit demselben Gelde aus.

Bey gleicher Anzahl Soldaten

16500 fl: 709500 fl. = ges. Zeit: Zeit, in welcher 2150 Sold. mit 709500 fl. zu erhalten sind.

Denn jemehr Geld, desto länger kann eben die Anzahl damit auskommen. Also ist $2150 \times 16500 : 125 \times 709500 = 1$ J: ges. Zahl Jahre. Diese gesuchte Zahl wird $= \frac{125 \times 7095}{2150 \times 165} = \frac{25 \times 1419}{430 \times 33}$

$= \frac{25 \times 33}{10 \times 33} = \frac{25}{10} = 2\frac{1}{2}$ J. Wollte man sich nach dem 222. §. richten: so erhielte man folgenden Ansatz:

125

125 Sold. kommen aus 1 J. Wie lange? 2150 Sd.
mit 16500 fl. mit 709500 fl.

Aber jemehr Soldaten, desto kürzer muß die gesuchte Zeit seyn. Also setzt man:

10 ÆBØ	2150 Sold.			2125 Sd.	25
ÆÆ	16500 fl.	>	1 J.	< 70950Ø fl.	xÆxØ ÆÆ

25

div. 10

Fac. $2\frac{1}{2}$ J.

Mehr Exempel von dieser Art können hier ohne zu grosse Weitläuftigkeit nicht beygebracht werden, und man findet bey den Practischen Schriftstellern derselben eine ziemliche Menge, die man zur Uebung nachschlagen kann. (Man vergleiche übrigens hiemit Franz Christian Lorenz Karstens Rechenkunst, Bützow und Wißmar 1775, die 2te Abtheil. 6. und 7. Abschnitt.)

224. §.

Von den bisher betrachteten zur zusammengesetzten Regel Detri gehörigen Aufgaben, welche mehr als eine Fragzahl enthalten, unterscheidet sich noch eine andre Art von Rechnungsaufgaben, wobey nur eine Fragzahl vorkommt, die ebenfalls hieher gehören. Das Verhältniß der Fragzahl zur gesuchten ist sodann aus den übrigen in der Aufgabe vorkommenden Verhältnissen zusammengesetzt, weil man, wie die Beyspiele zeigen werden, bey der Rechnung selbst die Zahlen als abstracte Zahlen ansehen kann, und es bey diesem Geschäfte nicht hindert, wenn gleich dem Anschein nach in dem Ansatz ungleichartige Grössen in Verhältnisse gebracht werden. Gesetzt jemand

kauft

kauft 12 Danziger Ellen Zeug für 16 fl., wieviel werden ihm 30 Brabanter Ellen zu stehen kommen, wenn 5 Brabanter Ellen 6 Danziger Ellen machen.

Man bringe zuerst die Brabanter Ellen in der Fragzahl auf Danziger Ellen, nach der Proportion.

5 Br. Ell: 30 Br: Ell. = 6 Danz. Ell: 36 D. Ell.

Schliest man nun weiter

12 Danz. Ell: 36 Danz. Ell. = 16 fl: 48 fl.

so ist 48 fl. die gesuchte Zahl.

Wenn man in beyden Proportionen die mitlern Glieder verwechselt, und sie nach gemeiner Art ansetzt: so werden sie so stehen:

5 Br. Ell. geben 6 Danz. Ellen; Wieviel 30 Br. Ell. Fac. 36 Danz. Ell.

12 Danz. Ell. kosten 16 fl., was kosten 36 Danz. Ell. Fac. 48 fl.

Siehet man hier alle Zahlen als abstracte Zahlen an: so kann man sagen, es sey das Verhältniß der Fragzahl zur gesuchten, aus den Verhältnissen $\begin{matrix}5:6\\12:16\end{matrix}$ zusammengesetzt so, daß die gesuchte Zahl $= \frac{30 \times 6 \times 16}{5 \times 12}$ wird.

Eben dies geben die beyden eigentlichen Proportionen:

5 Br. Ell: 30 Br. Ell. = 6 Danz. Ell: $\frac{30 \times 6}{5}$

Danz. Ell.

12 Danz. Ell: $\frac{30 \times 6}{5}$ Danz. Ell. = 16 fl: ges. Zahl. Also die gesuchte Zahl $= \frac{30 \times 6 \times 16}{5 \times 12}$ wie vor.

vorhin, deswegen kann man nach gemeiner Art setzen: 5 Br. Ell. geben 6 D. Ell. } und 12 D. Ell. kosten 16 fl. }. Was kosten 30 Br. Ellen? da denn das Product der Zahlen in der zweyten Stelle mit der Fragzahl, durch das Product der Zahlen in der ersten Stelle dividirt, die gesuchte Zahl giebt. Am bequemsten verfährt man so. Man setzt die Fragzahl in der zweyten Stelle oben an, auf diese Art:

Was kosten 30 Br. Ellen?
wenn 5 Br. Ellen geben 6 Danz. Ellen,
und 12 Danz. Ellen kosten 16 fl.

Man streicht nun, wie im vorhergehenden schon geschehen ist, die gemeinschaftlichen Factoren weg, oder dividirt auf beyden Seiten was einen gemeinschaftlichen Divisor hat mit demselben, und setzt die Quotienten zur Seite: so kann man mit der Quotienten so umgehen, wie man sonst mit den gegebenen Zahlen selbst umgehen müste. Auf die Art kommt das Exempel so zu stehen.

	Wieviel fl. kosten ʒø Br. Ellen?	
	wenn ʒ Br. Ell. geben ø Danz. Ell.	ø3
x	und xx Danz. Ell. kosten 16 fl.	

3

Fac. 48 fl.

225. §.

Dieses Verfahren heißt bey den Practischen Arithmeticis die Regel Multiplex oder *Conjointe*, oder auch die Kettenregel. Sie ist von ungemein weitläuftigen Nutzen, und würklich eine sehr artige Verkürzung vieler solcher Rechnungen, die nach der gemeinen Regel Detri überaus weitläuftig werden müsten.

sten. Bey dem Ansatz der hieher gehörigen Exempel sind folgende Regeln zu merken.

Man schreibe die Fragzahl rechter Hand oben an. Linker Hand setze man von den gegebenen Zahlen diejenige, welche mit der Fragzahl von einerley Art ist, und rechter Hand, unter der Fragzahl diejenige, so in der Aufgabe damit verglichen, oder sonst auf andre Art verbunden ist. Man setze wieder zur Linken diejenige Zahl, so mit der nächstvorher zur Rechten geschriebenen von einerley Art ist, und zur Rechten die damit in der Aufgabe verbundene. Solchergestalt fahre man fort, bis zuletzt zur Rechten eine Zahl kommt, die mit der gesuchten Zahl von einerley Art ist.

Diese Regel läßt sich ohne alle Schwierigkeit in der Kaufmännischen Rechenkunst anwenden, vornemlich bey Wechsel-Reductionen, Gewinn- und Verlust-Rechnung, Arbitragen und Commissionen, sobald man nur die unter den Kaufleuten eingeführte Sprache verstehet. Eben diese Regel wird eben so leicht bey vielen andern Rechnungsfragen angewandt, die bey den Arithmeticis unter besondern Nahmen vorkommen, so bald man von der Beschaffenheit derjenigen Gewerbe und Handthierungen hinlänglich unterrichtet ist, dahin die vorkommenden Fälle eigentlich gehören. Der Zweck dieser Schrift verstattet keine vollständige Ausführung dieser Anwendung, und die folgenden Exempel sollen nur dazu dienen, die allgemeinen Regeln einigermaßen zu erläutern.

226. §.

Hamburg sendet nach Leipzig 1000 Louisd'or, woselbst sie zu 5 rthl. ausgegeben werden. Leipzig sen-

det die Valuta zurück a 135 p. C. in Hamburger B°. Demnach frägt sich, wieviel Hamburg für diese 1000 Louisd'or in Mark B°. erhalte?

Wenn man die gegebenen Regeln des Ansatzes beobachtet, so wird die Berechnung diese seyn:

1000 Louisd'or?

9zn	1 Louisd'or	ß Thl. in Leipz.
	x ßß Thl. in L.	100 Thl. B°.
	1 Thl. B°.	ß Mark B°.

100000

div. 9)

Fac. 11111 $\frac{1}{9}$ Mark B°.

Wenn der Ducaten in Hamburg 7 Mk. 2 ßl. cour., und die lagio von B°. gegen cour. 18 $\frac{3}{4}$ p. C. ist, wieviel Thl. B°. erhält man für 723 Ducat?

Dies ist ein Exempel von der Art, da unter den gegebenen Zahlen Brüche vorkommen, und diese schaft man vor der Rechnung am bequemsten weg, indem man setzet:

1 Duc. giebt 7 $\frac{1}{8}$ Mk. cour.
also 8 Duc. — 57 Mk. cour.
Ferner 100 Mk. B°. geben 118 $\frac{3}{4}$ Mk. cour.
also 400 Mk. B°. geben 475 Mk. cour.

Nun folgt die Berechnung.

723 Ducat?

	8 Ducat	ß n Mk. cour.
ßß	ßn ß Mk. cour.	ßßß Mk. B°.
	ß Mk. Bo.	1 Thl. B°.

723
2

Fac. 1446 Thl. B°.

Wenn

Wenn die Ducaten in Hamburg a 2 Thl. B°. gerechnet $\frac{1}{4}$ p. C. besser, als B°. sind, und der Louisd'or 10 Mk. 13 $\frac{1}{2}$ ßl. B° gilt, wieviel p. C. differiren die Ducaten zu 2 $\frac{3}{4}$ Thl. leicht Geld gerechnet, von dem Louisd'or zu 5 rthl. l. G.

11 Thl. in Duc. a 2 $\frac{3}{4}$ thl.
℔ ℥ ℥ Duc a 2 thl. B.
1 Thl. B°.
347 ßl. B°.
1 Ld'or.

347
3817

x ℥ ℥ thl. in Duc a 2 $\frac{3}{4}$ thl?
4 Duc.
401 Thl. B°.
48 ßl. B°.
℔ Ld'or.
5 Thl. l. G.

1604
48
12832
6416
76992
5
384960 | 3817 | 3260 | 3817

Fc. 100 $\frac{3}{3}\frac{2}{8}\frac{6}{1}\frac{0}{7}$ thl. in Ld'or. p. 100 thl. Duc.

Der Bruch $\frac{3}{3}\frac{2}{8}\frac{6}{1}\frac{0}{7}$ läßt sich nicht durch kleinere Zahlen ausdrücken, er würde fast 41 ßl. geben. Aber bey den Wechsel-Rechnungen ist man nicht gewohnt, dergleichen Brüche beyzubehalten. Man rechnet etwa nur $\frac{1}{2}$, 4tel, 8tel, und 16tel, auch wohl zuweilen 3tel, 6tel, 12tel. Wenn demnach dergleichen Brüche, die sich nicht kleiner ausdrücken lassen, herauskommen; so nimmt man unter solchen Brüchen, welche einen der gedachten Nenner haben, einen

heraus, der dem gegebenen am nächsten kommt. So kann man im gegenwärtigen Exempel $\frac{7}{8}$ statt des gefundenen Bruchs nehmen.

227. §.

Wer genau berechnen will, wieviel er beym Wechselhandel von einem Ort zum andern eigentlich gewonnen, oder verlohren habe, muß die Handlungskosten, oder sogenannte Spesen mit in Anschlag bringen. Der Accord z. E. geschieht gemeiniglich durch Mäkler, die für ihre Mühe insgemein 1 p. Mille bekommen, und diese Belohnung wird Courtagio genannt. Die Belohnung, welche ein Kaufmann dem andern für seine Mühe giebt, heist die **Provision**, und es hängt vom Accord ab, wieviel p. C. bezahlt werden soll. Dergleichen Kosten proportioniren sich nach der Summe des Wechsels, und können als Glieder nach der Kettenregel mit berechnet werden. Es giebt andre Kosten, als Briefporto, und dergleichen, die für sich abgezogen werden müsten. Allein, weil dies Kleinigkeiten sind, die bey grossen Handlungen nicht sonderlich geachtet werden; so pflegen die Kaufleute gemeiniglich alle kleine Spesen ohne Unterscheid zusammen zu nehmen, und davor ohne Unterscheid $\frac{1}{2}$, 1, oder mehr p. C. nach Beschaffenheit der Sache zu berechnen.

228. §.

Sollen aber diese Spesen in Rechnung gebracht werden: so ist zu merken, daß sie einmahl das, was man beym Wechsel-Handel weggiebt, vermehren: auch in andern Fällen, das, was man einnimmt, vermindern. Ferner werden sie bald in 100, bald auf

100 berechnet, welches in jedem besondern Fall die Umstände ergeben, nachdem man nemlich wegen der Spesen entweder 99 statt 100 rthl., oder 101 statt 100 rthl. berechnen muß. Wer z. E. 1000 Ld'or a 5 thl. kauft, und dabey 1 p. C. Unkosten hat, der hat eigentlich auf jede 100 Thlr. 1 thl. Unkosten, und dies vermehrt seine Ausgabe. Wenn aber jemand 1000 Ld'or verwechselt, und ihm wird 1 p. C. wegen Spesen abgezogen, so erhält er für jedes 100 nur 99 Thl. Wer nun in jedem Fall die Natur der Rechnungsfrage überlegt, wird es im Ansatz nicht versehen.

Man nehme an, Hamburg läßt in Leipzig 1000 Louisd'or a 5 thl. kaufen, und bekommt die valute a 135 p. C. in B°. Wenn nun wegen Spesen in Leipzig 1 p. C. berechnet wird; so frägt sich, wie hoch solche Louisd'or dem Hamburger in Mk. B°. zu stehen kommen? Die Berechnung stehet so:

1000 Louisd'or?

1 Louisd'or	5 Thl. in Leipzig
xØØ Thl. in Leipz.	101 Thl. wegen Spesen
xß5 Thl. in Leipz.	1ØØ Thl. B°.
9 1 Thl. B°.	3 Mk. B°.

101000

9)

Fac. $11222\frac{2}{9}$ Mk. B°.

Man setze nun, Hamburg sendet nach Leipzig 1000 Louisd'or, läßt sie daselbst a 5 thl. verkaufen, und die valute a 135 p. C. remittiren. Wenn überdem wegen Spesen in Hamburg 1 p. C. auf 100, und in Leipzig gleichfalls 1 p. C. in 100 berechnet wird: so frägt sichs, wieviel Hamburg für die 1000 Ld'or in

Mk. B°. erlanget? Die Rechnung wird so geführet:

1 Louisd'or = 101 Thl. in Leipz.
ℵ ℵℶ Thl. in L.
ℶ ℵ℀ Thl. B°.
1 Thl. B°.

1000 Louisd'or?
ℸ Thl. in Leipzig
1℀℀ Thl. in L. p. Hamb. Spes.
100 B.
℀℀ Thl. B°. p. Leipz. Spes. 11
ℶ Mk. B°.

101

11000000 | 10891 $\frac{9}{101}$ Mk. B°.
101
101
900
101
808
920
101
909
110
101

229. §.

Wer die Gründe dieser Rechnungen wohl eingesehen hat, dem muß es ein leichtes seyn, alles dasjenige zu beurtheilen, was sonst in der Wechsel-Rechnung von der Gewinn- und Verlust-Rechnung, und von den Wechsel-Arbitragen weitläuftig ausgeführt wird. Wer in einer Münzsorte eine Summe ausgiebt, und davor eine Summe in einer andern Münze wieder erlangt, der kann wegen des veränderlichen Geld-Courses eigentlich noch nicht sagen, ob und wieviel er gewonnen, oder verlohren habe. Wenn er aber die erlangte Summe wieder aus-

ausgiebt, und eine neue Summe in der ersten Münzsorte wieder bekommt; so zeigt die Vergleichung mit der zuerst in eben der Münzsorte ausgegebenen Summe sogleich, ob und was gewonnen oder verlohren sey. Dies giebt also zwo Wechsel-Reductionsfragen, die man auch leicht aus der Regel Multiplex in eins ziehen kann.

230. §.

Wenn man bey den Wechsel-Negotien zwischen etlichen Vorschlägen eine Prüfung anstellt, welcher Vorschlag am nützlichsten sey; so heist man es arbitriren, und es ist hier soviel, als entscheiden, oder erwählen. Daher darf man bey den Arbitragen nur jeden Vorschlag, den man zu einem Wechsel-Handel haben kann, nach den gegebenen Coursen und Preisen insbesondre, und auf eben die Art, wie vorhin gelehret worden, berechnen, jedoch so, daß alle Antworten unter eine Münz-Sorte kommen: so läßt sich durch Gegeneinanderhaltung derselben wahrnehmen, bey welchem Handel der meiste Gewinst zu erwarten sey. Viele Exempel davon anzuführen verstattet die Absicht dieses Werks nicht. Zur Uebung kann man eine Menge von Exempeln in von Clausbergs dem. Rech. 915-1052 Seit. nachschlagen. Man s. auch Haasens Unterricht zur Arbitragen- oder Wechselrechnung, Franz Chr. Lorenz Karstens oben angeführte Rechenkunst, 2te Abtheil. 9ter Abschnitt.

Der XIII. Abschnitt.

Von der Rabatt- oder Interusurien- und andern Reductions-Rechnungen.

231. §.

Wenn bey ausstehenden Schulden der Debitor seine Schuld, die er allererst nach einer gewissen Zeit zu zahlen schuldig ist, vor der Zahlzeit bezahlet, und wegen der frühern Zahlung etwas abkürzt; so heißt dies abgekürzte der Rabatt, in den Rechten das Interusurium. Eigentlich ist das Interusurium von einem Capital die Summe alles dessen, was durch Benutzung desselben während einer gewissen Zeit gewonnen werden kann. Sind das nur die gewöhnlichen jährlichen Zinsen zu 5 Procent; so ist die Summe von 50 thlr. das einjährige Interusurium von 1000 thlr. Capital. Weil aber diese 50 thlr. allererst nach Verlauf eines Jahres zahlbar werden, so ist ihr jetziger Werth kleiner. Von diesem wegen der frühern Zahlung verminderten Interusurium, oder dem gegenwärtigen baaren Werth desselben ist hier die Rede. Hiebey ist es nun einerley, ob man bey der Rechnung selbst den Rabatt, oder das jetzt statt des künftigen zu zahlende Capital sucht: denn wenn das eine gefunden ist, so hat man das andre auch.

232. §.

Man setzt bey dieser Rabattrechnung voraus, daß der Empfänger des Geldes mit der empfangenen Summe die gewöhnlichen Zinsen gewinnen könne; als-

alsdenn ist diese Interusurien-Rechnung nur eine umgekehrte Zinsenrechnung. (202. §.) Wenn aus 100 thlr. in 1 Jahr 105 thlr. werden; so sind 105 nach Verlauf eines Jahres fällige Thaler jetzt 100 thlr. werth. Will man also den gegenwärtigen Werth einer nach Verlauf eines Jahres zahlbaren Summe von 1000 thlr. wissen; so setzt man nach der Regel Detri 105 thlr. sind 1 Jahr früher 100 thlr. — 1000 thlr.? oder 21 thlr. = = 20 thlr. — 1000 thlr.? Die Rechnung giebt $\frac{20000}{21}$ thl. $= 952\frac{8}{21}$ thl. und dieses baare Capital von der nach Verlauf eines Jahres zahlbaren Summe der 1000 thlr. abgezogen giebt den Rabatt $= 47\frac{3}{21}$ thl. Unmittelbar würde man den Rabatt finden, wenn man ansetzte

105 thl. vor 1 Jahr 100 — 50 thlr.?

21 20

Fac. $\frac{20}{1} \cdot 50 = 47\frac{3}{21}$ thlr.

Die Probe von der Richtigkeit der Rechnung kann man dadurch machen, daß man umgekehrt zu dem gefundenen Capital $952\frac{8}{21}$ thl. die einjährigen Zinsen sucht: denn diese müssen dem Rabatt gleich seyn. Man würde demnach schliessen:

100 thl. geben 5 thl. Zins, was $952\frac{8}{21}$ thl.?

Die Antwort ist $47\frac{3}{21}$ thl., welches der gefundene Rabatt war. Auch kann man ansetzen

100 thlr. — nach 1 Jahr 105 thlr. — $952\frac{8}{21}$ thlr.? Fac. 1000 thlr.

oder anstatt dessen 100 — nach 1 J. 105 — $47\frac{3}{21}$ thl.?

Fac. $\frac{20}{1} \cdot 47\frac{3}{21} = 50$ thlr.

233. §.

Wenn die baare Bezahlung früher, als ein Jahr vorher erfolgt, so kann man wenigstens voraussetzen, daß der Empfänger des Geldes mit der baar erhal-

tenen Summe während eines jeden folgenden Jahres die gewöhnliche oder verabredete Zinsensumme gewinnen werde. Man nehme also an, aus 100 thlr. werden nach zweyen Jahren 110, nach 3 Jahren 115 rthl. und so überhaupt nach n Jahren $(100+5n)$ thlr., oder noch allgemeiner $(100+nd)$ thlr., wenn d den Anwachs oder die Zinse eines Jahres von 100 bedeutet.

Daraus schließt man leicht folgende allgemeine Regel:

Man suche die Zinse, welche 100 Thlr. in der gegebenen Zeit tragen, d. i. nd, und schliesse nach der Regel Detri: wie die um ihre Zinse vermehrten 100 rthl., d. i. $(100+nd)$ thl. zu 100 thl., so das künftig zu zahlende Capital S, zu der jetzt baar zu zahlenden Summe. (204. §.) Ist nun jemand nach 2 Jahreu 1000 thl. zu zahlen schuldig, er will mit 5 p. C. Rabatt sogleich zahlen, und man frägt, wie viel er zahlen müsse: so giebt die Rechnung

$$110 \text{ thl.} : 100 \text{ thl.} = 1000 \text{ thl} : 909\tfrac{1}{11} \text{ thl.}$$

also der Rabatt $90\tfrac{10}{11}$ thl.

Kauft jemand eine Obligation von 1500 fl., so erst nach 6 Monath fällig, und soll 6 p. C. p. anno rabattiren: so wird hier $d=6$, $nd=3$, weil $n=\tfrac{1}{2}$. Also giebt die Rechnung:

$$103 \text{ fl} : 100 \text{ fl.} = 1500 \text{ fl} : 1456\tfrac{32}{103} \text{ fl.}$$

Also ist der Rabatt $43\tfrac{71}{103}$ fl.

Die Probe von der Richtigkeit der Rechnung kann man auf eben die Art, wie vorhin, machen, wenn man umgekehrt berechnet, wie viel an Capital und Zins herauskomme, wenn das gefundene baare Capital auf eben so viele Zeit, gegen eben die Zins p.

anno

nno ausgeliehen worden. Dies Resultat muß mit em künftig zu zahlenden Capital übereinkommen.

234. §.

Der Hr. von Leibnitz nennt diese Berechnung es Interusurii die Anticipations-Rechnung: man könnte sie allgemeiner die Reductions-Rechnung reductionem fortis) nennen, weil hier ein Capital uf ein andres wegen Verschiedenheit der Zahlungs- eit reducirt wird. Jetzt braucht man am gewöhnichsten den Nahmen Disconto-Rechnung, und die Redensart: ein Capital auf 1 oder mehr Jahre urück discontiren, will soviel sagen, man soll den gegenwärtigen baaren Werth eines Capitals suchen, das nach Verlauf eines oder mehrerer Jahre allererst ahlbar seyn würde. Für jetzt ist noch von der einfachen Disconto-Rechnung die Rede, die man von der zusammengesetzten Discontorechnung unterscheiden muß. Der folgende Abschnitt wird von der letztern weitern Unterricht geben.

235. §.

Man kann noch andre Arten von Rechnungsfragen, deren Auflösung auf ähnlichen Gründen beruhet, hieher ziehen, da sie sonst unter mancherley andern Nahmen von den Arithmeticis abgehandelt werden.

So kann man verschiedene Capitalien, die auf verschiedene Zeiten verliehen sind, auf ein andres Capital reduciren, das in einem Jahr eben so viel Zins giebt, als die vorigen in den verschiedenen Zeiten zusammen, da sich dann der gesammte Zins leicht berechnen läßt.

Frägt man z. E. wieviel der sämmtliche Zins von 200 fl. auf 3 Jahr, von 600 fl. auf 4 Jahr, von

800

800 fl. auf 5 Jahr, und von 1000 fl. auf 6 Jah
a 6 p. C. p. A. betrage: so schließt man

200 a 3 J.	geben	3 × 200 d. i. 600 fl. a 1 J.
600 a 4 J.	so viel	4 × 600 d. i. 2400 fl. a 1 J.
800 a 5 J.	Zins	5 × 800 d. i. 4000 fl. a 1 J.
1000 a 6 J.	als	6 × 1000 d. i. 6000 fl. a 1 J.

Also ist der gesamte Zins so viel,
als 13000 fl. a 1 J. geben.
Nun hat man nach der einfachen Regel Detri
100 fl. Cap. — 6 fl. Zins — 13000 fl. Cap.?
Fac. 780 fl. Zins.

236. §.

So reducirt man auch Capitalien, die gegen verschiedene Zinsen auf gleiche Zeit verliehen sind auf ein Capital, welches auf eben die Zeit, eine gewisse von den vorigen unterschiedene Zinse geben müßte, wenn sie allen vorigen zusammen gleich seyn sollte.

Ist z. E. die Frage: wie viel ist der gesammte Zins eines Jahrs von 500 fl. a 3 p. C. von 650 fl. a 4 p. C. von 800 fl. a 4½ p. C. von 1000 fl. a 5 p. C. und von 1400 fl. a 6 p. C. so kann man schliessen

500 a 3 p. C.	geben	3 × 500 d. i. 1500 fl. a 1 p. C.
650 a 4 p. C.	eben	4 × 650 d. i. 2600 fl. a 1 p. C.
800 a 4½ p. C.	so viel	4½ × 800 d. i. 3600 fl. a 1 p. C.
1000 a 5 p. C.	Zins	5 × 1000 d. i. 5000 fl. a 1 p. C.
1400 a 6 p. C.	als	6 × 1400 d. i. 8400 fl. a 1 p. C.

Also ist der gesammte Zins so viel,
als 21100 fl. a 1 p. C.
jährlichen Zins geben, und er beträgt 211 fl.

Wären die Capitalien auch auf ungleiche Zeit verliehen: so könnte die Reduction dennoch auf ähnliche Art geschehen z. E.

Wie

Wie viel ist der sämtliche Zins von 400 fl. auf 6 Monath a 5 p. C. von 560 fl. auf 8 Monath a $4\frac{1}{2}$ p. C., von 1000 fl. auf 9 Monath a 4 p. C., und von 1300 fl. auf 11 Monath a 6 p. C.

Man reducire so:

400 fl. auf 6 M. a 5 p. C. geben so viel Zins als
$400 \times 6 \times 5 = 12000$ auf 1 M. a 1 p. C.
560 auf 8 Mon. a $4\frac{1}{2}$ p. C. geben so viel Zins, als
$560 \times 8 \times 4\frac{1}{2} = 20160$ auf 1 M. a 1 p. C.
1000 auf 9 M. a 4 p. C. geben so viel Zins, als
$1000 \times 9 \times 4 = 36000$ auf 1 M. a 1 p. C.
1300 auf 11 M. a 6 p. C. geben so viel Zins, als
$1300 \times 11 \times 6 = 85800$ auf 1 M. a 1 p. C.

Also ist der sämtliche Zins so viel,
als 153960 fl. auf 1 M. a 1 p. C. geben.

Nun schließt man weiter.

100 fl. geben 1 Thl. wie viel 153960
auf 1 J. auf $\frac{1}{12}$ J.
so ist die Antwort $\frac{153960}{1200} = 128\frac{3}{10}$ fl.

237. §.

Unter dem Nahmen der Zeitrechnung (reductio-nis terminorum), lehren die practischen Schriftsteller, wenn etwas zu verschiedenen Zeiten zu leisten ist, wie man diejenige Zeit finden soll, in welcher das zu leistende auf einmahl geschehen kann. Gewöhnlich wird die Anwendung auf Schulden gemacht, die zu verschiedenen Zeiten zu bezahlen sind, und dahin würde folgende Frage gehören.

Einer ist dem andern 100 fl. nach 2 Jahren, und 100 fl. nach 4 Jahren beyde mit einerley p. C. Interesse zu zahlen schuldig, man frägt, zu welcher Zeit

beyde

beyde Capitalien zugleich können bezahlt werden, damit der Zins eben so viel betrage, als der sämtliche Zins, den jedes Capital zu seiner Zeit bezahlen würde. Man sage:

100 fl. auf 2 J. 100 fl. auf 4 J.	tragen eben so viel Zins	als 200 fl. auf 1 J. als 400 fl. auf 1 J.
200		600

Beyde Capitalien zusammen tragen also in ihren zugehörigen Zeiten so viel Zins, als 600 in 1 Jahr. Demnach muß man nun zu dem Capital der 200 fl. eine Zeit suchen, in welcher der Zins davon so viel beträgt, als von 600 fl. in einem Jahre, und also giebt die Rechnung nach dem 206. §. R.

Was 2ø fl.? — 1 Jahr — 6ø fl.
Fac. 3 Jahr.

Wenn man die gegebenen Capitalien allemahl auf solche reducirt, die in einem Jahr so viel Zins tragen, als die gegebenen in den gegebenen Zeiten: so folgt hieraus die Regel: Daß man die Summe der reducirten Pöste durch die Summe der gegebenen Pöste jedesmahl dividiren könne, um die verlangte Zeit zu erhalten.

Das vorgeschriebene Verfahren dienet dazu, die Rechnung kurz und mit Vortheil zu führen. Sonst kann man auch gleich anfangs den Zins suchen, den jedes Capital in seiner Zeit trägt, und hieraus die Zeit, in welcher die Summe der Capitalien einen so grossen Zins trägt, als die Summe jener Zinsen ist. Demnach würde man das vorige Exempel so rechnen:

1 J. giebt 5 fl. Wieviel 2 J.? Antw. 10 fl.
1 J. giebt 5 fl. Wieviel 4 J.? Antw. 20 fl.

Summe 30 fl.

0 fl. geben ein Jahr. Wieviel 30 fl. Fac. 3 Jahre wie vorhin.

Der XIV. Abschnitt.

Vom Zins auf Zins, und der zusammengesetzten Interusurien-Rechnung.

238. §.

Ein Capital, welches auf landübliche Zinsen a 5 p. C. verliehen ist, wächst in Arithmetischer Progretzion, wenn für jedes Jahr die Zinsen zwar dazu gerechnet werden, aber ohne von den jetzt fälligen Zinsen nach einem Jahr wieder Zinsen zu rechnen.

Nach 1 Jahr	wird aus 100	100 + 5
2 Jahr	= = =	100 + 10
3 Jahr	= = =	100 + 15
n Jahre	= = =	100 + *n* × 5.

Wenn überhaupt das Capital = S, die einjährige Zinse = *u* gesetzt wird: so wird S + *nu* aus S nach *n* Jahren. Allein wenn jemand die am Ende eines jeden Jahres einkommenden Zinsen sogleich wieder zinsbar ausliehe, oder sonst zum eben so viel p. C. zins-tragenden Capital schlüge; so würde das Capital weit schneller wachsen. In den Rechten wird dieser Anwachs des Capitals, der durch die Zinsen

von

von Zinsen zu Wege gebracht wird, der Anatocismus genannt.

239. §.

Es ist festgesetzt, daß u die einjährige Zinse von 100 seyn soll, und ein andres Capital S ist gegeben: man soll finden, zu welcher Summe dieses Capital nach Verlauf einer gegebenen Anzahl von Jahren hinansteigen werde, wenn am Ende eines jeden Jahres die Zinsen mit zum zinstragenden Capital geschlagen werden.

Aufl. Vermöge des 202. §. setzt man für das erste Jahr an $100 : 100 + u = S$: gesuchten Summe nach 1 Jahre. Wenn also die Zahl $\frac{100+u}{100} = k$ gesetzt wird, so ist die gesuchte Summe nach 1 Jahre $= kS$. Weil nun diese ganze Summe während des zweyten Jahres wegen der hinzu kommenden Zinse in eben dem Verhältnisse wächst, auch für jedes folgende Jahr dasselbe Gesetz bleibt; so wächst das Capital in geometrischer Progreßion, wovon k der Exponent ist. Setzt man also das gesuchte Capital $= z$, die gegebene Anzahl Jahre $= n$, so wird $z = k^n . S$ gefunden.

240. §.

Wenn man $S = 1$ setzt, so hat man $z = k^n$. Demnach kann man die Werthe k^2, k^3, k^4, u. s. f. ein für allemahl berechnen, und in eine Tabelle bringen, so weiß man wie die für Eins angenommene Summe, etwa 1 rthlr., durch den Anatocismus von Jahr zu Jahr anwächst. Hiernächst

kann

ann für jede Anzahl Thaler, oder für jedes Capital
s der gesuchte Werth z sehr leicht gefunden werden.
Eine solche Tabelle berechnet man am vortheilhafte-
ten in Decimaltheilen. Sollen 5 p. Cent Zinsen
gerechnet werden, so ist $k = 1,05$, und man findet

$k^2 = 1,1025$
$k^3 = 1,157625$
$k^4 = 1,21550625$
$k^5 = 1,2762815625$
$k^6 = 1,3400956406$
$k^7 = 1,4071004227$
$k^8 = 1,4774554438$
$k^9 = 1,5513282160$
$k^{10} = 1,6288946268.$

Aus 1000000 thlr. werden also in 6 Jahren
1340095,6406 thlr. Setzt man dagegen 4 p. C.
Zinsen zum Grunde, so giebt die Rechnung

$k = 1,04$
$k^2 = 1,0816$
$k^3 = 1,124864$
$k^4 = 1,16985856$
$k^5 = 1,2166529024$
$k^6 = 1,2653190185$
$k^7 = 1,3159317792$
$k^8 = 1,3685690504$
$k^9 = 1,4233118124$
$k^{10} = 1,4802442849$

Uebrigens bemerkt man leicht von selbst, wenn u
die halbjährige oder monathliche Zinse von 100 wä-
re, daß man eben so von halben zu halben Jahren,
oder auch von Monath zu Monath fortrechnen könne.

241. §.

Ein Capital ist nach einer gewissen Anzahl von Jahren allererst fällig, es soll jezt mit Abzug des *Interüsurii* bezahlt werden, vorausgesezt, daß der Empfänger mit diesem Capital Zinsen auf Zinsen gewinnen könne: man soll den gegenwärtigen baaren Werth dieses Capitals finden.

Aufl. Es sey Z das nach n Jahren fällige Capital: so wird ein Capital S gesucht, das, wenn es Zinsen von Zinsen trägt, nach n Jahren $= Z$ ist. Man erhält also aus dem 239. §. $Z = k^n S$, und daraus folgt $S = \frac{1}{k^n} . Z$. Weil nun $k = \frac{100+u}{100}$ war, so ist $\frac{1}{k} = \frac{100}{100+u}$. Diese Zahl setze man $= \lambda$, so ist $S = \lambda^n . Z$. Rückwärts gerechnet nimmt also das Capital in geometrischer Progreßion von Jahr zu Jahr ab, und der Exponent für diese Progreßion ist $\frac{1}{k} = \frac{100}{100+u}$.

242. §.

Der so gefundene gegenwärtige baare Werth des nach Verlauf mehrerer Jahre allererst zahlbaren Capitals heißt in besondern Sinn der auf eben so viele Jahre zurück discontirte Werth desselben, und die in solcher Absicht anzuwendenden Rechnungsregeln nennt man die zusammengesetzte Discontorechnung. Wenn u die halbjährige oder monathliche Zinse von 100 bezeichnet, so kann man eben so ein

Capi-

Capital auf mehrere halbe Jahre oder Monathe zurück discontiren.

Ob man übrigens die einfache oder zusammengesetzte Disconto-Rechnung anwenden müsse, das muß aus den übrigen Bedingungen der vorgelegten Aufgabe, beurtheilet werden. Weiter unten werden einige für die Ausübung merkwürdige Anwendungen davon vorkommen.

243. §.

Man setze $Z = 1$, so ist $S = \frac{1}{k^n} = \lambda^n$, und man kann wiederum die Zahlen λ^2, λ^3, λ^4, u. s. f. ein für allemahl berechnen, um sie in eine zum Gebrauch bequeme Tabelle zu bringen. Rechnet man 5 p. C. Zinsen, so ist $\lambda = \frac{100}{105} = \frac{20}{21}$, und in Decimaltheilen

$\lambda = 0{,}9523809524$
$\lambda^2 = 0{,}9070294785$
$\lambda^3 = 0{,}8638375985$
$\lambda^4 = 0{,}8227024748$
$\lambda^5 = 0{,}7835261665$
$\lambda^6 = 0{,}7462153966$
$\lambda^7 = 0{,}7106813301$
$\lambda^8 = 0{,}6768393620$
$\lambda^9 = 0{,}6446089162$
$\lambda^{10} = 0{,}6139132535.$

Ein nach 6 Jahren allererst fälliges Capital von 10000 thlr. hat also den baaren Werth von 7462,15 thlr.

Will man nur 4 p. Cent Zinsen rechnen, so ist $\lambda = \frac{100}{104} = \frac{25}{26}$, und in Decimaltheilen

$\lambda = 0{,}9615384615$
$\lambda^2 = 0{,}9245562130$
$\lambda^3 = 0{,}8889963587$
$\lambda^4 = 0{,}8548041910$
$\lambda^5 = 0{,}8219271068$
$\lambda^6 = 0{,}7903145257$
$\lambda^7 = 0{,}7599178132$
$\lambda^8 = 0{,}7306902050$
$\lambda^9 = 0{,}7025867356$
$\lambda^{10} = 0{,}6755641688.$

Nach dem Zinsenfuß von 4 p. C. ist also der auf 6 Jahre zurück discontirte Werth eines Capitals von 10000 thlr. wie auch von selbst einleuchtet grösser, als bey dem höhern Zinsenfuß von 5 p. Cent, er beträgt 7903,14 thlr.

Wegen der ehemaligen blos juristischen Streitigkeit darüber, ob man auch bey der Berechnung des Interusurii voraussetzen dürfe, daß der Empfänger des Geldes Zinsen und Zinsens-Zinsen gewinnen könne, weil die Gesetze den Anatocismum verbieten, vergleiche man eine von H. Hofr. Kästner zu Leipzig im Jahr 1747 herausgegebene Einladungsschrift: Pro justitia calculi interusurii Leibnitiani disputat simulque praelectiones indicit A. G. Kaestner.

Der XV. Abschnitt.

Von der Gesellschafts = Vermischungs- und Alligations = Rechnung.

244. §.

Die Gesellschafts = Rechnung, welche von der Vermischungs = Rechnung nur in Ansehung der Rechnungsfragen, worauf man die Anwendung macht, unterschieden ist, lehrt eine gegebene Summe in eine verlangte Anzahl Theile so zu theilen, daß diese Theile ein gegebenes Verhältniß gegen einander haben. Das im 205. §. gegebene Exempel gehört zur Gesellschafts-Rechnung: folgendes würde zur Vermischungs-Rechnung gehören. Wenn bey Verfertigung des Schiespulvers auf 1 Pfund Salpeter, 3 Unzen Kohlen, und 2 Unzen Schwefel gerechnet werden müssen, und man will 1000 Pfund Schießpulver machen, wie viel Salpeter, Kohlen und Schwefel wird dazu erfodert?

Da auf 1 Pf. 16 Unzen gehen: so ist das Verhältniß der drey Materialien durch die Zahlen 16, 3, 2 gegeben, und ihre Summe ist 21. Also schließt man nach dem 205. §.

21 : 16 = 1000 Pf. : $\frac{1}{2}\frac{6}{1}$ 1000 = 761 $\frac{1}{2}\frac{9}{1}$ Pf. Salp.
21 : 3 = 1000 Pf. : $\frac{1}{7}$ 1000 = 142 $\frac{6}{7}$ Pf. Kohl.
21 : 2 = 1000 Pf. : $\frac{2}{2}\frac{}{1}$ 1000 = 95 $\frac{5}{2}\frac{}{1}$ Pf. Schw.

Summe 1000 Pf.

245.

245. §.

Wenn das Verhältniß der Theile durch Brüche gegeben ist, und die Summe dieser Brüche grade 1 ausmacht; so darf man nur das gegebene Ganze in jeden Bruch multipliciren, um die verlangten Theile zu erhalten. Hätte jemand in seinem Testament dem A $\frac{5}{8}$, dem B $\frac{2}{8}$, dem C $\frac{1}{8}$ seiner Capitalien vermacht, und die Summe der Capitalien wäre 8000 thlr.: so würde A 5000, B 2000, und C 1000 thlr. haben müssen.

Wenn aber die Summe der Brüche nicht grade 1 ausmacht; so ist der Sinn der Rechnungsfrage nicht, daß jeder gesuchte Theil grade so viel vom Ganzen betragen solle, als jeder der Brüche anzeigt. Vielmehr zeigen die Brüche nur das Verhältniß der Theile gegen einander an, und jeder Theil muß sich zum Ganzen verhalten, wie jeder Bruch zur Summe der Brüche.

Lautete ein Testament so: A, B, C sollen sich in meinen Capitalien auf die Art theilen, daß A $\frac{1}{2}$, B $\frac{1}{3}$, C $\frac{1}{4}$ bekommt, und es wären 6000 rthl. vorhanden: so wäre

$\frac{1}{2}$ 6000 = 3000
$\frac{1}{3}$ 6000 = 2000
$\frac{1}{4}$ 6000 = 1500

und die Summe 6500 rthl.

daß man also bey dieser Theilung um 500 Rthl. zu kurz käme. Verfährt man aber nach der Regel des 205 §., und addirt zuerst die Brüche: so giebt die Rechnung

	12
$\frac{1}{2}$	6
$\frac{1}{3}$	4
$\frac{1}{4}$	3
Summe	$\frac{13}{12}$

2) 2 3 4

1 3 2

Gem. Nenn. $2 \times 3 \times 2 = 12$.

Nun ist das Ganze $\frac{13}{12}$, die Theile $\frac{6}{12}$, $\frac{4}{12}$, $\frac{3}{12}$, und da sich diese Brüche wie ihre Zähler verhalten; so braucht man ihre Nenner nicht weiter: also giebt die fernere Rechnung.

$$13 : 6 = 6000 : \frac{6 \times 6000}{13} = 2769\frac{3}{13} \text{ thl.}$$

$$13 : 4 = 6000 : \frac{4 \times 6000}{13} = 1846\frac{2}{13} \text{ thl.}$$

$$13 : 3 = 6000 : \frac{3 \times 6000}{13} = 1384\frac{8}{13} \text{ thl.}$$

Summe 6000 rthl.

Es hat also eigentlich $A_{\frac{6}{13}}$, $B_{\frac{4}{13}}$, und $C_{\frac{3}{13}}$ von der Verlassenschaft zu fordern.

246. §.

Man kann die hieher gehörigen Rechnungsfragen so einkleiden, daß eigentlich nicht die Grösse der Theile selbst, sondern nur ihr Verhältniß zum Ganzen durch einen Bruch auszudrücken ist, der ein für allemahl die Richtschnur bleibt, wonach die Theilung, wenn sonst keine Aenderung vorgeht, zu machen ist. Wenn mehr Personen in Handlungs-Gesellschaft treten, und verschiedene Capitalien einlegen; so pfleget man zu fragen, wie viel Part ein jeder an dem Gewinst, oder Verlust habe. Die Antwort hat keine Schwierigkeit.

Man sucht das gemeine größte Maaß der Zahlen, welche die eingelegten Summen ausdrücken, dividirt diese Zahlen damit, und bringt die Quotienten in eine Summe: so ist die Summe der gemeine Nenner aller gesuchten Brüche, und die Quotienten sind ihre Zähler. Diese Brüche drückt man alsdenn, wenn es angehet, noch weiter durch ihre kleinsten Zahlen aus. Man darf nur die Berechnung des folgenden Exempels überdenken: so fällt der Grund dieses Verfahrens leicht in die Augen.

Sechs Rheders haben ein Schiff, dazu gab A 4800, B 6400, C 10000, D 6400, E 2400, F 2000 Mark. Die Frage ist, den wievielsten Part jeder an diesem Schiffe habe? Man rechnet so:

		4
A	48øø	12
B	64øø	16
C	100øø	25
D	64øø	16
E	24øø	6
F	20øø	5
Summe		80

Also hat A $\frac{12}{80} = \frac{3}{20}$ Part
B $\frac{16}{80} = \frac{1}{5}$
C $\frac{25}{80} = \frac{5}{16}$
D $\frac{16}{80} = \frac{1}{5}$
E $\frac{6}{80} = \frac{3}{40}$
F $\frac{5}{80} = \frac{1}{16}$

Wenn nun ein Gewinst oder Verlust unter diese Personen zu vertheilen ist; so darf die ganze Summe nur für jeden mit dem Bruch, der seinen Part ausdrückt, multiplicirt werden.

247. §.

Die Kaufleute pflegen gerne nach p. C. zu rechnen, und man kann der Rechnung leicht die Wendung geben, daß man zuerst die Antwort auf die Frage erhält:

Wie:

Wieviel p. C. überhaupt gewonnen, oder verlohren sind. Die Frage ist denn eigentlich diese, welche Summe man auf jedes eingelegte 100 gewonnen, oder verlohren habe.

Wenn A 2400, B 1700, und C 1350 Rthlr. zusammen gebracht hätten, und es wären in allen 7563 rthl. eingenommen; so rechnet man auf die Art

A 2400		
B 1700	ganze Einnahme	7563 thl.
C 1350	ganzer Einsatz	5450 thl.
Summe des 5450	Gewinst	2113 thl.

Einsatzes

Nun giebt die Regel Detri

5450 — 2113 was 100?

Fac. $38\frac{84}{109}$.

Also ist der Gewinst $38\frac{84}{109}$ p. C.,

und es bekommt A $24 \times 38\frac{84}{109}$

B $17 \times 38\frac{84}{109}$

C $13\frac{1}{2} \times 38\frac{84}{109}$

Man kann die Frage auch in dem Sinn nehmen: welche Summe man für jedes eingelegte 100 zurück bekomme? Dann würde man das letzte Exempel so berechnen müssen

5450 — 7563. Was 100?

Fac. $138\frac{84}{109}$.

Beydes läuft auf eins hinaus, denn die vorige Rechnung setzt voraus, daß ein jeder sein eingelegtes Capital schon vor der Vertheilung des eigentlichen Gewinstes, zurück bekommen habe. Ist nichts gewonnen; sondern vielmehr verlohren worden: so ist die

letzte Berechnung kürzer als die erste, weil man sonst den berechneten proportionirlichen Verlust erstlich von eines jeden Einsatz subtrahiren muß, bevor es sich ergiebt, wie viel er zurück fordern kann.

248. §.

Wenn ihrer mehrere ein Schiff mit Waaren befrachtet haben, und man ist genöthigt gewesen, wegen der Gefahr des Unterganges das Schiff zu lichten, und Waaren über Bord zu werfen: so verordnen die Gesetze, daß diejenigen, deren Waaren dadurch sind erhalten, und im Hafen glücklich eingebracht worden, denjenigen, oder diejenigen schadlos halten sollen, welche ihre Waaren, um das Schiff zu erhalten, Preis gegeben haben. Die gemeinschaftliche Bezahlung an diejenigen, welche den Verlust erlitten haben, heist die Haverey, oder das Werp-Geld, wie es die Holländer nennen. Beträgt nun der Werth der Waare der Kaufleute

A 2000 thl.
B 4000 thl.
C 6400 thl.
D 4600 thl.
E 3000 thl.

Sum. 20000 thl.

und es sind die den Kaufleuten D und E zugehörige Waaren verlohren gegangen; so ist die Frage, wie viel jeder von A, B, C zur Ersetzung dieses Schadens beytragen müsse, und wie viel D so wohl als E für sich zu empfangen haben?

Man berechne erst, wie viel p. C. überhaupt verlohren gegangen sind, oder, welches auf eins hinaus läuft, um wie viel jedes 100 durch den Verlust vermindert sey. Also schliesse man:

20000 — 12400 — 100?

Also behält

A 20 × 62 = 1240	und verliert		760
B 40 × 62 = 2480	=	=	1520
C 64 × 62 = 3968	=	=	2432
D 46 × 62 = 2852			
E 30 × 62 = 1860		Summe	4712 thl.
Summe 12400 thl.			

D und E bekommen zusammen 4712 thl., und das war die Summe des Verlustes von A, B, und C.

249. §.

Von der Vermischungs-Rechnung ist die Alligations-Rechnung noch darin verschieden, daß bey jener das Verhältniß der gesuchten Theile des Ganzen gegen einander schon gegeben ist, und bey dieser erstlich gesucht werden muß, bevor man die Theile selbst finden kann. Die Gegenstände der Alligations-Rechnung sind nemlich solche Dinge, die für sich verschiedene Werthe haben, mit einander vermischt aber einen von dem vorigen verschiedenen Werth bekommen. Unter andern gehören dahin Weine von verschiedener Güte, die mit einander vermischt einen Wein von mittlerer Güte geben: verschiedene Metalle, als Silber und Kupfer, Gold und Silber, u. dgl. die mit einander zusammengeschmolzen ein Metall vom mittlern Werth geben, u. d. m. Eigentlich geht nun die Absicht der Regel Alligationis dahin, wenn die Werthe der Theile bekannt sind, und man soll ein neues Ganzes durch die Vermischung hervorbringen, das Verhältniß der Theile zu finden, wenn der Werth des Ganzen gegeben ist. Z. E.: Einer hat, zwey, drey, ja mehrerley Sorten Wein

von

von verschiedener Güte, die eine p. Aam 12 Thl., die andre p. Aam 9 Thl., er will von jeder solchen Sorte so viel zusammen auf ein Stückfaß ziehen, damit ein Wein p. Aam 10 Thl. herauskomme. Die Frage ist, wie viel Aam des einen Weins er auf ein Aam des andern rechnen müsse.

250. §.

Die Geldsumme, welche für eine solche Menge einer Waare, die man für **Eins** annimmt, gezahlt werden muß, heißt der **Preis** der Waare. Weil man nun die Menge einiger Waaren nach ihrem Gewicht, die Menge andrer nach der Grösse des Raums schätzet, den sie füllen; so verstehet man durch den Preis der Waare bald die Summe, welche für ein Pfund, oder einen Centner Waare, bald die Summe, welche für ein Kannenmaaß, Tonnenmaaß, Scheffelmaaß bezahlt werden muß.

251. §.

Der Preis zweyer oder auch mehrerer verschiedener Waaren ist gegeben, von jeder ist eine bekannte Menge mit den übrigen vermischt worden: man soll den Preis der Mischung finden.

Aufl. Die ganze aus Vermischung der Theile zuwege gebrachte Masse ist soviel werth, als die vermischten Theile zusammen. Demnach ist der Werth der ganzen Menge bekannt, und man findet nach der Regel Detri leicht den Werth desjenigen Theils davon, den man für **Eins** annimmt.

Gesetzt einer hat 6 Aam Wein, a $12\frac{1}{2}$ Thl. 8 Aam a $10\frac{3}{4}$ Thl., 11 Aam a 9 Rhl., und ziehet solchen zu-

zusammen auf ein Stück, wieviel ist nun ein Aam von dem vermischten Wein werth? Man rechne so:

6	Aam	a $12\frac{1}{2}$	thl. thun	75 thl.
8	Aam	a $10\frac{3}{4}$	thl. thun	86 thl.
11	Aam	a 9	thl. thun	99 thl.
25	Aam		thun	260 thl.

Wie viel also 1 Aam?

Antw. $\frac{260}{25} = 10\frac{2}{5}$ thl.

252. §.

Wenn der Preis einer Waare bekannt ist, so weiß man, wieviel eine jede Menge davon koste. Es wird nur erfodert, daß man den Preis der Waare mit der Zahl multiplicire, welche ihre Menge in demjenigen Maaße oder Gewicht angiebt, welches bey Bestimmung des Preises für Eins angenommen ist. Wenn umgekehrt die Geldsumme bekannt ist, welche für eine bekannte Menge der Waare gezahlt werden muß, so wird der Preis gefunden, wenn man jene Geldsumme mit der Zahl dividirt, welche die Menge der Waare in dem Maaß oder Gewicht angiebt, das man bey Bestimmung des Preises für Eins annehmen soll. Vermischt man Sorten von verschiedenen Preisen, so vermindern die schlechtern Sorten den Preis der Mischung, und bessere Sorten vergrössern ihn: also findet man für die Mischung allemahl einen Mittelpreis, wenn man die Regel des 251. §. anwendet.

253. §.

Nun sey die Frage umgekehrt diese: Ein Aam des Weins A kostet 10 Thl., und ein Aam des Weins B kostet 15 Thl., man will einen Wein M haben, davon 1 Aam 13 thl. kosten soll: wie viel muß man

von

von jeder Art des Weins A und B in die Vermischung bringen?

Jedes Aam des bessern Weins erhöhet den Preis der Mischung um 15 — 13 = 2 thlr. über den Mittelpreis von 13 thlrn.: jedes Aam des schlechtern Weins aber erniedriget den Preis der Mischung um 13 — 10 = 3 thlr. unter den Mittelpreis. Damit also die Mischung auf den Mittelpreis zu stehen komme, muß die Zahl der Aame des bessern Weins den Preis der Mischung um eben soviel über den Mittelpreis erhöhen, als die Zahl der Aame des schlechtern Weins ihn darunter erniedriget. Diesemnach könnte man ansetzen

1 Aam zu 15 thlr. giebt 2 thlr. zuviel
Mittelpreis 13 —
1 Aam zu 10 — giebt 3 thlr. zu wenig.

Aus dem letztern Satze folgt weiter

$\frac{1}{3}$ Aam zu 10 thlr. — 1 thlr. zu wenig
also
$\frac{2}{3}$ Aam zu 10 thlr. — 2 thlr. zu wenig.

Demnach erhöhet 1 Aam zu 15 thlr. den Mittelpreis um eben soviel, als er von $\frac{2}{3}$ Aam zu 10 thlr. vermindert wird: mithin muß man

1 Aam zu 15 thlr. mit $\frac{2}{3}$ Aam zu 10 thlr.
oder
3 Aam a 15 thlr. mit 2 Aam a 10 thlr.

vermischen, um die Mischung auf den Mittelpreis von 13 thlr. zu bringen.

Hieraus folgt die gemeine Regel:

Man schreibe den bessern und schlechtern Preis unter einander, und den verlangten mittlern Preis zur Linken. Zur Rechten setze man bey dem bessern Preis den Unterschied

des

des schlechtern vom mittlern, und beym schlechtern Preis den Unterschied des bessern vom mittlern; so zeigen diese Differenzen das Verhältniß der Theile an, welches man suchte. Die Berechnung würde demnach so stehen:

Verlangter Mittelpr. 13 thl.	Preis von A 10 thl.	2 Verh. der
	Preis von B 15 thl.	3 Theile.

D. i., man muß auf 2 Theile des Weins A 3 Theile des Weins B rechnen.

Allgemein läßt sich die Sache so übersehen. Es sollen x Aam des Weins zu 10 thlr. und y Aam des Weins zu 15 thl. vermischt werden; so ist der Werth der ganzen Mischung $10x + 15y$, und der Mittelpreis $= \frac{10x + 15y}{x + y}$. (251. §.) Weil nun dieser Mittelpreis 13 thl. betragen soll, so setze man $\frac{10x + 15y}{x + y} = 13$. Daraus folgt $10x + 15y = 13x + 13y$, mithin ferner $(15 - 13)y = (13 - 10)x$, und man erhält $x : y = 15 - 13 : 13 - 10$. (177. §.)

254. §.

Will man nun einen Wein von mittlerer Güte machen; so nimmt man entweder eine gewisse Menge der schlechtern oder bessern Sorte, willkührlich, und berechnet nach der Regel Detri, wie viel von der andern Sorte dazu genommen werden müsse: oder, man setzt voraus, man wolle eine gewisse Menge der mittlern Sorte machen, und berechnet nun nach der Vermischungs-Rechnung (244. §.), wie viel von jeder Sorte des bessern, und schlechtern zu rechnen sey.

Exempel der 1. Art.

Man hat 30 Aam des Weins A genommen, wieviel Aam des Weins B gehören dazu, um den Wein M zu bekommen

2 Aam von A geben 3 Aam von B, wie viel 30?

Antw. $\frac{90}{2} = 45$ Aam.

Also bekommt man in allen 75 Aam des Weins M.

Exempel der 2. Art.

Man will 75 Aam des Weins M machen, wie viel Aam von A und B gehören dazu?

zu 2 von A
gehören 3 von B

---

5 von M geben 2 von A, wie viel 75?

Antw. 30 Aam.

5 = = 3 von B wie viel 75?

Antw. 45 Aam.

Summe 75 Aam.

Die ganze Rechnung kann man nun nach der Regel des 251. §. prüfen. Man schliesse:

30 Aam	a 10 thl.	thun	300 thl.
45 Aam	a 15 thl.	thun	675 thl.
75 Aam		thun	975 thl.

Was 1 Aam?

Antw. $2\frac{7}{7}\frac{5}{5} = 13$ thl.

255. §.

Diese Allegations-Regel läßt sich auch auf solche Fälle anwenden, da man aus mehr, als zwey verschiedenen Massen eine neue durch die Vermischung verlangt, wohin das nachstehende Exempel gehören würde.

In einem Gießhause hat man von feinem Metall den Centner A zu 40, B zu 30, und C zu 24 Thl.

vor-

vorräthig. Hieraus soll ein Werk von 60 Centnern gegossen werden, welches aber (ohne Arbeitslohn) nicht höher als auf 2000 Thl. kommen soll: die Frage ist, wie viel von jedem Metall genommen werden müsse?

Man suche zuerst den Preis eines Centners der vermischten Masse, um den Werth derselben mit dem Werth der dreyen einfachen vergleichen zu können. Dieser ist $\frac{2000}{60} = 33\frac{1}{3}$ thlr.

Man suche ferner nach dem 251. §. den Preis eines Centners einer Masse, die man erhalten würde, wenn man nur zwey von den gegebenen allein, etwa B und C, in die Mischung brächte. Da es hier gleich viel ist, wie viel man von jeder Art nehmen will; so wird die Rechnung kürzer, wenn man von jeder Art gleich viel nimmt, und so ansetzt:

1 C. von B thut 30 thl.
1 C. von C thut 24 thl.

2 C. 54 thl.

Also ist 27 thlr. der Preis eines Centners des mixti aus B und C. Man nenne dies mixtum M; so ist es eben so viel, als sollte man die nachstehende Frage beantworten:

Man hat das Metall A den Centn. zu 40, und das Metall M den C. zu 27 Thl.: wie viel von jeder Art gehören zum mixto den C. zu $33\frac{1}{3}$ Thl. und dies wird im 253. §. berechnet. Diesemnach könnte die Rechnung so geführt werden

	A	40	A 40	$6\frac{1}{3}$ von A
$33\frac{1}{3}$	B	30	M 27	$6\frac{2}{3}$ von M,
	C	24		

also $3\frac{1}{3}$ von B
und $3\frac{1}{3}$ von C

weil M von B und C gleich viel enthält. Demnach ist das gesuchte Verhältniß der Theile $6\frac{2}{3}$ von A, $3\frac{1}{3}$ von B, $3\frac{1}{3}$ von C, oder 19 von A, 10 von B, 10 von C, und die Vermischungs-Regel giebt das übrige, wie die nachstehende Rechnung zeiget.

19 von A
10 von B
10 von C

39 — 19 — 60? Antw. $29\frac{3}{13}$ C. von A.
39 — 10 — 60? „ $15\frac{5}{13}$ C. von B.
also auch $15\frac{5}{13}$ C. von C.

Summe 60 C.

Die Probe von der Richtigkeit der Rechnung giebt der 251. §.

$29\frac{3}{13}$	a 40 thl.	thun	$1169\frac{3}{13}$ thl.
$15\frac{5}{13}$	a 30 „	„	$461\frac{7}{13}$ thl.
$15\frac{3}{13}$	a 24 „	„	$369\frac{3}{13}$ thl.
		Summe	2000 thl.

256. §.

Weil es ganz willkührlich war, in welchem Verhältniß man das mixtum M aus B und C machen wollte, so hätte man auch auf 2 Theile von B, 3 Theile von C rechnen, und überhaupt jedes andre Verhältniß nehmen können. Will man zu 2 Theilen von B, 3 von C nehmen, so kommt 1 Centner von M auf den Preis von $26\frac{2}{5}$ thlr. zu stehen, und die fernere Rechnung giebt folgendes:

	A	40	40	$6\frac{1}{1}\frac{4}{5}$ von A.
$33\frac{1}{3}$	B	30	$26\frac{2}{3}$	$6\frac{2}{3}$ von M.
	C	24		

Wei-

Weiter muß man $6\frac{2}{3}$ nach dem Verhältniß 2 : 3 so theilen

$5 - 2 - 6\frac{2}{3}$?

Antw. $2\frac{2}{3}$ von B
also 4 von C.

und die Theile von A, B, C, müssen sich wie die Zahlen $6\frac{4}{11}$, $1\frac{2}{3}$, 4, oder 104, 40, 60, verhalten. Hiernächst geben diese Zahlen:

$30\frac{0}{11}$ C. von A
$11\frac{3}{11}$ C. von B
$17\frac{1}{11}$ C. von C

Summe 60 Centner.

Auf Rechnungsfragen dieser Art kann man also unzählig viele verschiedene Antworten finden, die insgesammt der Sache ein Genüge thun.

257. §.

Um die Alligations-Regel auf Gold- und Silber-Rechnungen anzuwenden, dergleichen beym Münzwesen, und andern Gold- und Silber-Arbeiten vorkommen, muß man folgendes wissen. Silber mit Kupfer legiren, Gold mit Silber legiren heißt, das eine mit dem andern zusammen schmelzen: feines Gold und feines Silber ist dasjenige, womit kein Zusatz andrer Metalle vermischt ist. Aus dem 199. §. ist schon bekannt, daß man sich beym Golde und Silber des Cöllnischen Mark-Gewichts bediene, und daß 1 Mark fein Gold oder Silber 16 Loth halte. Wenn 15 Loth fein Silber mit 1 Loth Kupfer, oder 14 Loth Silber mit 2 Loth, u. s. f. legirt ist, so heißt es 15löthiges, 14löthiges Silber, u. s. f. Eine Mark 12löthiges Silber hat also 12 Loth fein, und

4 Loth Zusatz. Da beym Golde die Mark in 24 Karatt getheilt wird; so erhellet leicht, was 23 karattiges, 22 karattiges Gold u. s. f. sey, wenn es nemlich auf 23 Karatt oder 22 Karatt, 1 Karatt, oder 2 Karatt Zusatz hat, u. s. f.

258. §.

Was man **Löthigkeit** des legirten Silbers nennt, ist die Menge des feinen Silbers in jeder Mark im Lothgewicht ausgedrückt: dieser feine Gehalt ist beym Silber das, was bey einer Waare der **Preis** ist. (250. §.) Weiß man diesen feinen Gehalt, so weiß man zugleich den gesammten Gehalt einer jeden andern im Markgewicht ausgedrückten Menge von eben der Art Silber: man muß nur den feinen in Lothen ausgedrückten Gehalt mit der Zahl multiplicieren, welche die ganze Menge im Markgewicht angiebt.

Wenn ein Stück 13löthig Silber 30 Mark schwer ist; so ist der gesammte Gehalt 30 mahl 13 thut 390 Loth oder 24 Mark 6 Loth.

259. §.

Weis man umgekehrt, daß in 25 Mk. schlecht Silber $21\frac{1}{2}$ Mk. fein enthalten sind: so findet man, wie viel löthig es sey, wenn man den gesammten feinen Gehalt in Lothen ausgedrückt, also hier $21\frac{1}{2}$ mahl $16 = 344$ Loth, mit der Zahl dividirt, welche die ganze Menge im Markgewicht angiebt, also hier mit 25. Das giebt $13\frac{9}{25}$ Loth als den feinen Gehalt für jede Mark.

260. §.

Der Gehalt des 15, 14, 13löthigen Silbers läßt sich durch die Brüche $\frac{15}{16}$, $\frac{14}{16}$, $\frac{13}{16}$, u. s. f. ausdrücken, und eben so der Gehalt des Goldes durch

die

die Brüche $\frac{2}{2}\frac{3}{4}$, $\frac{2}{2}\frac{2}{4}$, $\frac{2}{2}\frac{1}{4}$, u. s. f. nachdem es 23, oder 22, oder 21 karattiges Gold ist. Im Exempel des vorigen 259. §. ist der Bruch $\frac{21\frac{1}{2}}{25}$ oder $\frac{4}{5}\frac{3}{0}$ schon der gesuchte Gehalt des Silbers, und es würde keine Rechnung weiter nöthig seyn, wenn es nicht gewöhnlich wäre, diesen Gehalt durch einen Bruch mit dem Nenner 16 auszudrücken: demnach suchet man nur einen Bruch, der eben so groß als $\frac{4}{5}\frac{3}{0}$ ist, und dessen Nenner die gegebene Zahl 16 ist.

261. §.

Die Münzmeister, auch andre Gold- und Silber-Arbeiter, nennen es den Tiegel beschicken, wenn man ein gewisses Gewicht Gold oder Silber von verlangtem Gehalt zuwege bringen soll, und die Frage ist, wie-viel von jeder Art des Silbers, oder Goldes, auch andern Metalles dazu erfordert werde. Alle hieher gehörige Rechnungen werden nach Regeln des 253, 254, und 255. §. leicht angestellet.

Einer hat $37\frac{1}{2}$ Mk. $14\frac{1}{2}$löthiges Silber, und will dasselbe mit einem andern 9löthigen Silber beschicken, damit es $12\frac{1}{2}$löthig werde. Man frägt, wie viel er zu jenen $37\frac{1}{2}$ Mk. von diesem andern Silber zusetzen müsse? Der Ansatz ist

$12\frac{1}{2}$	$14\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{2}$	7
	9	2	4

$$7 : 4 = 37\tfrac{1}{2}\text{ Mk.} : \frac{4 \times 37\frac{1}{2}\text{ Mk.}}{7}$$

also werden $21\frac{3}{7}$ Mk. Zusatz erfodert.

Probe $37\frac{1}{2}$ Mk. a $14\frac{1}{2}$ Loth fein thut $543\frac{3}{4}$ L.

$21\frac{3}{7}$ Mk. a 9 Loth fein thut $192\frac{6}{7}$

$58\frac{1}{1}\frac{3}{4}$ $736\frac{1}{2}\frac{7}{8}$

Also kommen $\frac{736\frac{1}{2}\frac{7}{8}}{58\frac{1}{1}\frac{7}{4}} = 12\frac{1}{2}$ für 1 Mk. des mixti.

262. §.

Will man mehr als zweyerley Metall von verschiedenem Gehalt mit einander vermischen; so wird die Rechnung nach der Vorschrift des 255. §. angestellt, und man weis schon, daß in allen solchen Fällen unzählig viele verschiedene Antworten herausgebracht werden können, die insgesammt der Aufgabe ein Genüge thun. Wenn demnach in solchen Fällen die Antworten auf eine, oder einige wenige eingeschränkt werden: so rührt es von besondern Ursachen her, wenn man z. E. die eine Mischung vortheilhafter brauchen kann, als die andre, von dem einen Metall mehr zur Hand hat, von dem andern weniger, n. s. f. Mehr dahin gehörige Exempel, die hier, Weitläuftigkeit zu vermeiden, nicht beygebracht werden können, findet man bey den Schriftstellern, welche die practische Rechenkunst ausführlich abhandeln, als Franz Chr. Lor. Karstens Rechenkunst, 2te Abtheil. 13. 14. Abschnitt, v. Clausbergs Dem. Rech. 1284 u. f. S. auch vergleiche man Haasens vollständigen Münzmeister und Münz-Wardein im 1sten Theil.

263. §.

Weil auch das Zinn von verschiedener Güte verarbeitet wird, so ist daher eine so genannte Zinnrechnung entstanden, darin man sich leicht findet, wenn man folgendes weiß. Das Zinn heißt 2pfündig, wenn mit 1 Pfund Bley 1 Pfund reines Zinn zusammen geschmolzen ist; eben so heißt es 3, 4, 5, 6pfündig, u. s. f. wenn mit 1 Pfunde Bley 2, 3, 4,

4, 5, 6 Pfunde reines Zinn zusammen geschmolzen sind: jedoch pflegte man nicht weiter, als bis auf 10pfündiges Zinn zu gehen, welches das so genannte Englische oder Leipziger Zinn ist.

264. §.

Der Gehalt des Zinnes kann also durch die Brüche $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{6}{7}$, $\frac{7}{8}$, $\frac{8}{9}$, $\frac{9}{10}$, ausgedrückt werden, wenn es so viel pfündig ist, als der Nenner eines solchen Bruches ausdrückt. Der Zähler ist um 1 kleiner als der Nenner, und der Zähler giebt an, wie viele Pfunde reines Zinn in einer Menge des mit Bley vermischten Zinnes enthalten ist, die so viele Pfunde wiegt, als der Nenner anzeigt. Wenn also ein Stück 7pfündiges Zinn 63 Pfund wiegt, so sind $\frac{6}{7}$. 63 oder 54 Pfund reines Zinn darin enthalten.

Umgekehrt, wenn man weiß, daß in 63 Pfund Zinn nur 54 Pfund reines Zinn enthalten sind, so weiß man zugleich, daß $63 - 54 = 9$ Pfund Bley damit vermischt sind. Will man also wissen, wievielpfündig das Zinn sey, so kann man ansetzen

Gegen 9 Pfund Bley hat man 63 Pfund vermischtes Zinn, wieviel also gegen 1 Pfund?

Die Antwort ist 7, oder das Zinn ist 7pfündig. Die gesuchte Zahl wird also in allen Fällen gefunden, wenn man das in Pfunden ausgedruckte Gewicht der ganzen Menge des mit Bley vermischten Zinnes mit dem ebenfalls in Pfunden ausgedrückten Gewicht des zugesetzten Bleyes dividirt.

265. §.

Um eine Probe davon zu geben, wie man die Alligations- und Vermischungsregel auf die Zinnrechnung anwenden kann, sey folgende Frage vorgeleget.

Es hat jemand 10pfündiges und 6pfündiges Zinn, will aber 7pfündiges haben: in welchem Verhältnisse muß er beyde vorräthige Arten vermischen?

Ansatz.

210

$\frac{9}{10}$	21	189	5	auf 5 Pfund 10pfündiges kommen
$\frac{6}{7}$) 30) 180)				
$\frac{5}{6}$	35	175	9	9 Pfund 6pfündiges.

2) 10, 7, 6

5 7 3

$2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3 = 210.$

Probe.

5 Pfund 10pfündig thun $\frac{9}{10} \cdot 5 = 4\frac{1}{2}$ Pf. rein Zinn

9 Pfund 6pfündig = $\frac{5}{6} \cdot 9 = 7\frac{1}{2}$ Pf. = =

14 Pfund der Mischung = = 12 Pf. rein Zinn

mithin 2 Pfund Bley,

und das Zinn ist $\frac{12}{14} = 7$pfündig.

266. §.

Ein mit Kupfer schon legirtes Silber kann mit mehrerm zugesetzten Kupfer auf einen noch schlechtern Gehalt herunter gebracht werden. Wenn alsdenn vorgeschrieben ist, wie der schlechtere Gehalt ausfallen soll, so giebt die Alligationsrechnung ebenfalls, in welchem Verhältnisse das Silber mit noch mehrern Kupfer legirt werden müsse, damit der verlangte Gehalt herauskomme. Man bemerke dabey nur, daß der Gehalt des reinen Kupfers = 0 sey, weil es gar kein Silber enthält.

Ge-

Gesetzt man hat 14löthiges Silber, man will aber 10löthiges durch Legirung mit mehrerm Kupfer erhalten; so ist der

Ansatz.

auf

14	10	Mark 14löthiges Silber
10)		kommen
0	4	Mark Kupfer.

Die Probe ist, weil nun 14 Mark der neuen Mischung 10mahl 14 Loth oder 140 Loth fein halten, mithin hält 1 Mark 10 Loth fein.

Hätte man 9pfündiges Zinn, und man wollte so viel Bley zusetzen, daß es 8pfündig werde, so wäre der

Ansatz.

7^2

auf

$\frac{8}{9}$	8	64 | 63 Pfund 9pfündig
$\frac{7}{8}$)	9)	63) kommt
0	0	0 | 1 Pfund Bley.

Probe.

63 Pfund 9pfündig thun $\frac{8}{9}$. 63 = 56 Pf. rein Zinn,
1 Pfund Bley = 0 Pf. =

64 Pfund der Mischung = 56 Pf. rein Zinn
mithin 8 Pfund Bley.

und das Zinn ist $\frac{6}{8}^4$ = 8pfündig.

267. §.

Ein allgemeiner Ausdruck, welcher zwey unterschiedene Zeichen einer und eben derselben Zahl vermittelst des Zeichens der Gleichheit verbindet, wie $\frac{10x + 15y}{x + y} = 13$ im 253. §. war, heißt eine

Gleichung. Weil man allemahl gleiche Resultate erhält, wenn gleiches zu gleichen addirt, oder gleiches von gleichem subtrahirt, gleiches mit gleichem multiplicirt oder dividirt wird; so erhellet, daß aus einer Gleichung sehr viele andre hergeleitet werden können, wie davon im 253. §. ebenfalls einige Proben vorkommen. Unter andern ward die Gleichung $(15-13)y=(13-10)x$ gefunden, woraus ferner $y=\frac{(13-10)x}{15-13}$ folgte. Es genüget hier, vorläufig die Möglichkeit einer solchen Veränderung der Gleichung einzusehen, daß eine oder die andre von den unbekannten Grössen, wie hier y an eine Seite des Gleichheitszeichens allein gebracht werde. Wenn alsdenn an der andern Seite keine andre als bekannte Zahlen befindlich sind, so zeigt die Gleichung unmittelbar an, wie die unbekannte Grösse aus den bekannten gefunden werden könne. Wenn hier festgesetzt ist, wie groß x seyn solle, so zeigt die Gleichung, wie man y finde.

268. §.

Gesetzt es sollte in der Gleichung des vorig. §. $x=12$ seyn, so würde man $y=18$ finden. Wenn anstatt dessen noch eine Gleichung wie $x+y=30$ aus den Bedingungen der Aufgabe folgte, so würde man eben das erhalten. Man wüste nun, daß auch $y=30-x$ seyn müste: da dann beyde gleiche Werthe von y die dritte Gleichung $30-x=\frac{3}{2}x$ geben. Aus dieser folgt $(\frac{3}{2}+1)x=30$, und $x=\frac{60}{5}=12$, wie es vorhin angenommen ward, und nun giebt auch die zweyte Gleichung $y=30-12=18$. Die im 253. §. vorgetragene Alligations-Rechnungsre-

gel

el ist nichts anders als eine Uebersetzung der Glei-
ung $y = \frac{(13-10)x}{15-13}$ in die gewöhnliche Spra-
e, Wenn vermöge der Aufgabe im 253. §. zu-
leich verlangt würde, daß man grade 30 Aam des
Beines M zu 13 thlr. durch Mischung der beyden
ndern Sorten bereiten solle; so hiesse das, es solle
$+ y = 30$ seyn. Anstatt dessen, daß man sonst
un die völlige Auflösung der Aufgabe zu finden, die
Zahl 30 nach der Vermischungsrechnung in dem
Verhältnisse 3 : 2 theilen müste, kann man also aus
beyden Gleichungen zusammen die gesuchten Zahlen
mmittelbar finden.

269. §.

Die Algebra oder höhere Rechenkunst muß
igentlich davon einen vollständigen Unterricht geben,
wie die Auflösung mathematischer Aufgaben mit Hül-
fe solcher Gleichungen gefunden werden könne: in-
dessen ist es eine sehr nützliche Vorbereitung zu den
Uebungen in algebraischen Rechnungen, wenn man
hier einige Anwendungen dieser Methode bey Auf-
lösung arithmetischer Aufgaben schon kennen lernet.
Das vorzügliche dieser Methode bestehet in der sehr
grossen Allgemeinheit dieses Verfahrens, weil man
wirklich die Auflösung unzählig vieler Aufgaben fin-
den kann, wenn man dem ersten Ansehen nach nur
mit der Auflösung einer einzigen beschäftiget ist. Die
beyden Gleichungen $10x + 15y = 13(x + y)$ und
$x + y = 30$, (253. 268. §.) können als ganz leich-
te Beyspiele dienen. Setzt man in der ersten Glei-
chung die Zahl 30 anstatt $x + y$, so wird $10x + 15y$
$= 390$, und die Aufgabe verlangt, man soll die

Zahl

Zahl 30 in zwey andre x und y theilen, welche di
Eigenschaft haben, daß die Summe der Product
$= 390$ wird, wenn man die eine x mit 10, die an
dre y mit 15 multiplicirt. Man bezeichne auch di
gegebenen Zahlen mit Buchstaben, die als ganz all
gemeine Zeichen dienen; man setze die Zahl a soll i
zwey Theile x und y getheilt werden, welche die Ei
genschaft haben, daß die Summe der Producte $=$
wird, wenn man x mit p und y mit q multiplicirt
so erhält man $x + y = a$, und $px + qy = b$. Nun
hat man seine Freyheit, anstatt a, b, p, q, auch
ganz andre als die vorigen Zahlen zu wählen, und
man findet eine ganz allgemeine Auflösung, die eine
unzählige Menge besondrer Fälle unter sich begreift.
Aus der Gleichung $px + qy = b$ findet man $y =$
$\frac{b - px}{q}$, und die andre $x + y = a$ giebt $y = a - x$.
Weil beyde Werthe gleich sind, so erhält man ferner
$\frac{b - px}{q} = a - x$, und daraus folgt $b - px$
$= aq - qx$, oder $(q - p)x = aq - b$, mithin $x =$
$\frac{aq - b}{q - p}$, da dann zugleich $y = a - x$ bekannt ist,
weil der Werth von x durch jene Gleichung bestimmt
wird.

270. §.

Diese Gleichungen enthalten die Auflösung aller Aufgaben, die zur Alligations- und Vermischungsrechnung gehören, wenn nur zweyerley Materialien in die Mischung kommen sollen. Wenn p den Preis

der

r einen Waare, wovon die Menge x gesucht wird
zeichnet, und q den Preis der andern, wovon man
e Menge y sucht; wenn ferner m der Mittelpreis
n soll: so ist $\frac{px+qy}{x+y} = m$ (253. §.), also
$+qy = m(x+y)$. Wenn überdem die Zahl
a ist, welche die Menge der ganzen Mischung an-
igt, so ist $x+y=a$, und man hat auch $px+qy$
ma. Was also im vor. 269. §. b war, das ist
er ma, demnach findet man $x = \frac{(q-m)a}{q-p}$.

Aus der Gleichung $px+qy = mx+my$ folgt
$-m)y = (m-p)x$, also $\frac{y}{x} = \frac{m-p}{q-m}$,
elches die Alligationsregel ist. Eben diese Glei-
ung giebt $y = \frac{(m-p)x}{q-m}$, und wenn der Werth
$\frac{(q-m)a}{q-p}$ anstatt x gesetzt wird, so findet man
$= \frac{(m-p)a}{q-p}$. Beyde Gleichungen $x = \frac{(q-m)a}{q-p}$,
nd $y = \frac{(m-p)a}{q-p}$ drucken das in kurzen Zeichen
nd ganz allgemein aus, was man vornehmen muß,
m die Vermischungsregel anzuwenden, nachdem
ermittelst der Alligationsregel das Verhältniß
$\frac{y}{x} = \frac{m-p}{q-m}$ schon ist gefunden worden: es ist
nemlich $q-p = (q-m)+(m-p)$, jene Glei-
chun-

chungen aber lösen sich in die Proportionen auf $q - p : q - m = a : x$, und $q - p : m - p = a :$ welches völlig mit der Rechnung im 254. §. übe einstimmet.

Der XVI. Abschnitt.

Von der Regel Cocci, und Regel Falsi.

271. §.

In solchen Fällen, wenn mehr als eine unbekannte Zahl gesucht wird, ist eine Gleichung, allein nicht hinlänglich um ganz bestimmt auf die vorgelegte Frage zu antworten. Wenn man zwey Zahlen finden soll, und alsdenn beyde mit bekannten Zahlen in der Gleichung, worauf die Aufgabe gebracht werden kann, verbunden sind; so kann man jede von beyden nur alsdenn allererst bestimmt angeben, wenn die andre entweder willkührlich, oder wegen andrer Gründe grade von dieser und keiner andern Grösse gewählt wird. Oft wird die Antwort in ganzen Zahlen verlangt, und alsdenn ist es nicht mehr gleichviel, wie groß man eine von beyden annehmen will: denn wenn auch die eine willkührlich gewählte eine ganze Zahl wäre, so könnte es doch seyn, daß die andre keine ganze Zahl bliebe. Auch fodert die Aufgabe vielleicht noch überdem, daß die gesuchten Zahlen mit gewissen vorgeschriebenen Factoren aufgehen sollen: da dann nicht allein kein Bruch, sondern auch keine Primzahl der Aufgabe ein Genüge leistet. Indessen

essen bleiben auch bey diesen Einschränkungen oft erschiedene Antworten möglich, so daß man nicht n Stande ist genau zu sagen, welche Antwort der agende eigentlich haben will, und das hat den Nahnen Regel Coeci, oder Blindrechnung veranasset. Man verstehet darunter diejenige Methode, elche man beym Rechnen befolgen muß, um nicht llein die Antwort in ganzen Zahlen zu finden, sonern auch zu bestimmen, wie viele Antworten in ganen Zahlen überhaupt möglich sind.

272. §.

Wenn man ein Paar Zahlen x und y finden sollte, ovon die eine doppelt genommen zur andern addirt 13 ausmacht; so hiesse das, es soll $2x + y = 13$ eyn, und man kann gleich übersehen, daß y eine ungrade Zahl seyn müsse, die kleiner als 13 ist, damit für $2x = 13 - y$ eine grade Zahl übrig bleibe. Wenn man nun $2x = p$ setzt, so hat man die zweyte Gleichung, welche noch fehlte, um bestimmt anzugeben, wie groß x und y seyn müssen, so bald anstatt p eine Zahl von bestimmter Grösse gesetzt wird. Beyde Gleichungen sind nun $y = 13 - p$, und $x = \frac{1}{2}p$. Die erste Gleichung zeiget, daß p nicht grösser als 13 seyn könne, und die andre, daß p eine grade Zahl seyn müsse, damit sie mit 2 aufgehe. Also können nur die Zahlen 2, 4, 6, 8, 10, 12 anstatt p gesetzt werden, und es sind sechs Antworten möglich, die sich leicht angeben lassen.

273. §.

Zwey ganze Zahlen zu finden, wovon die eine mit 2 die andre mit 3 aufgeht, und deren Summe 25 ausmacht.

Aufl. Es soll $x + y = 25$ seyn, und überdem sollen $\frac{1}{2}x = m$, so wie $\frac{1}{3}y = n$ ganze Zahlen seyn.

Das giebt $2m + 3n = 25$, und $m = \frac{25 - 3n}{2}$.

Diesemnach muß $3n < 25$, also n nicht grösser als 8 seyn. Wenn man wirklich mit 2 dividirt, so erhält man $m = 12 + \frac{1}{2} - n - \frac{1}{2}n$, oder $m + \frac{1}{2}n - \frac{1}{2} = 12 - n$. Weil nun m und n ganze Zahlen seyn sollen, so ist $12 - n$ eine ganze Zahl, und eben darum muß auch $\frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$, oder $\frac{n-1}{2}$ eine ganze Zahl seyn. Es sey also $\frac{n-1}{2} = p$, so wird $n = 2p + 1$, und diese Zahl muß nicht grösser als 8 mithin $2p$ nicht grösser als 7, und p nicht grösser als 3 seyn. Aus $n = 2p + 1$ folgt $3n = 6p + 3$, also $m = \frac{25 - 6p - 3}{2}$, oder $m = 11 - 3p$.

Aus den vier Gleichungen

1) $n = 2p + 1$, 2) $m = 11 - 3p$, 3) $x = 2m$, 4) $y = 3n$,

folgt nun die Auflösung der Aufgabe in vier verschiedenen Antworten, weil man die vier Werthe 0, 1, 2, 3, statt p setzen kann.

$p = 0$ giebt	$p = 1$ giebt	$p = 2$ giebt	$p = 3$ giebt
$n = 1$	$n = 3$	$n = 5$	$n = 7$
$m = 11$	$m = 8$	$m = 5$	$m = 2$
$x = 22$	$x = 16$	$x = 10$	$x = 4$
$y = 3$	$y = 9$	$y = 15$	$y = 21$

274. §.

Zwey ganze Zahlen zu finden, die zusammen 100 ausmachen, wovon aber die eine mit 7, die andre mit 11 aufgeht.

Aufl. Es soll $x + y = 100$, ferner sollen $\frac{1}{7}x = m$, und $\frac{1}{11}y = n$ ganze Zahlen seyn. Demnach wird $x = 7m$, $y = 11.n$, also $7m + 11.n = 100$, und man erhält $m = \frac{100 - 11.n}{7}$, mithin muß < 9 seyn. Man dividire mit 7, so findet man $= 14 + \frac{2}{7} - n - \frac{4}{7}n$, und daraus folgt $m + \frac{4n-2}{7} = 14 - n$, oder $m + 2.\frac{2n-1}{7} = 14 - n$. Demnach muß $\frac{2n-1}{7} = p$ eine ganze Zahl, und $2n = 7p + 1$ eine grade Zahl seyn. Weil nun $n < 9$, also $2n - 1 < 17$, oder $7p < 17$ seyn muß, so muß $p < 2\frac{3}{7}$ bleiben, und p kann nicht > 2 seyn. Aber auch $7p + 1$ muß eine grade Zahl seyn, und $7 \times 2 + 1$ ist ungrade: mithin kann nur $= 1$ genommen werden. Das giebt

$$n = 4,\ m = 8$$
$$y = 44,\ x = 56.$$

Die vorgelegten Bedingungen schränken also die Auflösung auf eine einzige Antwort ein.

275. §.

Weil zwey Gleichungen nöthig sind, wenn zwey unbekannte Zahlen gesucht werden, so erhellet, daß noch die dritte Gleichung hinzu kommen müsse, wenn drey Zahlen gesucht werden. Ueberhaupt sind eben so viele Gleichungen nöthig, als unbekannte Zahlen in der Aufgabe vorkommen, wenn man anders alle bestimmt angeben, und keine willkührlich bleiben soll. Fehlt eine oder mehr Gleichungen, so können ähnliche Bedingungen wie die im 271. §.

bemerkten, die sonst möglichen vielerley Antworten auf einige wenige, vielleicht nur auf eine wie im 274. §. einschränken. Allemahl kann man bey der Rechnung selbst ähnliche Maximen wie im 273 und 274. §. befolgen, und die Zahlen, welche ganze Zahlen seyn müssen, mit eigenen Buchstaben bezeichnen, so erhält man mehr Gleichungen. Zugleich sucht man die Gränzen zu bestimmen, welche die in Rechnung gebrachten Zahlen nicht übertreffen können, nimmt auch auf den Umstand Rücksicht, ob die während der Rechnung sich hervorgebenden Zahlen solche sind, die mit einem vorgeschriebenen Divisor aufgehen müssen, so wie im 274. §. $7p + 1$ mit 2 aufgehen mußte.

276. §.

Die im 255. §. vorgelegte Aufgabe so aufzulösen, daß die Antwort in ganzen Zahlen gefunden werde.

Aufl. Es soll 1) $x + y + z = 60$, und 2) $40x + 30y + 24z = 2000$ seyn. Man multiplicire die erste Gleichung mit 24, so wird $24x + 24y + 24z = 1440$, und wenn diese Gleichung von n. 2) subtrahirt wird, so findet man $16x + 6y = 560$, oder $8x + 3y = 280$. Daraus folgt $x = \frac{280 - 3y}{8}$

$= 35 - 3 \cdot \frac{1}{8}y$, und $\frac{1}{8}y = p$ muß eine ganze Zahl seyn. Man erhält also die dritte Gleichung $y = 8p$, und findet $x = 35 - 3p$, $z = 60 - (x + y) = 60 - 5(p + 7)$. Demnach muß $p + 7$ eine ganze Zahl und $p + 7 < 12$, also $p < 5$ seyn. Weil nun nicht $p = 0$ seyn kann, weil das $y = 0$ geben würde, so sind 4 Antworten möglich, nemlich

$p = 1$ $y = 8$ $x = 32$ $z = 20$

$p = 2$ $y = 16$ $x = 29$ $z = 15$

$p = 3$ $y = 24$ $x = 26$ $z = 10$

$p = 4$ $y = 32$ $x = 23$ $z = 5$

Zusatz. Wenn die Preise der drey verschiedenen Metalle zu 10 thlr., 12 thlr., 15 thlr. für den Centner bestimmt wären, das Ganze aber 30 Centner wiegen und auf 390 thlr. zu stehen kommen sollte; so hätte man

1) $x+y+z=30$, und 2) $10x+12y+15z=309$.

Die erste Gleichung giebt ferner $10x+10y+10z = 300$, also wird $2y+5z=90$, und $y = 45 - 5.\frac{1}{2}z$, mithin muß $\frac{1}{2}z = p$ eine ganze Zahl seyn. Daraus findet man $z = 2p$, $y = 45-5p$, $x+y+z = x+45-3p = 30$, mithin $x = 3p+30-45$ oder $x = 3p-15$. Daraus ergiebt sich, daß $p < 9$ und zugleich $p > 5$ seyn müsse, und es sind drey Antworten möglich

$p = 6$ $z = 12$ $y = 15$ $x = 3$

$p = 7$ $z = 14$ $y = 10$ $x = 6$

$p = 8$ $z = 16$ $y = 5$ $x = 9$.

277. §.

Aus $7\frac{1}{2}$löthigem, 11löthigem und 15löthigem Silber soll ein Werk 50 Mark schwer in 13löthigem Silber verfertiget werden: wieviele ganze Mark Silber werden dazu von jeder Art erfodert.

Aufl. Es soll 1) $x+y+z = 50$ seyn, und

$$\frac{7\frac{1}{2}x+11.y+15z}{x+y+z} = 13, \text{ also } 7\tfrac{1}{2}x+11.y$$

$+15z = 13+50$, oder

2) $15x + 22y + 30z = 1300$. Man subtrahir
1) $15x + 15y + 15z = 750$, so bleibt
$7y + 15z = 550$, und es wird $y =$
$\frac{550 - 15z}{7}$, also $y = 78 + \frac{4}{7} - 2z - \frac{1}{7}z$, od
$y + \frac{z - 4}{7} = 78 - 2z$. Weil nun y und
ganze Zahlen seyn sollen, so muß auch $\frac{z - 4}{7} =$
eine ganze Zahl seyn, und man erhält $z = 7p + 4$
so wie $y + p + 2z$ oder $y + 15p + 8 = 78$, und
$y = 70 - 15p$. Ferner wird $y + z = 74 - 8p$
und $x + 74 - 8p = 50$, also $x = 8p - 24$, und
es muß $p > 3$, aber auch p nicht grösser als 4 seyn.
Demnach giebt es nur eine mögliche Antwort auf die
vorgelegte Frage, nemlich $p = 4$, $z = 32$, $y = 10$,
$x = 8$.

Zusatz. Alle Aufgaben lassen sich nach dieser Methode auflösen, welche man auf zwey Gleichungen von dieser Form $x + y + z = a$, und $fx + gy + hz = b$ bringen kann. Wenn auch die vierte unbekannte Zahl w noch hinzukäme, und sich nur zwey Gleichungen von der Form $w + x + y + z = a$, und $ew + fx + gy + hz = 0$ aus den Bedingungen der Aufgabe folgen liessen; so würde sie zwar noch mehr unbestimmt seyn: die in ganzen Zahlen möglichen Antworten würde man indessen doch vermittelst ganz ähnlicher Schlüsse finden können.

278. §.

Es kauft jemand eine Anzahl Ochsen, Kühe, und Schaafe, zusammen 100 Stück, er

bezahlt

ezahlt für jeden Ochsen 10 thl., für jede Kuh
thl., für jedes Schaaf ½ thl., für alle zu-
ammen 100 thl., die Frage ist, wie viel Stück
von jeder Art bekommen habe?

Aufl. Es sey die Anzahl der Schaafe x, der
Kühe y, der Ochsen z: so wird $\frac{1}{2}x + 5y + 10z = 100$, und $x + y + z = 100$, also auch $x + 10y + 20z = 200$, und $9y + 19z = 100$. Daraus folgt $y = \frac{100 - 19z}{9}$, oder $y = 11 + \frac{1}{9} - 2z - \frac{1}{9}z$, und man erhält $y + \frac{z - 1}{9} = 11 - 2z$.

Demnach muß $\frac{z - 1}{9} = p$ eine ganze Zahl seyn, und man findet $z = 9p + 1$: also ferner $y + p = 9 - 18p$, und $y = 9 - 19p$, so wie $x + 10 - 10p = 100$, und $x = 90 + 10p$. Weil nun y eine ganze Zahl seyn muß, so kann nur $p = 0$ gesetzt werden, da dann $z = 1$, $y = 9$, $x = 90$, gefunden wird.

Zusatz. Wenn unter den hundert Häuptern Vieh auch noch Kälber, das Stück zu 2 thlr. befindlich seyn sollten, so hätte man $x + y + z + w = 100$, und $\frac{1}{2}x + 5y + 10z + 2w = 100$, oder $x + 10y + 20z + 4w = 200$: mithin ferner $9y + 19z + 3w = 100$, und $w = \frac{100 - 19z - 9y}{3} = 33 + \frac{1}{3} - 6z - \frac{1}{3}z - 3y$. Daraus folgt $w + \frac{z - 1}{3} = 33 - 6z - 3y$, und $\frac{z - 1}{3} = p$ muß eine

ganze Zahl seyn. Man erhält also $z = 3p + 1$, und dieser Werth anstatt z gesetzt giebt $w + p = 33 - 18p - 6 - 3y$, also $w = 27 - 19p - 3y$, ferner $z + w = 28 - 16p - 3y$, und $x + y + z + w = x + 28 - 16p - 2y = 100$, mithin $x = 72 + 16p + 2y$. Nun kann man die Zahlen p und y zwar willkührlich nehmen, aber die Gleichung $w = 27 - 19p - 3y$ zeiget, daß $19p + 3y - 27$ bleiben müsse. Für p kann man also 0 oder 1 nehmen, keine andre Zahlen. Nimmt man $p = 0$, so muß $y < 9$ bleiben, und es bleiben 8 mögliche Fälle; nimmt man aber $p = 1$, so kann man für y nur die Zahlen 1 oder 2 nehmen: also sind überhaupt 10 verschiedene Antworten möglich.

279. §.

Unter dem Nahmen der Regel Falsi tragen ältere arithmetische Schriftsteller eine Methode Rechnungsfragen von mancherley Art aufzulösen vor, die mit der Methode solches durch Gleichungen zu bewerkstelligen schon sehr viel ähnliches hat. Es war der nächste Schritt zur Methode der Gleichungen, nur fehlte noch die Uebersetzung der Frage in eine Gleichung, und die leichte Art das gesuchte durch Rechnung aus der Gleichung zu folgern. Die Methode selbst beruhet auf den nachstehenden Regeln.

1. Man nehme eine Zahl muthmaßlich oder ganz willkührlich für die gesuchte an, und nehme mit ihr alle Rechnungen vor, welche die vorgelegte Aufgabe vorschreibt; so wird sich zeigen, ob das Resultat am Ende herauskomme, was die Aufgabe verlangt, in welchem Falle die gesuchte Zahl richtig getroffen wä-

re.

re. Im entgegen gesetzten Falle bemerke man das Resultat unter der angenommenen Zahl.

2. Man nehme eine andre Zahl, die 2mahl oder mehrmahl grösser, als die vorige ist, und verfahre nach der ersten Regel. Wenn nun das Resultat wieder nicht getroffen ist, so mache man eine zweyte Columne, worin unter der zweyten noch falschen Zahl das zweyte falsche Resultat gesetzt wird. Nun kann man zuerst versuchen, ob diese beyden Resultate sich eben so wie die beyden angenommenen Zahlen verhalten: wenn das der Fall ist, so kann man, wie gleich zu übersehen ist, die rechte Zahl vermittelst der Regel Detri finden.

Gesetzt die Frage wäre folgende: Von der Hälfte einer Zahl hat man den dritten und den vierten Theil dieser Hälfte subtrahirt, und es blieben 300 übrig: wie groß war die Zahl?

Es sey 24 die ges. Zahl,	Es sey 48 die ges. Zahl,
so ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} 24 = 4$	so ist $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 = 8$
$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} 24 = 3$	$\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot 48 = 6$
die Summe 7	die Summe 14
und $\frac{1}{2} \cdot 24 - 7 = 5$	und $\frac{1}{2} \cdot 48 - 14 = 10$.

Weil diese Resultate sich wie die angenommenen Zahlen verhalten, so kann man ansetzen

das falsche Resultat giebt die falsche Zahl, was also das

5	24	wahre Resultat
	60	300?

Fac. 1440

Man hat nicht nöthig beyde falsche Voraussetzungen zu machen, wenn man schon voraus weiß, daß die endlichen Resultate sich in eben dem Verhältnisse ändern müssen, wie die für die gesuchte angenommenen

nen Zahlen: daher nennen einige Schriftsteller die Art solche Aufgaben aufzulösen die einfache Regel Falsi, (regulam simplicis positionis) und man übersiehet leicht, daß alle zur Gesellschafts- und Vermischungsrechnung gehörige Aufgaben sich so auflösen lassen, weil die gesuchten Theile mit dem gegebenen Ganzen in einerley Verhältnisse bleiben, wenn man das Ganze ändert.

280. §.

Nach der doppelten Regel Falsi (regula duplicis positionis) kommt zu den beyden Vorschriften des 279. §. noch die nachstehende dritte hinzu.

3. Wenn beyde falsche Resultate kleiner sind, als sie seyn sollten, so subtrahire man sie von dem wahren Resultat, setze beyde falsch angenommene Zahlen, wie folget, neben einander, und die gefundenen Differenzen der falschen Resultate vom wahren Resultat darunter.

die Zahl 24	die Zahl 48
giebt 295 zu wenig	giebt 290 zu wenig
48	24
2360	1160
1180	58
14160	6960

Man multiplicire kreuzweise wie oben stehet,

vom grössern Prod.	14160	vom grössern Fehler	295
subtr. man d. klein.	6960	subtr. man d. klein.	290
1. Rest	7200	2. Rest	...5

Der

Der 1. Rest mit dem zweyten dividirt giebt die gesuchte Zahl 7200 : 5 = 1440. Die Gleichung wäre $\frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x - \frac{1}{8}x = 300$, also $\frac{5}{24}x = 300$, oder $\frac{1}{24}x = 60$, welches sehr leicht $x = 60 \times 24 = 1440$ giebt.

Weil bey Rechnungsfragen dieser Art die gesuchte Zahl ohne Anwendung der dritten Regel kürzer gefunden werden kann, so ist es allerdings unnöthig diesen Umweg zu nehmen: indessen rechnet doch Stifelius in seiner Arithmetica Integra, Fol. 90 dieses nemliche Exempel nach der doppelten Regel Falsi, fodert auch fol. 97 jedes Exempel der Regel Falsi müsse regulariter duas positiones haben, die Rechnung per unam positionem gehöre mehr zur Regel Detri als zur Regel Falsi.

281. §.

Soviel ist aber gewiß, daß die doppelte Regel Falsi bey solchen Rechnungsfragen ihre Anwendung findet, wo die einfache Regel Falsi, wie man gewöhnlich davon Gebrauch macht, nicht hinreichend seyn würde. Wenn x die unbekannte Grösse bezeichnet, so gehören alle Exempel hieher, die auf eine Gleichung von der Form $Ax = B$ gebracht werden können. So wie aber die Rechnungsfragen oft vorgetragen werden, kommt man zuerst auf eine Gleichung wie $Ax + D = B$, wenn B das Resultat bezeichnet, was zuletzt herausgebracht werden soll. Ob nun gleich aus $Ax + D = B$ auch $Ax = B - D$ folgt, und die vorige Form nun wieder da ist; so rechnet man doch so nicht, ehe man die Methode der Gleichungen kannte. Man hielte sich nur an das gegebene Resultat B, und weil $Ax + D$ sich nicht mehr

mit x in einerley Verhältniß ändert, wenn anstat x eine andre Zahl gesetzt wird; so hatte man bei Exempeln dieser Art noch eine Regel mehr nöthig. Um ein leichtes Exempel hievon zu geben, sey eine Zahl um 73 vermehrt, und der vierte Theil der Summe $= 50$: die Frage ist, was es für eine Zahl sey? Man setze

Die Gleichung wäre $\frac{1}{4}(x+73) = 50$, woraus viel leichter $x = 200 - 73 = 127$ gefunden wird.

282. §.

Den Grund jenes Verfahrens nach der doppelten Regel Falsi kann man leicht allgemein übersehen, wenn man die Gleichung, worauf dergleichen Rechnungsfragen führen, unter der allgemeinen Form $Ax + D = B$ betrachtet. Die erste falsch angenommene Zahl sey $= f$, und man nehme an, es werde $Af + D = B - d$ gefunden; die andre falsche Zahl sey $= g$, und es werde $Ag + D = B - \delta$ gefunden: so hat man $Ag + \delta + D = B$ und $Af + d + D = B$, folglich $Ag + \delta = Af + d$, also auch $A(g-f) = d - \delta$,

und

und $A = \frac{d-\delta}{g-f}$. Aus den beyden Gleichungen $Ag+\delta+D=B$ und $Ax+D=B$ folgt ferner $Ax = Ag+\delta$, und wenn $A = \frac{d-\delta}{g-f}$ gesetzt wird; so giebt das $\frac{(d-\delta)x}{g-f} = \frac{(d-\delta)g}{g-f}+\delta$, mithin ferner $(d-\delta)x = (d-\delta)g+(g-f)\delta$, oder $(d-\delta)x = d.g-\delta.f$, mithin $x = \frac{d.g-\delta.f}{d-\delta}$.

1. Zusatz. Im Exempel des vor. §. war $f=7$, $d=30$, $g=35$, $\delta=23$, und das giebt $x = \frac{30.35-23.7}{30-23}$, wie der Regel gemäß ist. Wenn übrigens die Gleichung auch $Ax-D=B$ wäre, wie wenn $\frac{1}{4}(x-73)=50$ seyn sollte, so würden noch alle Schlüsse unverändert gelten.

2. Zusatz. Die falschen Zahlen f und g konnten auch wohl zu grosse Resultate geben: alsdenn hätte man $Af+D=B+d$ und $Ag+D=B+\delta$. Diese Gleichung von jener subtrahirt giebt nun $A(f-g)=d-\delta$, also $A = \frac{d-\delta}{f-g}$. Aber auch $Ax+D=B$, also $Ag-Ax=\delta$, und $Ag=Ax+\delta$. Wird nun $A = \frac{d-\delta}{f-g}$ gesetzt, so erhält man $\frac{(d-\delta)g}{f-g} = \frac{(d-\delta)x}{f-g}+\delta$, folglich wird

dg

$dg - \delta g = (d - \delta)x + \delta f - \delta f$, und man findet $(d - \delta)x = dg - \delta f$, also $x = \frac{dg - \delta f}{d - \delta}$, welches die vorige Regel ist.

3. Zusatz. Wenn das falsche Resultat, was die eine falsche giebt, zu klein, und das andre zu groß ist, so wird die Summe der Producte anstatt ihrer Differenz das Dividendum, und der Divisor wird ebenfalls die Summe der Differenzen, um welche die falschen Resultate von wahren verschieden sind. Wenn $Af + D = B - d$ bleibt, so ist nun $Ag + D = B + \delta$, also wird $Ag - \delta = Af + d$ und $A = \frac{d + \delta}{g - f}$.

Ferner ist $Ax = Ag - \delta$, oder $Ax + \delta = Ag$, mithin $\frac{(d+\delta)x}{g-f} + \delta = \frac{(d+\delta)g}{g-f}$, und $(d+\delta)x + \delta g - \delta f = dg + \delta g$: also $x = \frac{dg + \delta f}{d + \delta}$.

Anmerkung. Vormahls machte man von dieser doppelten Regel Falsi auch in solchen Fällen Gebrauch, wenn mehr als eine unbekannte Zahl gefunden werden sollte, ja selbst alsdenn, wenn das gesuchte nicht anders, als durch Ausziehung einer Quadrat- oder Cubicwurzel, auch wohl nach höherer Ordnung gefunden werden konnte. Jetzt wird vermittelst der Methode der Gleichungen alles viel leichter gefunden. Indessen bleibt diese Regel Falsi doch allemahl nicht allein um deßwillen merkwürdig, weil sie von dem Scharfsinne zeuget, womit die Alten dergleichen Untersuchungen angestellet haben, ehe man

leich-

leichtere und kürzere Methoden kannte, und weil auch jetzt noch zuweilen Fälle vorkommen, bey welchen man sich mit einer Art von Regel Falsi helfen muß. Weil übrigens der größte Vortheil der Methode der Gleichungen in allgemeinen Bezeichnung bestehet, wie im 269. und 270. §. ist bemerkt worden; so hat der Gebrauch dieser allgemeinen Zeichen anstatt der Ziffern auch noch merkwürdige Erweiterungen der Grund-Operationen der Rechenkunst veranlasset, wovon die nun folgende Algebra oder Allgemeine Rechenkunst weitern Unterricht geben muß.

Die Algebra

oder

die allgemeine Rechenkunst

mit ihrer Anwendung auf die gemeine Rechenkunst.

Der I. Abschnitt.

Von den vier allgemeinen Rechnungsarten.

1. §.

Wenn zwey Grössen eine solche Beziehung gegen einander haben, daß die eine eben so viel abnimmt, als die andre wächst, und umgekehrt, die erste allemahl um eben so viel anwächst, als die andre abnimmt: so heissen sie entgegengesetzte Grössen. Wer seine Schulden vergrössert, vermindert eben dadurch sein Vermögen, und wer die Schulden vermindert, vergrössert sein Vermögen. Würkliches Vermögen, und Schulden sind demnach entgegengesetzte Grössen. Der Weg, welchen ein Schiff auf einer Seereise zurückgelegt hat, wird durch einen vom Sturm verursachten Rückgang vermindert, und der zurückgelegte Weg wächst wieder, indem das Stück des Weges abnimmt,

immt, um welches das Schiff war zurück getrieben
orden. Fortgang und Rückgang sind demnach
benfalls entgegengesetzte Grössen. In der ausüben-
en Mathematik kommen sehr viele Fälle von dieser
Art vor.

Zusatz. Dergleichen entgegengesetzte Grössen sind also für sich betrachtet als Grössen von verschiedener Art, oder solche, die verschiedene Nahmen haben, anzusehen (146. §. R.) Sie stehen aber allemahl unter einem gemeinschaftlichen Hauptbegriff, und können in so ferne als Grössen von einerley Art betrachtet werden. Fortgehen, und Zurückgehen sind beydes Bewegungen. Schulden, und würkliches Vermögen gehören beyde zu demjenigen, was man den Vermögenszustand eines Menschen nennet.

2. §.

Im eigentlichen Verstande lassen sich nur solche Grössen addiren, die von einerley Art sind: (19. §. R.) also kann man entgegengesetzte Grössen, z. E. Schulden, und würkliches Vermögen in dem Verstande nicht addiren, in welchem dies Wort in der gemeinen Rechenkunst gebraucht wird. Wenn jemand 700 rthl. Vermögen hat, und zugleich auch 300 rthl. schuldig ist, so macht das zusammen weder 1000 rthl. Vermögen, noch 1000 rthl. Schuld aus. Ein Schiff, das 700 Meilen vorwärts, und 300 Meilen rückwärts gesegelt hat, ist weder 1000 Meilen vorwärts, noch 1000 Meilen rückwärts gekommen. Der eigentliche Weg, um welchen es sich vom Hafen entfernet hat, beträgt 400 Meilen. Man könnte dies das Resultat der beyden entgegengesetzten Wege

nen-

nennen: so würde im vorigen Exempel 400 rthl. Vermögen, das Resultat von 700 rthl. Vermögen, und 300 thl. Schulden seyn. Aber man braucht auch hier zu nicht geringer Verkürzung vieler Rechnungen, die sich auf ähnlichen Betrachtungen gründen, das Wort Summe. Demnach ist die Summe zweyer entgegesetzten Grössen eigentlich dasjenige, was in der grössern übrig bleibt, nachdem sie durch die entgegengesetzte kleinere um ein dieser letztern gleiches Stück ist vermindert worden. Entgegengesetzte Grössen addiren, heißt nun diese ihre Summe suchen.

3. §.

Wegen mehrerer Deutlichkeit kann man dieses Resultat zweyer einander entgegengesetzter Grössen ihre algebraische Summe nennen. Algebraische Summen sind also nicht immer einerley mit dem, was man arithmetische Summe nennen würde.

Zusatz. Der algebraischen Summe zweyer entgegengesetzten Grössen muß ein Nahme oder sonst ein Zeichen beygefügt werden, wodurch es bemerklich gemacht wird, ob diese Summe ein Stück der einen, oder der andern, von beyden entgegengesetzten Grössen sey, da dann die im vor. §. gebrauchten Exempel etwa so angesetzt werden könnten:

700 rthl. Vermög.	700 Meilen vorw.
300 rthl. Schuld.	300 Meilen rückw.
Sum. 400 rthl. Vermög.	S. 400 Meil. vorw.

Eben so würde man folgende Exempel rechnen.

1000 rthl. Vermög.	200 Meil. vorw.
1500 rthl. Schuld.	300 Meil. rückw.
Sum. 500 rthl Schuld.	Sum. 100 Meil. rückw.

4. §.

4. §.

Wenn bey einer solchen Rechnung als bekannt vorausgesetzt wird, daß von dem Hauptbegriff die Rede sey, den beyde entgegengesetzte Grössen gemein haben; so kann man jede derselben durch Verneinung der ihr entgegengesetzten anzeigen: denn durch Verneinung der einen wird nothwendig die andre gesetzt. Diejenige von zwoen entgegengesetzten Grössen, welche man durch Verneinung der andern anzeigt, heist eine negative, oder verneinte Grösse, oder wie man richtiger sagen sollte: eine verneint ausgedrückte Grösse. Die ihr entgegengesetzte wird alsdenn ohne Verneinung angezeigt, und man nennt sie eine positive, oder bejahte Grösse, eigentlich, eine bejaht oder positiv ausgedrückte Grösse; denn das bejahte, oder verneinte, ist hier nur in dem Ausdruck zu suchen, der die Grösse bezeichnet. Ein nicht vorwärts zurückgelegter Weg von 3 Meilen ist mit 3 Meilen Rückweg, und ein nicht rückwärts zurückgelegter Weg von 3 Meilen ist mit 3 Meilen vorwärts zurückgelegten Wege einerley.

5. §.

Der bejahten Grösse, das ist derjenigen, welche man ohne Verneinung anzeigen will, setzt man das Zeichen +, der entgegengesetzten verneinten das Zeichen — voran, und läßt sodann die Nahmen, welche die entgegengesetzte Beziehung andeuten, überall weg. Soll demnach Vermögen, oder vorwärts zurückgelegter Weg, mit + bezeichnet werden: so muß man Schuld, und rückwärts zurückgelegten Weg mit — bezeichnen. Man kann es auch umgekehrt machen, nur muß man die einmahl angenom-

mene Vorausſetzung nicht ändern, ſo lange man mit Auflöſung einer und eben derſelben Aufgabe beſchäftigt iſt.

6. §.

Braucht man dieſe Zeichen bey den Exempeln des 3. §.: ſo kann man die Rechnung wie folget anſetzen.

+ 700 rthl.	+ 700 Meil.
— 300 rthl.	— 300 Meil.
Summe + 400 rthl.	Summe + 400 Meil.
+ 1000 rthl.	+ 200 Meil.
— 1500 rthl.	— 300 Meil.
Summe — 500 rthl.	Summe — 100 Meil.

Es giebt ſich nämlich das Zeichen der Summe nun allemahl von ſelbſt. Man ſpricht auch hier das Zeichen + durch plus, und das Zeichen — durch minus aus, und man ſieht leicht, daß die im 20. §. der Rechenkunſt feſtgeſetzte Bedeutung dieſer Zeichen dabey zum Grunde liege, obgleich die Bedeutung dieſer Zeichen hier allgemeiner wird. Hier nämlich zeigen ſie überhaupt jede entgegengeſetzte Beziehung zwoer Gröſſen gegen einander an, ſo, wie ſie dort insbeſondre vermehren, und vermindern bezeichneten. Eine mit — bezeichnete Gröſſe iſt hier alſo nicht allemahl eine Gröſſe, die man abziehen ſoll: denn eine mit + bezeichnete Gröſſe vermindert ſo gut die ihr entgegengeſetzte mit — bezeichnete, als dieſe jene vermindert.

7. §.

177 Jede Gröſſe kann hier als ein Ganzes betrachtet
Fig. werden, das aus entgegengeſetzten Theilen beſtehet.
Wenn durch den Anfangspunct A eine grade Linie

AE läuft, die man auch nach F rückwärts verlängern kann, (9. §. Geom.) so ist jedes abgeschnittene Stück AC = + AE — EC, so wie — AD = — AF + FD. Wenn nemlich das, was sich von A nach E und über E hinaus erstreckt, mit + bezeichnet wird, so muß man das, was die entgegengesetzte Lage nach F und über F hinaus erhalten soll, mit (—) bezeichnen. So wie — EC ein Theil ist, der das Ganze + AE vermindert, so ist auch + FD ein Theil, der das Ganze — AF vermindert.

8. §.

Nicht entgegengesetzte Grössen lassen sich in eben dem Verstande zusammen addiren, wie man Grössen von einerley Art, oder die einerley Nahmen haben, zusammen addirt: die Summe erhält mit den addirten Grössen einerley Zeichen. Man übersieht also leicht, wie man die nachstehenden Additions-Exempel rechnen müsse.

— 13 rthl.	+ 3 rthl.
— 25 rthl.	+ 19 rthl.
— 17 rthl.	+ 4 rthl.
Summe — 55 rthl.	Summe + 26 rthl.

Hier können die mit + bezeichneten Thl. Einnahme, die mit — bezeichneten Ausgabe, oder umgekehrt: jene können Ausgabe, diese Einnahme bedeuten u. s. f.

Zusatz. In der 177 Fig. ist also + AE = + AC + CB + BE, und — AG = — AD — DF — FG.

9. §.

Addiren und Subtrahiren sind in der gemeinen Rechenkunst entgegengesetzte Rechnungsarten: die arithmetische Addition macht aus zweyen Theilen ein

Ganzes, die arithmetische Subtraction aber nimmt aus einem gegebenen Ganzen einen gegebenen Theil weg, oder vermindert das Ganze um diesen Theil. Die algebraische Subtraction ist der algebraischen Addition eben so entgegen gesetzt, sie nimmt aus einer gegebenen Grösse einen gegebenen Theil weg. Weil dieser Theil aber ein solcher seyn kann, der in jener gegebenen Grösse als ein Ganzes betrachtet einen andern entgegengesetzten Theil vermindert hatte; (7. §.) so wird durch Wegnehmung jenes Theils keine Verminderung sondern vielmehr eine Vermehrung des andern bewirkt. Den negativen Theil — EC vom Ganzen + AC = + AE — EC wieder wegnehmen, heißt die dadurch verursachte Verminderung des andern Theiles + AE wieder aufheben, also + AE wieder herstellen.

10. §

Wenn beyde Grössen einerley Zeichen haben, und die zu subtrahirende Grösse kleiner, als die andre ist; so hat die algebraische Subtraction mit der arithmetischen einerley Erfolg: das was man subtrahiren soll vermindert das Ganze, wovon man es als einen Theil betrachtet wegnehmen soll.

+ 1000 rthl.	— 1000 rthl.
+ 750 rthl.	— 750 rthl.
Rest + 250 rthl.	Rest — 250 rthl.

+ 30 Meil.	— 30 Meil.
+ 12 Meil.	— 12 Meil.
Rest + 18 Meil.	Rest — 18 Meil.

11. §.

Wenn man auf der graden Linie AE (177. Fig.) einen Theil AC etwa 7 Fuß lang genommen, hiernächst aber wieder rückwärts nach A zu 10 Fuß von C bis D aufgetragen hätte; so würde D über A hinaus fallen. Auf die Frage: wie weit nun D von A entfernt sey, würde man antworten müssen, 3 Fuß weit. Allein wenn man gleich weiß, daß D in der graden Linie AE liegt, und 3 Fuß weit von A entfernt ist, so weiß man doch noch nicht die eigentliche Stelle, wo sich der Punct D befindet: denn man kann ihn so gut zur Rechten als zur Linken 3 Fuß weit von A suchen. Die Lage von AD wird mit dem Zeichen (—) bemerkt, wenn man die Lage von AC mit + bemerkt hatte: mithin ist + AC — CD = + AC — CA — AD = — AD. Das drückt man so aus, es sey AD = — 3 Fuß, und so erhellet, in welchem Sinne man von einer Grösse eine andre algebraisch subtrahiren könne, die grösser, als jene ist, wovon man sie subtrahiren soll.

Aus einem Ganzen kann man keinen Theil wegnehmen, der grösser als das Ganze ist, wohl aber einen Theil der eben so groß als das Ganze ist, und nun kann man den übrigen Theil als etwas betrachten, das dem vorigen Ganzen entgegengesetzt ist. Wird diese Vorstellung zum Grunde gesetzt, so kommt zum Rest der Ueberschuß des grössern über das kleinere mit dem entgegengesetzten Zeichen, wie in folgenden Exempeln.

Von + 100 rthl.	Von + 100 Meil.
subtr. + 150 rthl.	subtr. + 120 Meil.
Rest — 50 rthl.	Rest — 20 Meil.

Von — 36 rthl.	Von — 27 Meil.
subtr. — 90 rthl.	subtr. — 46 Meil.
Rest + 54 rthl.	Rest + 19 Meil.

12. §.

Mit dieser Sache hat es demnach folgende Bewandniß. Eine von zwoen entgegengesetzten Grössen nimmt allemahl um eben so viel ab, als die ihr entgegengesetzte wächst (1. §.). Wenn nun dasjenige, um welches die entgegengesetzte gewachsen ist, mehr beträgt, als jene: so ist jene völlig vernichtet, und das Resultat der vorgegangenen Veränderung ist der Ueberschuß der entgegengesetzten über jene völlig vernichtete Grösse. Hat jemand 100 rthl. jährliche Einnahme, und giebt 150 rthl. aus: so macht er jährlich 50 rthl. Schulden. Hat jemand 36 rthl. Schuld, und sein Vermögen wächst bis auf 90 rthl: so wird dadurch seine Schuld vernichtet, und er hat eigentlich 54 rthl. Vermögen. Ein Schiff, das 100 Meilen vorwärts, und hierauf 120 Meilen zurück gesegelt hat, ist 20 Meilen vom Ort der Ausfahrt zurück, und wenn es Anfangs 27 Meilen zurück, hierauf 46 Meilen auf die entgegengesetzte Art, d. i. vorwärts gesegelt hat, ist jetzt vom Ort der Ausfahrt 19 Meilen vorwärts gekommen.

13. §.

Vormahls hat diese Subtractionsregel veranlasset, daß man die negativen Grössen als solche vorstellig machte, die kleiner als Null seyn sollten. Weil die arithmetische Subtraction eine Verminderung ist, so sahe man auch jede algebraische Subtraction als Verminderung an, nicht anders, als

wenn

wenn eine Grösse noch weiter, als bis auf o abnehmen könnte. Man kann zwar dergleichen Redensarten als Rechnungssprache gelten lassen, doch bleibt es allemahl besser, daß man sie vermeide, weil sie nicht allein von gar keinen Nutzen sind, sondern auch leicht zu andern fehlsamen Vorstellungen Anlaß geben.

14. §.

Wenn eine Grösse von der ihr entgegengesetzten subtrahirt wird: so bekommt der Rest einerley Zeichen mit derjenigen, wovon man subtrahirt, wie in folgenden Exempeln.

+ 70 rthl.	− 27 rthl.
− 30 rthl.	+ 53 rthl.
Rest + 100 rthl.	Rest − 80 rthl.
+ 97 Meil.	− 65 Meil.
− 25 Meil.	+ 13 Meil.
Rest + 122 Meil.	Rest − 78 Meil.

Der Grund dieses Verfahrens erhellet ganz deutlich aus den im 9. §. festgesetzten Begriff von der algebraischen Subtraction. Wenn man − 25 Meilen als einen Theil des ganzen Weges, + 97 Meilen ansehen soll; so muß der andre Theil dieses Weges + 122 Meilen, und das Ganze von + 97 Meilen = + 122 − 25 Meilen seyn. Den Theil − 25 Meilen wegnehmen, heißt also den andern von + 122 Meilen herstellen.

15. §.

In der allgemeinen Rechenkunst bedienet man sich mit vielem Vortheil der Buchstaben des Alphabeths, um die Grössen zu bezeichnen, die bey der Auflösung mathematischer Aufgaben in Betrachtung kommen,

so wie es bereits zu verschiedenen mahlen in den vier letzten Abschnitten der Rechenkunst geschehen ist. Das sind alsdenn ganz allgemeine Zeichen, wodurch man Zahlen, Linien, und überhaupt jede andre Art von Grössen, welche man will, verstehen kann. Gleiche Grössen werden mit einerley Buchstaben, ungleiche mit verschiedenen Buchstaben bezeichnet. Buchstaben, die unmittelbar bey einander hingeschrieben sind, bedeuten Producte, die aus den Factoren, welche die Buchstaben anzeigen, entstanden sind, und Quotienten werden wie in der gemeinen Rechenkunst angezeigt. Zuweilen ist es bequem, auch durch die Zeichen (×) oder (.) die Multiplication anzudeuten.

Zusatz. Da die Buchstaben hier gewisser massen das sind, was bey der Rechnung mit genannten Zahlen die Nahmen der Grössen: so kann man auch hier diejenigen Grössen, die durch einerley Buchstaben ausgedruckt sind, als gleichartige, die übrigen als ungleichartige Grössen ansehen.

16. §.

Eine Reihe, die aus positiven, und negativen Grössen als Theilen zusammengesetzt ist, zu einer andern Reihe eben solcher Grössen zu addiren.

Aufl. Man schreibe die gleichartigen Theile unter einander, und setze die Summe jeder zweener solcher Theile mit dem zugehörigen Zeichen darunter nach den Regeln des 6. und 8. §. Brüche von ungleicher Benennung bringe man vorher auf gleiche Benennung, und beobachte bey ihnen in allen Stücken die Regeln des VI. Abschnittes der Rechenkunst.

Die

Die ungleichartigen Theile setze man mit ihren zugehörigen Zeichen in der Summe nach einander hin, ohne andre Veränderung.

Exempel.

$$ax - 2bb - 5ce + 6ab - 3f$$
$$5ax + 6bb - 7ce + 2f - g$$

Summe $6ax + 4bb - 12ce + 6ab - f - g$

$$\frac{ab}{c} - 6k + 3\frac{m}{n} - 7g + \frac{r}{s}$$
$$\frac{f}{c} - 9\frac{k}{e} - 7\frac{r}{nh} + \frac{t}{s} - c$$

Sum. $\frac{ab+f}{c} - \frac{6ke+9k}{e} + \frac{3mh-7r}{nh} - 7g + \frac{r+t}{s} - c.$

17. §.

Eine Reihe, die aus positiven und negativen Grössen zusammengesetzt ist, von einer andern Reihe eben solcher Grössen zu subtrahiren.

Aufl. 1. Man schreibe die zu subtrahirende Reihe unter der andern wie bey der Addition, und setze die Differenz jeder zweener gleichartigen Theile mit dem gehörigen Zeichen unter denselben nach den Regeln des 10, 11, und 14. §. Mit den Brüchen gehe man so um, wie bey der Addition ist erinnert worden. Die Theile der obern Reihe, zu denen in der untern keine gleichartige zu gehören, setze man mit ihren Zeichen zur Differenz, die Theile in der untern Reihe aber, zu denen in der obern keine gleichartige vorhanden sind, setze man mit dem entgegengesetzten Zeichen zur Differenz herunter.

2. Ueberhaupt kann man zur Erleichterung der Sache die allgemeine Regel bemerken: eine Grösse von einer andern algebraisch subtrahiren sey eben so viel, als eine ihr gleiche und entgegengesetzte Grösse algebraisch addiren. Denn B von A subtrahiren heißt B als einen Theil vom Ganzen A betrachten und diesen Theil daraus wegnehmen. Wenn man aber — B zu A addirt, so wird dadurch ebenfalls ein Theil, der = B ist, aus A weggenommen.

Exempel.

$$\begin{array}{r} 6yy - 3gxx + hff - c - d. \\ 5yy - 2gxx - 7hff \quad - 3d. \\ \hline \text{Rest } yy - gxx + 8hff - c + 2d. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \frac{3f}{g} + \frac{7a}{b} - 6x + 7y \\ \frac{5k}{mg} - \frac{6a}{b} + 2x \quad - k \\ \hline \text{Rest } \frac{3mf-5k}{mg} + \frac{13a}{b} - 8x + 7y + k. \end{array}$$

18. §.

Jede Zahl n kann als ein Quotient, oder als der Exponent des Verhältnisses einer Grösse a gegen eine andre mit ihr gleichartige b angesehen werden. Wenn man $n = \frac{a}{b}$ setzt, so nimmt man an, daß $n : 1 = a : b$ seyn soll. Wird nun n als Factor des Products $nA = \frac{a}{b}$. A betrachtet, so ist auch $b : a =$

: nA. Wird b für Eins angenommen, so wird durch die Zahl n ausgedruckt, das heißt aber nichts weiter, als n giebt an, wie groß a gegen b, also auch, wie groß nA gegen A sey. (164. 165. §. Geom.)

Ein Quotient wie $\frac{a}{b}$ ist allemahl eine Zahl, wenn a und b gleichartige Grössen sind: (168. §. Geom.) nur ist es hier nicht einerley, ob a und b einander entgegengesetzt, oder nicht entgegengesetzt sind. Wenn $\frac{+a}{+b}$, oder $\frac{-a}{-b} = n$ gefunden wird, so zeigt diese Zahl an, wie groß das Dividendum gegen einen damit übereinstimmigen Divisor sey. Soll also $\frac{+a}{-b}$ oder $\frac{-a}{+b}$ eine Zahl vorstellen, die nicht allein die Grösse von a gegen b, sondern auch den Umstand mit anzeigt, daß Dividendum und Divisor einander entgegen gesetzt sind, so muß sie als eine solche betrachtet werden, die der vorigen entgegengesetzt ist, daß heißt, man muß $\frac{+a}{-b}$ oder $\frac{-a}{+b} = -n$ setzen. Das $+a$ und $-b$, oder $-a$ und $+b$ einander entgegengesetzt sind, kann keine Zahl als Zahl betrachtet für sich allein anzeigen: also muß es vermittelst eines andern Zeichens geschehen, und dazu dient das vorangesetzte Zeichen ($-$).

19. §.

Wenn + A : + B und + C : + D, oder + A : + B und − C : − D gleiche Verhältnisse sind; so können

+

+ A : + B und + C : — D, oder — A : — B = + C — D hier nicht als vier Proportionalgrössen betrachtet werden. Wenn A und B, C und D grade Linien sind, so kommt hier ausser der Grösse der einen gegen die andre zugleich die Lage mit in Betrachtung, man will nicht bloß wissen, wie sich A und B, so wie C und D in Ansehung der Grösse, sondern auch in Ansehung der Lage gegen einander verhalten. Wenn also die Glieder des einen Verhältnisses einander entgegen gesetzt sind, so müssen auch die Glieder des andern einander entgegen gesetzt seyn, wenn das eine Verhältniß mit dem andern völlig einerley seyn soll. Zwey positive Grössen aber können sich wie zwey negative Grössen gegen einander verhalten. Zwey negative grade Linien haben eben so, wie zwey positive grade Linien eine übereinstimmige Lage.

20. §.

Wenn man eine Zahl schlechthin nur als eine Menge mehrerer Dinge betrachtet, die entweder für sich als ganze, oder als Theile eines Ganzen angesehen werden; so kommt der Unterscheid des positiven gar nicht in Betrachtung. Wenn dagegen die Zahl beydes zugleich die Grösse und Lage einer graden Linie angeben soll, so muß man ihr eines von den beyden Zeichen + oder — voransetzen; das erste wenn diese Linie mit derjenigen, welche man für Eins annimmt, eine übereinstimmige Lage hat, das letzte aber, wenn sie der für Eins angenommenen entgegen gesetzt ist. Wenn man nun im letzten Fall die Zahl eine negative Zahl nennt, so hat es damit eben die Bewandniß, wie mit andern negativen Grössen, das negative liegt nur im Ausdruck nicht in der Sache. (4. §.)

Weil

Weil nun solche Zahlen nur für gleich groß, oder wie es hier eigentlich heissen müßte, für einerley Zahlen angenommen werden, die aus einer und eben derselben Einheit auf einerley Art entstanden sind, so sind hier $+n$ und $-n$ nicht gleiche oder nicht einerley Zahlen. Hat man eine Linie a für Eins angenommen, und ihre Lage mit $+$ bezeichnet, so sind $+na$ und $-na$ nicht einerley Linie, also auch $+n$ und $-n$ nicht einerley algebraische Zahlen, wenn es gleich einerley arithmetische Zahlen sind.

21. §.

Jedes Product entgegengesetzter Factoren ist negativ, und jedes Product nicht entgegengesetzter Grössen ist positiv, vorausgesetzt, daß die Einheit allemahl positiv genommen werde.

Beweis. Wenn $a \times b$ ein Product vorstellet, und nicht vielleicht a oder b für sich schon eine Zahl bezeichnet; so gehört doch der Natur der Sache nach zu dem einen Factor allemahl ein damit gleichartiger Divisor, den man für Eins angenommen hat. (165. §. Geom.) Wenn nun diese Einheit positiv angenommen wird, so ist eigentlich $a \times b = \frac{a}{+1} . b$, und nun kommt es darauf an, ob a und b entgegengesetzte, oder übereinstimmige Zeichen haben. Vermöge des 19. §. ist

$+1 : +a = -b : +a \times -b$
$+1 : -a = +b : -a \times +b$
$+1 : +a = +b : +a \times +b$
$+1 : -a = -b : -a \times -b$;

also muß $+a \times -b$, und $-a \times +b = -ab$, aber $+a \times +b$ und $-a \times -b = +ab$ seyn (19. §.).

22. §.

Diesen Schlüssen gemäß heißt mit einer negativen Zahl multipliciren nichts anders, als von der Grösse, welche dem Multiplicandus entgegen gesetzt ist, dasjenige Vielfache machen, welches der Multiplicator anzeigt: mit einer positiven Zahl multipliciren heißt von dem Multiplicandus selbst dieses Vielfache angeben. Wenn man sich an diese Begriffe hält, so weiß man schon von selbst, was für ein Zeichen dem Product jedesmahl vorangesetzt werden müsse. Nimmt man eine grade Linie AB für
178 Eins an; so kann man auf den Schenkeln des Win-
Fig. kels BAG nach Anleitung des 208. §. Geom. $AC = a$, $AD = b$ nehmen, und CE mit BD parallel ziehen, so wird $AE = a \times b$. Die Schenkel dieses Winkels können auch rückwärts nach ε und γ verlängert werden, alsdenn kann man $A\gamma = AC$ nehmen, und $\gamma\varepsilon$ mit BD parallel ziehen. Ohne nun auf die Lage der Linien zu sehen, hat man noch wie vorhin $AB : A\gamma = AD : AE$. Wenn aber auf die Lage dieser Linien mit Rücksicht genommen wird, so ist $A\gamma = -AC = -a$, $A\varepsilon = -AE$, mithin $A\varepsilon = -a \times b$. Nimmt man anstatt dessen $A\delta = AD$, und ziehet $C\varepsilon$ mit $B\delta$ parallel; so wird ebenfalls $AB : AC = A\delta : A\varepsilon$; nun aber ist $A\delta = -AD = -b$, und wiederum $A\varepsilon = -AE = -a \times b$. Nimmt man dagegen beydes $A\gamma = AC$, $A\delta = AD$, und ziehet durch γ eine grade Linie mit $B\delta$ parallel; so schneidet diese den andern Schenkel des Winkels wieder in E, wie im ersten Fall.

23. §.

Eine Grösse, die aus mehrern positiven und negativen Theilen zusammengesetzt ist, mit einer andern ebenfalls zusammengesetzten Grösse zu multipliciren.

Aufl. Man multiplicire nach einander alle Theile des Multiplicandi mit einem jeden Theil des Multiplicators nach dem 21. §. und bringe die einzelnen Producte alle in eine Summe nach den Regeln des 16. §.: so hat man das verlangte Product (192. §. G.) Kommen unter diesen Theilen Brüche vor: so multipli ire man sie, wie im 116. §. der Rechenkunst ist gezeigt worden. (198. §. G.)

Da die Ordnung der Factoren in jedem Product willkührlich ist; so kann man die Buchstaben, welche die Factoren ausdrücken, in der Ordnung schreiben, wie sie im Alphabeth nach einander folgen. Auf solche Art läßt es sich desto geschwinder übersehen, wie weit die Factoren zweyer Producte einerley oder verschieden sind.

Exempel.

$$\begin{array}{r} a+b \\ a+b \\ \hline ab+bb \\ aa+bb \\ \hline aa+2ab+bb \end{array}$$

$$\begin{array}{r} a-b \\ a-b \\ \hline -ab+bb \\ aa-ab \\ \hline aa-2ab+bb \end{array}$$

Aus Vergleichung dieser beyden Producte ergiebt sich die Folge, daß $(a+b)^2-(a-b)^2=4ab$ sey.

a + b

$$\begin{array}{r} a+b \\ a-b \\ \hline -ab-bb \\ aa+ab \\ \hline aa \text{ ——— } bb. \end{array} \qquad \begin{array}{r} a+b-c \\ b-c \\ \hline -ac-bc+cc \\ ab+bb-bc \\ \hline ab-ac+bb-2bc+cc. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5a+3b-9c+4d \\ 7b+2c-6d \\ \hline -30ad-18bd+54cd-24dd \\ +10ac+6bc-18cc+8cd. \\ 35ab+21bb-63bc+28bd. \\ \hline 35ab+10ac-30ad+10bd+62cd-24dd. \\ +21bb-57bc-18cc. \end{array}$$

24. §.

Entgegengesezte sonst aber gleichartige Grössen in einander dividirt geben eine negative Zahl, nicht entgegengesezte Grössen eine positive Zahl zum Quotienten.

Auch wenn der Divisor eine Zahl ist, so giebt der negative Divisor einen Quotienten, welcher dem Dividendus entgegengesezt ist, der positive Divisor aber einen Quotienten, der mit dem Dividendus einerley Zeichen behält.

Beweis. Die Richtigkeit des ersten Satzes erhellet schon aus dem 18. §. und der zweyte Satz folgt daraus, weil der Divisor eine Zahl seyn muß, die es anzeigt, wie vielmahl der Quotient im Dividendus enthalten sey. Wenn also diese Zahl negativ ist, so will das sagen, es solle nicht der Quotient selbst, sondern eine ihm entgegen gesezte Grösse soviel mahl im Dividendus enthalten seyn, als der Divisor angiebt. (18. §.)

1. Zu-

1. Zusatz. Wenn a und b grade Linien sind, so ist $\frac{a}{b} = q$ eine Zahl. Nimmt man alsdenn eine Linie für Eins an, so kann auch $\frac{a}{b} = \frac{q}{1}$ und q eine Linie seyn. Ist n eine Zahl und $\frac{a}{n} = q$, so ist q eine Linie. Wenn alsdenn wiederum eine Linie $= 1$, und $\frac{b}{1} = n$ ist, so stellt auch b eine Linie vor, und es bleibt $\frac{a}{b:1} = n$. Das ist nun eben soviel als $\frac{a}{b} \times 1 = n$. Weil nun im ersten Fall aus $\frac{a}{b} = \frac{q}{1}$ ebenfalls $\frac{a}{b} \times 1 = q$ folgt, so lassen sich diese Regeln durch eine ähnliche geometrische Construction, wie die Multiplicationsregeln im 22. §. erläutern.

2. Zusatz. Wenn in der 178 F. $AC = b$, $AB = 1$, $AE = a$ gesetzt wird; so hat man $AD = \frac{a}{b}$. Nimmt man nun $A\gamma$ statt AC oder $A\varepsilon$ statt AE, so giebt die Verzeichnung $A\delta$ statt AD: wird aber beydes zugleich $A\gamma$ statt AC, und $A\varepsilon$ statt AE genommen; so giebt die Verzeichnung AD eben so wie im ersten Fall.

25. §.

Eine zusammengesetzte Grösse mit einer einfachen zu dividiren.

Aufl. Man dividire nach einander alle Theile des Dividendi durch den gegebenen Divisor, so erhält man nach und nach die Theile, welche zusammen den Quotienten ausmachen. (192. §. G.)

Wenn also der Divisor selbst ein Factor des zu dividirenden Theils ist, so streiche man ihn weg: widrigenfalls drücke man den Quotienten durch einen Bruch aus, dessen Zähler der dividirte Theil, und dessen Nenner der Divisor ist; die Factoren aber, welche Zähler und Nenner dieses Bruchs etwa gemeinschaftlich haben, lasse man weg. Uebrigens setze man allemahl das Zeichen des Quotienten nach den Regeln des 24. §. voran.

Exempel.

$$\frac{abc + aab - aac}{bc} = a + \frac{aa}{c} - \frac{aa}{b}$$

$$\frac{abcd - aabc - aacd + aabb}{bbc} = \frac{ad}{b} - \frac{aa}{b} - \frac{aad}{b} + \frac{aa}{c}$$

$$\frac{8ffgg - 12fggh - 20gghh + ffhh}{-4ffhh} = -\frac{2gg}{hh} + \frac{3gg}{fh} \frac{5gg}{ff} - \frac{1}{2}.$$

26. §.

Eine zusammengesetzte Grösse mit einer andern zusammengesetzten zu dividiren.

Aufl. 1. Man ordne die Theile des Dividendi so, daß alle diejenigen zuerst nach einander folgen, die

die mit dem ersten Theil des Divisors gemeinschaftliche Factoren haben.

2. Man schreibe hiernächst den Divisor unter dem Dividendo, und dividire nach dem 24. §. das erste Glied des Dividendi durch des Divisors ersten Theil: so hat man den ersten Theil des Quotienten. Diesen multiplicire man in den ganzen Divisor, und subtrahire das Product vom Dividendo nach den Regeln des 17. §.

3. Den Rest dividire man nochmahl auf eben die Art, wie vorhin, so erhält man des Quotienten zweyten Theil. Dieses Verfahren setze man fort, bis entweder einmahl alles aufgeht, oder man setze zu den auf die Art gefundenen Theilen des Quotienten einen Bruch, dessen Zähler der letzte Rest, und dessen Nenner der Divisor ist. Diese Rechnungsregeln sind denjenigen in allen Stücken ähnlich, welche man anwenden muß, wenn Dividendus und Divisor mit Ziffern bezeichnete Zahlen sind, und man siehet leicht, daß die im 68. §. der Rechenkunst vorgetragenen Gründe davon hier ebenfalls ihre Anwendung finden.

Exempel.

$$\begin{array}{r|l} aa - 2ab + bb & a - b \\ a - b & \\ \hline aa - ab & \\ \hline -ab + bb & \\ a - b & \\ -ab + bb & \\ \hline 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} aa - bb & a - b \\ a + b & \\ \hline aa + ab & \\ \hline -ab - bb & \\ a + b & \\ ab - bb & \\ \hline 0 & \end{array}$$

$$35ab+21bb-57bc+10bd+10ac-30ad-18cc+62cd-24dd \;\Big|\; 5a+3b-9c+4d.$$

div.) $7b+2c-6d$

$35ab+10ac-30ad$

$+21bb-57bc+10bd-18cc+62cd-24dd$

$7b+2c-6d$

$+21bb+6bc-18bd$

$-63bc+28bd-18cc+62cd-24dd$

$7b+2c-6d$

$-63bc-18cc+54cd$

$+28bd+8cd-24dd$

$7b+2c-6d$

$+28bd+8cd-24dd$

0

1. Zusatz. Vermittelst einer solchen Division kann einem Bruch wie $\frac{a}{b+c}$ die Form einer Reihe gegeben werden, worin die folgenden Glieder nach einem gemeinschaftlichen Gesetze aus einem oder mehrern vorhergehenden entstehen, wie die nachstehende Rechnung zeiget

$$\begin{array}{l|l} a & \frac{a}{b} - \frac{a}{b}\frac{c}{b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{c^2}{b^2} - \frac{a}{b}\cdot\frac{c^3}{b^3} \\ b+c & \end{array}$$

$$\begin{array}{l} a + \frac{ac}{b} \\ \hline -\frac{ac}{b} \\ \quad b+c \\ -\frac{ac}{b} - \frac{ac^2}{b^2} \\ \hline +\frac{ac^2}{b^2} \\ \quad b+c \\ +\frac{ac^2}{b^2} + \frac{ac^3}{b^3} \\ \hline -\frac{ac^3}{b^3} \\ \quad b+c \\ -\frac{ac^3}{b^3} - \frac{ac^4}{b^3} \\ \hline +\frac{ac^4}{b^4} \end{array}$$

Man siehet leicht, daß die Division allemahl einen Rest lassen werde, und daß man den Quotienten nie ganz in Form einer solchen Reihe erhalten könne, wie das auch oft der Fall ist, wenn man einen gewöhnlichen mit Ziffern geschriebenen Bruch auf Decimaltheile bringt. (137. §. Rech.) In dem oben stehenden Exempel erhält man eine geometrische Progres-

sion, wovon $\frac{a}{b}$ das erste Glied, und $\frac{c}{b}$ der Exponent ist, die man auch leicht ohne Division weiter fortsetzen kann, wenn man die Potenzen von c und b wie im 180. §. der Rechenkunst bezeichnet. Es ist nemlich

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b}\cdot\frac{c}{b} + \frac{a}{b}\cdot\frac{c^2}{b^2} - \frac{a}{b}\cdot\frac{c^3}{b^3} + \frac{a}{b}\cdot\frac{c^4}{b^4} - \frac{a}{b}\cdot\frac{c^5}{b^5} + \ldots\ldots + \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{2n}}{b^{2n}} - \frac{a}{b}\cdot\frac{c^{2n+1}}{b^{2n+1}} + \frac{ac^{2n+2}}{b^{2n+2}(b+c)}.$$

Man mag die Division so weit man will fortgesetzt haben, so fehlt doch noch allemahl der letzte Rest, der auch noch mit dem Divisor dividirt, und der Reihe als Ergänzung beygefüget werden muß.

2. Zusatz Weil $\frac{a}{b+c} = \frac{a:b}{1+c:b} = \frac{a}{b} : \frac{1}{1+c:b}$ ist; so kann man auch $\frac{c}{b} = x$ setzen, da dann vermittelst der Division $\frac{1}{1+x}$

$= 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5 + \ldots\ldots + x^{2n} - x^{2n+1} + \frac{x^{2n+2}}{1+x}$ gefunden wird, welches eben die vorige Reihe giebt, wenn man mit $\frac{a}{b}$ multiplicirt, und $\frac{c}{b}$ wieder anstatt x setzet.

3. Zus

3. Zusatz. In allen Fällen, wenn auch mehrere Theile des Quotienten in Form ganzer Zahlen gefunden sind, zuletzt aber ein Rest bleibt, kann man diesen Rest weiter fort dividiren, und noch mehrere Theile des Quotienten unter der Form von Brüchen finden, da dann nach Endigung der Operation jedesmahl die Ergänzung der Reihe noch beygefüget werden muß.

Der II. Abschnitt.

Die ersten Grundbegriffe von veränderlichen Grössen und den Gränzen ihrer möglichen Werthe.

27. §.

Jede Gleichung zwischen zweyen unbekannten Grössen, wie $x + y = 30$, $10x + 15y = 390$, (269. §. Rech.) drückt das Gesetz aus, nach welchem die eine y von der andern x, oder umgekehrt x von y abhängt: auch kommt es bey den wichtigsten Untersuchungen, die man in der Mathematik anstellet, gewöhnlich nicht so sehr darauf an, daß man bestimmte Werthe für die unbekannten Grössen angebe, als vielmehr nur darauf, daß man das Gesetz finde, nach welchem zwey oder mehr solche Grössen von einander abhängen, die vielleicht auch ihrer Natur nach beständigen Veränderungen unterworfen sind. Wenn ein Stein oder sonst etwas schweres von einer ansehnlichen Höhe herabfällt, so verläuft während der Be-

wegung Zeit, und die Höhe des Falles ändert sich beständig, so wie mehr Zeit verläuft. Wenn man also eine Gleichung sucht, welche das Gesetz ausdrückt, wie die Höhe des Falles und die Zeit, worin die Bewegung erfolgt, von einander abhängen, so bedarf es dessen nicht, daß man der Zeit oder der Höhe des Falles bestimmte Werthe beylegt, man betrachtet beyde als Grössen, die ihrer Natur nach veränderlich sind. Solche Grössen, die ein für allemahl bestimmte Werthe haben, nennt man beständige Grössen. Bey Verzeichnung eines Kreises um einen gegebenen Mittelpunct bleibt der Halbmesser eine beständige Grösse, wenn gleich Bogen und Winkel am Mittelpunct sich allemahl zugleich ändern.

28. §.

184 Fig. Auf der Hypothenuse CT eines bey A rechtwinklichten Dreyeckes ACT ist CB der Grundlinie CA gleich angenommen, und BD auf AC senkrecht: man soll eine Gleichung zwischen der Hypothenuse CT und dem Segment CD der Grundlinie finden.

Aufl. Die Dreyecke ACT und DCB sind einander ähnlich, (210. §. Geom.) also ist $CD : CB = AC : CT$. Vermöge der Voraussetzung aber ist $CB = AC$, also auch $CD : AC = AC : CT$, und daraus folgt $CD \cdot CT = AC^2$. Ein Kreis aus dem Mittelpunct C mit dem Halbmesser CA beschrieben geht durch B, und wenn gleich der Winkel ACT grösser oder kleiner genommen wird, so bleibt doch CB von beständiger Grösse, wenn CA wie hier vorausgesetzt wird, einerley bleibt: dagegen ändern sich mit dem Winkel zugleich CD und CT. Man setze

die

die beständige Grösse CA = CB = r, die veränderlichen Grössen CD = x, CT = y, so ist $xy = r^2$

die gesuchte Gleichung, oder $y = \frac{r}{x} . r$.

29. §.

Aus dieser Gleichung kann man die nachstehenden Folgen ziehen. Je kleiner x angenommen wird, desto grösser wird die Zahl $\frac{r}{x}$, mithin auch y desto grösser; umgekehrt aber, je grösser x angenommen wird, desto kleiner wird $\frac{r}{x}$ also auch y. Weil B allemahl in der Peripherie des Kreises bleibt, so kann CD nie grösser, als CA, also x nie grösser als r werden, mithin $\frac{r}{x}$ nie kleiner als 1, und y nie kleiner als r. Wenn B durch A nach P rückte, so würde CD oder x wieder abnehmen, also $\frac{r}{x}$ und zugleich y wieder wachsen: demnach ist r eine Gränze, unter welche y nicht abnehmen, so wie der Bruch $\frac{r}{x}$ nicht kleiner als 1 werden kann. Dagegen kann CD oder x so weit man will abnehmen. Wenn der Bogen AF ein Quadrant ist, und B nach F rückt, so wird CD immer kleiner, und wenn B mit F zusammen fällt, so fällt BD mit FC, so wie D mit C zusammen, also ist nun $x = 0$, und $y = \frac{r}{0} . r$: demnach kommt es zur Frage, was nun $\frac{r}{0}$ für eine Zahl bezeichne? Die Antwort auf diese Frage folgt zwar

aus den bekanntesten Gründen der Rechenkunst und Geometrie: indessen sind doch einige vorläufige Betrachtungen nöthig, um dieser Sache alles nöthige Licht zu geben.

30. §.

Wenn $\frac{r}{x}$ eine Zahl vorstellen soll, so muß man angeben können, wievielmahl x in r enthalten sey; je kleiner x ist, desto grösser ist die Zahl $\frac{r}{x}$, welche dieses anzeigt. Aber x kann nicht kleiner als 0 werden, also kann $\frac{r}{x}$ nie grösser, als $\frac{r}{0}$ werden: mithin muß $\frac{r}{0}$ eine Gränze seyn, die man beym Fortzählen nie erreichen, über die man also noch weniger hinauszählen kann. So lange CD oder x noch ein Theil von r oder von AC bleibt, der sich angeben läßt, so lange kann man auch zählen, wievielmahl CD in AC enthalten sey, das heißt, man kann die Zahl $\frac{r}{x}$ noch angeben. Diese Zahl sey m, also $m = \frac{r}{x}$, so muß m eine solche Zahl seyn, welche der Bedingung ein Genüge leistet, daß allemahl $m.x = r$ bleibe. Soll alsdenn auch x jedesmahl einen aliquoten Theil von r vorstellen, so ist m eine ganze Zahl, und die Gleichung stellet das Ganze als ein Product vor, welches durch eine Multiplication des Theiles mit der Zahl der Theile entstehet. Es

muß

muß demnach $x = \frac{1}{m} r$ seyn, und die Gleichung

sagt nichts weiter, als es solle allemahl $m \cdot \frac{1}{m} r$

$= r$ bleiben, oder welches einerley ist $m \cdot \frac{1}{m} = 1$,

wenn r für Eins angenommen wird. Es ist offenbar, daß $\frac{1}{m}$ der Gränze o immer näher kommt, je grösser m angenommen wird. Weil wir aber viel zu sehr gewohnt sind, allemahl an eine Zahl zu denken, die noch grösser werden kann, so scheint es, daß nie $\frac{1}{m}$ $= o$ werden könne: auch ist es vollkommen richtig, daß keinesweges $\frac{1}{m} = o$ sey, wenn m eine bestimmte Menge bezeichnet, die sich angeben, oder zählen läßt, sie sey so groß als sie wolle.

31. §.

Unter der Bedingung, wenn $\frac{1}{m}$ die Gränze o erreichen sollte, müste ohne Zweifel auch m eine Gränze erreichen, über welche man nicht hinaus zählen, ja die man beym wirklichen Fortzählen auch nie erreichen könnte: kurz m müßte eine nicht mehr zählbare Menge werden. Diesen Bedingungssatz drückt man in der kurzen algebraischen Zeichensprache so aus:

wenn $\frac{1}{m} = o$ werden soll, so muß $m = \infty$ wer-

den, man braucht eigentlich nur die Zeichen $\frac{1}{\infty}$ und

o

$\frac{0}{0}$ als gleichgültige Zeichen. Aus $m \cdot \frac{1}{m} = 1$ folgt $m = \frac{1}{(1 : m)}$, also ist auch der Bedingungssatz richtig, wofern der Divisor $(1 : m) = 0$ werden soll, so muß der Quotient $\frac{1}{0} = \infty$ werden, oder eine Menge, die man nicht mehr zählen kann. Kurz, dem Algebraisten sind auch die Zeichen $\frac{1}{0}$ und ∞ gleichgültige Zeichen. Wenn man sich eine Reihe von Brüchen mit wachsenden Nennern vorstellet, die alle den Zähler 1 haben, wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$, u. s. w. so stehen sie mit den wachsenden ganzen Zahlen 2, 3, 4, 5, u. s. f. im umgekehrten Verhältnisse. Jeder von diesen Brüchen druckt einen gewissen Theil des Ganzen aus, und der Nenner giebt an, der wievielste Theil der Bruch vom Ganzen sey. Die Null ist gar kein Theil vom Ganzen mehr, also kann man auch nicht mehr zählen, wievielmahl sie genommen werden müste, um das Ganze herzustellen; auch umgekehrt, wenn man nicht mehr zählen kann, wievielmahl ein Theil im Ganzen enthalten ist, so ist er gar kein Theil des Ganzen mehr, er ist das, was man sonst mit 0 bezeichnet.

32. §.

Aus diesen Schlüssen folgt, daß man sich die Null als den letzten unter allen beständig abnehmenden Brüchen vorstellen könne, als einen Bruch, dessen Zähler 1 ist, dessen Nenner aber die letzte unter allen

llen ganzen Zahlen seyn muß, wovon sich der Ver-
tand einen Begriff machen kann. Diese letzte un-
er allen ganzen Zahlen kann man beym Fortzählen
reylich nie erreichen, es ist aber auch nicht die letzte,
ie man angeben, sondern die letzte, welche
ich der Verstand vorstellen kann: alle denk-

are Zahlen sind zwischen den beyden Gränzen $o = \frac{1}{\infty}$

und $\infty = \frac{1}{o}$ enthalten, was wir Eins nennen,

befindet sich in der Mitte zwischen diesen beyden Grän-
zen. Das Zeichen o sprechen wir mit dem längst be-
kannten Wort Null aus, um auch das Zeichen ∞
auszusprechen, hat man bey algebraischen Rechnun-
gen das Wort unendlichgroß eingeführt. Eine
unendlichgrosse Zahl ist eine Menge, die man nicht
mehr zählen kann: also kann im Gegensatz jede Men-
ge, die sich zählen lässet, eine endliche Zahl heissen.

Die Aehnlichkeit der Bezeichnung $o = \frac{1}{\infty}$ mit

$\infty = \frac{1}{o}$ hat übrigens auch veranlasset, daß man

das Zeichen $\frac{1}{\infty}$ durch das Wort unendlichklein

ausdrückt: es ist aber besser, daß man diesen Sprach-
gebrauch vermeide, weil er ganz unnöthig ist, und
sehr leicht ganz falsch verstanden wird. Manche
Schriftsteller reden wirklich so davon, daß es das
Ansehen hat, als wenn das so genannte Unendlich-
kleine ein Mittelding zwischen Nichts und Etwas
wäre.

33. §.

184 Fig. Nach den Grundsätzen der Geometrie bleibt ACT kein Dreyeck mehr, wenn $ACB = ACF = 90°$ werden soll, nun werden AT und CB parallele Linien, die einander nicht mehr schneiden können: also hat das Dreyeck keine Spitze, AT, CB, haben keinen gemeinschaftlichen Endpunct mehr, worin sie einander schneiden könnten. Demnach fällt die Frage, wie lang nun CT sey? von selbst weg, man würde antworten müssen, CT lasse sich nicht mehr ausmessen. Grade eben dasselbe zeigt die Gleichung $y = \frac{r}{x} . r$ im 28. und 29. §. an, wenn man $x = \frac{1}{m} r$ setzt, weil alsdenn $y = m . r$ gefunden wird. Die Bedingung, daß $ACB = 90°$ werden solle, erfodert, daß $x = 0$, also $\frac{1}{m} r = 0$, mithin $\frac{1}{m} = 0$, und $m = \infty$, werde. Wenn das ∞ eine Menge vorstellet, die man nicht mehr zählen kann, so ist nun $y = \infty r$ eine Länge, die man nicht mehr messen kann, sie ist unbegränzt, unendlichgroß, weil kein Endpunct vorhanden ist. Um die Grösse der Hypothenuse CT durch eine Zahl auszudrucken, muß man ein Maaß haben; die Gleichung $y = \frac{r}{x} . r$ nimmt an, $r = AC$ sey dieses Maaß, so lange $ACB < 90°$ ist, kann man zählen, wievielmahl AC in CT enthalten sey, nur nicht mehr, wenn $ACB = 90°$ ist.

34. §.

Das Zeichen $\frac{y}{r}$, wenn man y als eine veränderliche Hypothenuse des rechtwinklichten Dreyeckes, r aber als die beständige Grundlinie betrachtet, stellet alle mögliche Zahlen vor, die > 1 sind: umgekehrt stellet $\frac{x}{r}$, oder $\frac{CD}{AC}$ alle mögliche Zahlen vor, die kleiner als 1 sind, oder alle mögliche ächte Brüche. Nimmt man an, daß der Winkel $ACB > 90°$ werden soll, wie wenn B nach G rückte, so giebt es oberhalb der Grundlinie AC so wenig ein Dreyeck, als in dem Fall $ACB = 90°$: dagegen schneiden nun CG und AT einander unterhalb der Grundlinie in S, und die lothrechte Linie GH fällt nun so, daß CH eine Lage erhält, die der Lage CD entgegengesetzt ist. Wenn man also annimmt, D sey nach H gerückt, so ist CH nun ein negativer Werth von x in der Gleichung $y = \frac{r}{x} \cdot r$, auch giebt diese Gleichung für y einen negativen Werth, (24 §.) und dieser Werth ist AS, weil nun die Lage CS der Lage CG entgegengesetzt ist. Der $\circ$ kann man $+$ oder $-$ voransetzen, wie man will, die $\circ$ ist weder ein positiver noch ein negativer Werth der veränderlichen Grösse x: dieserwegen hat auch ein Werth wie $\frac{r}{\circ}$ oder $\frac{1}{\circ} r = \infty r$ kein bestimmtes Zeichen $+$ oder $-$. In dem Fall wenn $ACB = 90°$ wird, also D in C fällt, giebt es weder oberhalb noch unterhalb AC einen Durchschnittspunct für AT und CB. So wie B durch F weiter

nach

nach G rückt, gehen die anfangs abnehmenden positiven Werthe x in wachsende negative über, zugleich aber verwandeln sich die anfangs wachsenden positiven Werthe y in abnehmende negative. So wie o die Gränze ist zwischen den positiv abnehmenden und wieder negativ wachsenden Werthen x, so ist $\frac{1}{0} = \infty$ die Gränze zwischen den positiv wachsenden und hiernächst negativ wieder abnehmenden Werthen y.

35. §.

Weil allemahl $m \cdot \frac{1}{m} = 1$ bleibt, was auch m bezeichnen soll, so muß auch $\infty \cdot \frac{1}{\infty} = 1$ bleiben, und das liesse sich auch so schreiben $\infty \cdot 0 = 1$. Ein Ausdruck dieser Art bedeutet nichts anders als alle Theile des Ganzen zusammen, und wenn sie auch so klein wären, daß kein Bruch klein genug wäre, jeden Theil für sich allein anzugeben. Wenn sich ein solches Zeichen bey algebraischen Rechnungen hervorgiebt, so ist das ein bestimmter Werth einer veränderlichen Grösse, der mit einem bestimmten Werth einer andern veränderlichen Grösse, wovon jene abhängt, zusammen gehört. Diesen Werth kann jenes Zeichen nicht unmittelbar anzeigen, er muß alsdenn auf andre Art aus der Gleichung zwischen beyden veränderlichen Grössen gesucht werden. Wäre $y = \frac{1}{a - x}(aa - xx)$, so würde man $y = \infty \cdot 0$ finden, wenn man $x = a$ setzte. Man siehet aber gleich

gleich, daß diese Formul auch $y = a + x$ gebe, wenn man $aa - xx$ mit $a - x$ dividirt: also wird $y = 2a$, wenn $x = a$ ist.

36. §.

Wenn man $\frac{1}{0}$ anstatt ∞ setzt, so ist $\infty . 0$ auch soviel als $\frac{0}{0}$: auch kann man $\frac{1}{\infty}$ anstatt 0 schreiben, so verwandelt sich das Zeichen $\infty . 0$ in $\frac{\infty}{\infty}$. Mit allen solchen Zeichen hat es also eine ähnliche Bewandniß, sie geben sich in gewissen Fällen hervor, wenn das Gesetz, nach welchem eine veränderliche Grösse von einer andern abhängt, in eine Gleichung gebracht ist, und wenn alsdenn der einen ein bestimmter Werth beygelegt wird, um den damit zusammengehörigen Werth der andern zu finden. Wenn man die im vor. §. als Beyspiel gebrauchte Gleichung so ausdrückt $y = \frac{aa - xx}{a - x}$, so wird $y = \frac{0}{0}$, wenn man $x = a$ setzt. Wenn man auch nicht so leicht übersehen könnte, wie es im vor. §. schon bemerkt ist, daß dieser Werth $y = 2a$ sey, so könnte man es so finden. Man setze $a - x = z$, so ist $x = a - z$, und es wird $y = \frac{2az - zz}{z} = 2a - z$. Soll nun $x = a$ also $z = 0$ seyn, so erhält man $y = 2a$.

37. §.

Aus diesem allen erhellet, daß man bey algebraischen Rechnungen zwar in gewissen Fällen, und bey

der nöthigen Vorsicht, Fehlschlüsse zu verhüten, mit den Zeichen 0 und ∞ so umgehen könne, als wenn sie noch wirklich ausmeßbare Grössen, wie sonst die Buchstaben des Alphabeths, bezeichneten, daß aber hieraus nicht folge, man könne Nullen oder unendlichgrosse Zahlen, Linien, u. s. w. noch eben so, wie endliche oder ausmeßbare Grössen vergleichen. Wir haben keinen Begriff von einer Null die 2mahl, 3mahl und mehrmahl gröſſer, als eine andre seyn könnte, also kann auch das, was man unendlichgroß nennt, nicht 2mahl, 3mahl und mehrmahl grösser, als ein andres unendlichgrosses seyn. Es ist 2 . 0, 3 . 0, nichts anders als 0, also auch 2 . ∞, 3 . ∞ nichts anders als ∞. Sobald eine veränderliche Grösse die Gränze 0 oder $\frac{1}{0} = \infty$ erreicht, sobald fällt alle fernere Vergleichung weg. Grössen, die man mit einander vergleichen soll, müssen noch ausmeßbare Grössen seyn.

38. §.

Wenn algebraische Rechnungen so etwas anzuzeigen scheinen, so hat es damit allemahl eine ganz andre Bewandniß. Wenn das eine Glied eines geometrischen Verhältnisses veränderlich ist, so ist das Verhältniß selbst ein veränderliches oder unbestimmtes Verhältniß: in dem Fall aber, wenn beyde Glieder veränderlich sind, ändert sich das Verhältniß nicht allemahl, wenn sich beyde Glieder zugleich ändern. Der Exponent des Verhältniß kann vermittelst der Division gesucht werden, da es sich denn von selbst zeigen muß, ob derselbe ebenfalls Aenderung leide, wenn sich beyde Glieder des Verhältnisses

zugleich ändern. Vielleicht können beyde Glieder des Verhältnisses zugleich verschwinden, oder beyde zugleich unendlich groß werden, und der Exponent alsdenn eine gewisse noch zu bestimmende Gränze erreichen, welche alsdenn durch solche Zeichen, wie $\frac{0}{0}$ oder $\frac{\infty}{\infty}$ nicht würde bestimmt angezeigt werden, wenn man sie nicht auf andre Art fände.

39. §.

Wenn man im rechtwinklichten Dreyeck ACT wie im 28. §. $AC = b$, $CT = y$, und $AT = z$ setzet, so ist $zz = yy - aa$, (111. §. Geom.) also auch $zz = yy\left(1 - \frac{aa}{yy}\right)$, und $\frac{z}{y} = \sqrt{\left(1 - \frac{aa}{yy}\right)}$. 184 Fig.

Der Exponent dieses Verhältnisses kommt dem Werth $= 1$ immer näher, je mehr der Winkel ACB dem rechten Winkel nahe kommt, und in dem Fall, wenn $ACB = 90°$ ist, hat man $\frac{z}{y} = 1$, welches die Gränze dieses Verhältnisses ist: in allen andern Fällen bleibt $\frac{z}{y} < 1$. Wenn die veränderlichen Grössen u und w so von x abhängen, daß $u = bx + c$, $w = ax$ ist, so erhält man $\frac{u}{w} = \frac{bx + c}{ax}$,

also $\frac{u}{w} = \frac{b}{a} + \frac{c}{ax}$. Ob nun gleich u und w mit x zugleich wachsen, so wird doch der Exponent

des Verhältnisses $\frac{u}{w}$ kleiner, wenn x grösser wird, und mit dem Werthe $x = \infty$, gehört der Werth $\frac{u}{w} = \frac{b}{a}$ zusammen. Für abnehmende negative Werthe x wird $\frac{u}{w} < \frac{b}{a}$, eben dieser Exponent verschwindet, wenn $x = -\frac{b}{c}$ ist, und wird hiernächst ebenfalls negativ, wenn der negative Werth von x noch weiter abnimmt.

Zusatz. Sucht man umgekehrt den Werth $\frac{w}{u}$, so findet man $\frac{w}{u} = \frac{a}{b + c : x}$, und dieser Werth wächst mit x, weil $c : x$ abnimmt: die Gränze aber ist $= \frac{a}{b}$.

40. §.

Wäre $u = bx + cx^2$, und $w = ax$, so hätte man $\frac{u}{w} = \frac{b + cx}{a} = \frac{b}{a} + \frac{cx}{a}$. Die Glieder dieses Verhältnisses nehmen mit x zugleich ab, und verschwinden beyde, wenn x verschwindet. Zugleich wird der Exponent des Verhältnisses $\frac{u}{w}$ kleiner, und er erreicht die Gränze $\frac{b}{a}$, wenn x verschwindet. Es verstehet sich von selbst, daß keinesweges $w = 0$ in $u = 0$

$u = o$ sovielmahl, als a in b enthalten seyn könne, wenn vielleicht b hundert und mehrmahl grösser als a wäre. Dieses alles will nichts weiter sagen, als daß $\frac{b}{a}$ derjenige Werth sey, unter welchem $\frac{u}{w}$ nicht abnehmen kann. Wenn das Gesetz bekannt ist, wie eine veränderliche Grösse von der andern, oder vielleicht beyde von einer dritten abhängen, so findet man leicht die Gränzen solcher Verhältnisse: der vorzüglichste Nutzen dieser Betrachtungen aber giebt sich alsdenn hervor, wenn man unbekannte Verhältnisse sucht, und wenn es sich alsdenn vielleicht ergiebt, daß das gesuchte Verhältniß der Gränze irgend eines schon bekannten veränderlichen Verhältnisses gleich seyn müsse.

41. §.

Es bezeichne Π die Peripherie eines Kreises, wozu der Halbmesser r gehört, und n sey eine ganze Zahl, also $\frac{1}{n}\Pi$ ein aliquoter Theil der Peripherie.

Die zu dem Bogen $\frac{1}{n}\Pi$ gehörige Sehne bezeichne man auf die Art $\text{chord}\,\frac{1}{n}\Pi$, so ist diese zugleich die Seite eines innern regulären Polygons, und die Peripherie desselben ist $n \,.\, \text{chord}\,\frac{1}{n}\Pi$. Ferner sey der kleinste Halbmesser $= \varrho$, so ist $\varrho = \sqrt{\left(r^2 - \frac{1}{4}(\text{chord}\,\frac{1}{n}\Pi)^2\right)}$, und die Fläche

$= \frac{1}{2} n \varrho$. chord $\frac{1}{n} \Pi$. Setzt man nun die Peripherie dieses innern regulären Polygons $= p$, die Peripherie des ähnlichen äussern $= P$, so ist $\frac{\Pi}{p} < \frac{P}{p}$, und die Zahl n kann so groß angenommen werden, daß der Exponent des Verhältnisses $\frac{P}{p}$ folglich auch $\frac{\Pi}{p}$ kleiner wird, als jede Zahl, welche 1 übertrift (222. §. Geom.) jedoch kann $\frac{\Pi}{p}$ nie kleiner als 1 werden: also ist des Verhältnisses $\frac{\Pi}{p} = \frac{\Pi}{n \text{. chord } \frac{1}{n} \Pi}$ Gränze $= 1$. Um diese Gränze zu bezeichnen, schreibt man ∞ anstatt n, und setzt $\frac{\Pi}{\infty \text{. chord } \frac{1}{\infty} \Pi} = 1$. Soweit ist alles ganz richtige algebraische Zeichensprache, allein man muß nicht weiter schliessen, also ist $\Pi = \infty$. chord $\frac{1}{\infty} \Pi$, und das nun in die gewöhnliche Sprache so übersetzen: die Peripherie eines Kreises sey mit der Peripherie eines regulären Polygons einerley, das unendlich viele unendlich kleine Seiten habe. Ein solches reguläres Polygon ist ein geometrisches Unding, wenn gleich das algebraische Zeichen seine sehr richtige Bedeutung hat.

Zusatz. Weil $\frac{\Pi}{n \text{ chord } \frac{1}{n} \Pi} = \frac{\frac{1}{n} \Pi}{\text{chord. } \frac{1}{n} \Pi}$,

so

so ist auch die Gränze dieses Werthes $\frac{\frac{1}{n}\Pi}{\text{chord}\,\frac{1}{n}\Pi} = 1$.

Wenn nun A einen Bogen von eben derselben Peripherie Π bezeichnet, und $\frac{A}{\Pi} = \frac{m}{n} + \frac{R}{\Pi}$ ist, vorausgesetzt, es müsse m von n so abhängen, daß $\frac{R}{\Pi} < \frac{1}{n}$ bleibe; (172. §. Geom.) also auch $\frac{nR}{\Pi} < 1$; so hat man ferner $\frac{\frac{m}{n}\Pi}{m\,\text{chord}\,\frac{1}{n}\Pi} = \frac{\frac{1}{n}\Pi}{\text{chord}\,\frac{1}{n}\Pi}$, und die Gränze dieses Werthes bleibt $= 1$. Ueberdem ist nun $\Pi = A : \left(\frac{m}{n} + \frac{R}{\Pi}\right)$, also

$$\frac{1}{n}\Pi = \frac{1}{n}A : \left(\frac{m}{n} + \frac{R}{\Pi}\right) = A : \left(m + \frac{nR}{\Pi}\right) = \frac{A}{m+\mu},$$

wenn $\frac{nR}{\Pi} = \mu$ gesetzt wird: mithin ist auch die Gränze des veränderlichen Werthes $\frac{\frac{m}{n}\Pi}{m\,\text{chord}\,\frac{1}{m+\mu}A} = 1$. Nun setze man für n die Gränze ∞, oder welches einerley ist, man setze $\frac{1}{n} = 0$, so wird auch $\frac{R}{\Pi} = 0$, $\frac{1}{m} = 0$, $\frac{\mu}{m} = 0$,

$\frac{m}{n}\Pi = A$, und man erhält $\frac{A}{m.\,\text{chord}\,\frac{1}{m}A} = 1$:

mithin wird zugleich die Gränze $\frac{\frac{1}{m}A}{\text{chord}\,\frac{1}{m}A} = 1$.

42. §.

Wenn man die Fläche des Kreises $= C$, die Fläche des innern regulären Polygons $= q$, die Fläche des ähnlichen äussern $= Q$ setzt; so ist $q = \frac{1}{2} n \varrho . \text{chord} \frac{1}{n} \Pi$, und

$$Q = \frac{rr}{\varrho\varrho} . \tfrac{1}{2} n \varrho \, \text{chord} \frac{1}{n} \Pi = \tfrac{1}{2} . \frac{r}{\varrho} . r . n \, \text{chord} \frac{1}{n} \Pi .$$

Nun ist $\frac{C}{q} < \frac{Q}{q}$, und man kann die Zahl n so groß annehmen, daß $\frac{Q}{q}$ also auch $\frac{C}{q}$ kleiner wird, als jede Zahl, welche 1 übertrift: dagegen kann nie $\frac{C}{q} < 1$ werden. Diesemnach ist des Verhältnisses $\frac{C}{q}$ Gränze $= 1$, und wenn man, um diese Gränze zu bezeichnen, $n = \infty$ setzt, so wird auch $\frac{r}{\varrho}$

$$= \frac{r}{\sqrt{(r^2 - \frac{1}{4}(\text{chord} \frac{1}{\infty} \Pi)^2)}} = 1, \text{ weil } \frac{1}{\infty} \Pi = 0,$$

also auch $\text{chord} \frac{1}{\infty} \Pi = 0$ ist: demnach erhält man

$$\frac{C}{\frac{1}{2} r . \infty \, \text{chord} \frac{1}{\infty} \Pi} = 1. \quad \text{Daraus folgt}$$

$$\frac{C . \Pi}{\frac{1}{2} r . \infty . \text{chord} \frac{1}{\infty} \Pi} = \Pi, \text{ oder } \frac{C}{\frac{1}{2} r} = \Pi, \text{ weil}$$

$$\frac{\Pi}{\infty . \text{chord} \frac{1}{\infty} \Pi} = 1 \text{ wird, (41. §.) mithin } C$$

=

$= \frac{1}{2} r$. Π. Das ist der Archimedische Lehrsatz im 150. §. der Geometrie, und die hier gebrauchte Art zu schliessen ist nichts anders als eine Uebersetzung der a. a. O. vorgetragenen geometrischen Beweisart in die algebraische Zeichensprache.

43. §.

Mit dieser Zeichensprache muß man aber innerhalb der Gränzen algebraischer Rechnungen bleiben, man muß sie nicht in die gewöhnliche Wörtersprache übersetzen, und so reden, als wenn die Zeichen ∞, 0, oder $\frac{1}{\infty}$ etwas ausdrückten, damit man noch eben so als mit endlichen Grössen umgehen könnte. Am allerwenigsten muß man solche Lehren, die zur reinen Geometrie gehören, in eine von dieser Zeichensprache hergenommene Wörtersprache einkleiden. Es ist das freylich häufig geschehen, und man hat diese Sprache sogar in Handbücher der Elementargeometrie übergetragen, die zum ersten Unterricht für Anfänger bestimmt sind; allein es hat der Wissenschaft keinen Vortheil gebracht. Eine besondre Veranlassung hat mich bewogen, in einer eigenen Abhandlung: **Vom Mathematisch-Unendlichen mit Rücksicht auf eine im Jahr 1784 aufgegebene Preisfrage**, mich über das alles umständlicher zu erklären, als hier geschehen kann. Man findet diese Abhandlung in einer von mir vor kurzen herausgegebenen Sammlung kleiner Schriften von mathematischen und physischen Innhalt, Halle 1786.

Der III. Abschnitt.

Von den Potenzen und ihren Wurzeln.

44. §.

Wenn ein Product aus lauter gleichen Factore bestehet, so heißt es eine Potenz oder Dig nität eines jeden dieser Factoren; dergleichen wär *aaa*, *bbbb* u. s. f. (181. §. Rech.) Jeder von de gleichen Factoren, deren Product in einander die Po tenz ausmacht, heißt die Wurzel dieser Dignität und eine solche Dignität hat den Nahmen von der Anzahl der gleichen Factoren, die sie ausmachen. Das Product *aa* ist die zweyte, *aaa* die dritte, *aaaa* die vierte Dignität von *a*, die erste Dignität von *a* ist *a* selbst. Die zweyte Dignität ist also mit der Quadratzahl, und die dritte Dignität mit der Cubik zahl (180. §. Rech.) einerley. Aeltere Nahmen der 4ten und der weiter folgenden höhern Potenzen sind Zensizensus, (die Quadratzahl hieß Zensus) Sur desolidum, Zensicubus, Bsurdesolidum, Zen sizenzensus, Cubicubus, Zensurdesolidus, Csurdesolidus, Zensizensicubus, u. s. f. Die vierte Potenz wird auch jetzt noch Biquadratzahl genannt.

45. §.

Die im 181. §. der Rechenkunst schon festgesetzte Bezeichnung der Potenzen wird hier beybehalten. Oberwärts zur rechten der Wurzel setzt man eine klei ne Ziffer, welche die Anzahl der gleichen Wurzeln aus-

usdrückt, welche durch die Multiplication in einander, die Potenz ausmachen, und diese Ziffer heißt er Index oder Exponent der Dignität. Demnach ist a^5 so viel als *aaaaa*, b^7 so viel als *bbbbbbb* u. s. f. a^n, x^n, sind allgemeine unbestimmte Zeichen einer Potenz, wie wenn sonst ein Buchstab wie *a* oder *m* eine noch unbestimmte Zahl anzeigt.

46. §.

Man behält hier ferner das im 182. §. R. bereits angeführte Zeichen $\surd$ für die Wurzeln aller Potenzen bey, und schreibt darüber eine kleine Ziffer, welche anzeigt, wieviele solcher gleichen Wurzeln die unter dem Zeichen gesetzte Grösse durch die Multiplication in einander ausmachen: diese Ziffer heißt alsdenn der **Wurzel-Exponent**. Auch diese Wurzeln bekommen ihren Nahmen von dem Wurzel-Exponenten: eine Wurzel der zweyten, dritten, vierten, fünften, sechsten Dignität, oder auch Ordnung, ist diejenige, deren Wurzel-Exponent 2, 3, 4, 5, 6 ist, u. s. f. Die Wurzel der zweyten Dignität ist mit der Quadrat-Wurzel, die Wurzel der dritten Dignität, mit der Cubikwurzel und die Wurzel der vierten Dignität mit der **Biquadratwurzel** einerley. Bey der Quadratwurzel pflegt man den Exponenten Kürze halber wegzulassen. Vermöge der festgesetzten Bezeichnungsart ist also z. E. $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, $3^5 = 243$ u. s. f., und umgekehrt $3 = \surd 9 = \sqrt[3]{27} = \sqrt[4]{81} = \sqrt[5]{243}$ u. s. f. Ueberhaupt ist $\sqrt[n]{a^n} = a$, und $(\sqrt[n]{a})^n = a$.

47. §.

Potenzen und Wurzeln, die gleiche Exponenten haben, kann man füglich gleichnahmige Potenzen und Wurzeln nennen. Uebrigens gelten die Sätze des 183. §. der Rechenkunst mit gehöriger Veränderung von allen gleichnahmigen Potenzen und Wurzeln: denn die daselbst gebrauchten Gründe sind so allgemein, daß sie sich allemahl anwenden lassen, wenn statt der Quadrat- oder Cubikzahlen überhaupt gleichnahmige Potenzen verstanden werden.

Wenn $a = b$ ist, so ist überhaupt $a^n = b^n$, und wenn $a > b$ ist, so ist $a^n > b^n$. Aus der Voraussetzung $a = b$ folgt also auch $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$, und wenn $a > b$ ist so ist $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$. Die Buchstaben a und b können in diesen Ausdrücken jede Grösse, welche man will, der Buchstab n aber nur eine ganze Zahl bedeuten.

48. §.

Die Sätze des 184. und 185. §. der Rechenkunst gelten ebenfalls mit gehöriger Veränderung von allen Potenzen und Wurzeln, und man übersiehet diese Allgemeinheit sehr leicht, wenn man die dorten gebrauchten Gründe erwegen, und mit dem 198, 199, und 200. §. der Geometrie vergleichen will.

1. Es ist nemlich überhaupt $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$, und $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$. Jede Potenz einer ganzen Zahl, ist eine ganze Zahl, und grösser, als die Wurzel.

Jede

jede Potenz eines unächten Bruchs ist grösser, und
de Potenz eines ächten Bruchs kleiner, als die
Burzel.

2. Wenn also vier Grössen proportional sind; so
nd auch ihre gleichnahmigen Potenzen und Wurzeln
roportional. Ist $a : b = c : d$, so ist $a^n : b^n =$
$c^n : d^n$, und $\sqrt[n]{a} : \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{c} : \sqrt[n]{d}$ (170. §. Geom.)

3. Ferner gelten die Sätze des 186. §. R. aus
ben der Ursache von allen Potenzen und Wurzeln.
Ist $N = abc$, so ist $N =$ einem Product, welches
eden der Factoren a, b, c, einmahl enthält: dem-
ach ist $N^n = a^n b^n c^n$. Man sieht leicht, daß
ieses allemahl gelte, es mögen der Factoren so viele
yn, als man will: demnach ist umgekehrt $\sqrt[n]{abc}$
$= \sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b}\sqrt[n]{c}$, u. s. f.

49. §.

Wenn die Wurzel ein unächter Bruch ist, der sich auf keine ganze Zahl bringen läßt: so ist jede Potenz derselben ein Bruch von eben der Art.

Beweis. Dieser Satz ist im 188. §. der Rech.
für die zweyte und dritte Potenz erwiesen, und der
aselbst gebrauchte Beweis läßt sich auf jede andre
Potenz leicht anwenden.

Ist demnach die Wurzel einer gewissen Ordnung
aus einer ganzen Zahl keine ganze Zahl, so ist sie auch
kein Bruch: Wurzeln von dieser Art sind also ins-
gesammt Irrationalzahlen, und man kann überhaupt
dergleichen Potenzen, deren Wurzeln irrational sind,
unvollkommne Potenzen nennen.

50.

50. §.

Potenzen, die gleiche Wurzeln und Exponenten haben, sind beym addiren und subtrahiren als gleichartige Grössen anzusehen. Wenn demnach zusammengesetzte Ausdrücke vorkommen, die dergleichen Potenzen enthalten; so addirt man sie eben so zusammen, oder subtrahirt einen von dem andern, wie in 16. und 17. §. ist gewiesen worden.

Exempel.

$$\begin{array}{r} 3x^7 - 12x^6 + 4x^3 - 8x - 10 \\ 2x^7 - 13x^6 - 9x^3 \qquad + 8 \\ \hline \text{Summe } 5x^7 - 25x^6 - 5x^3 - 8x - 2. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 16y^9 - 24y^8 + 13y^5 + 26y^4 \qquad - 2 \\ 12y^9 - 16y^8 - 2y^5 \qquad - 3y^3 + 7 \\ \hline \text{Rest } 4y^9 - 8y^8 + 15y^5 + 26y^4 + 3y^3 - 9. \end{array}$$

Bey Ausdrücken von dieser Art beobachtet man gewöhnlich die Regel, daß man sie nach den Potenzen ordnet, das heißt: man läßt die Glieder so nach einander folgen, wie die Exponenten der Potenzen nach einander entweder abnehmen, oder auch umgekehrt wachsen. So sind die Ausdrücke in dem ersten Exempel nach den Potenzen von x, im zweyten, nach den Potenzen von y geordnet.

51. §

Die Factoren, welche in die Potenzen multiplicirt sind, heissen in Ausdrücken von dieser Art die Coefficienten der Glieder. In den vorigen Exempeln waren diese Coefficienten durch Zahlen ausgedrückt, sie können aber auch allgemein durch Buchstaben ausge-

edrückt seyn, und in diesen Fällen hat die Addition nd Subtraction solcher Ausdrücke eben so wenig Schwierigkeit. Der ganze Unterschied bestehet dar- , daß man hier die Summen und Differenzen der oefficienten durch die zwischen ihnen gesetzten Zei- en + und − gehörig anzeigt, die man, wenn es ahlen sind, selbst hinsetzen kann. Man berechnet lso auch leicht folgende Exempel.

$$ax^5 + bx^4 - cx^3 - ex^2 - fx + g$$
$$mx^5 - nx^4 - px^3 - qx^2 + rx + s$$

S. $(a+m)x^5+(b-n)x^4-(c+p)x^3-(e+q)x^2+(r-f)x+g+s.$

$$ax^m - bx^n - cx^r + ex^s - k$$
$$fx^m - gx^n - hx^r - px^s - q$$

Rest $(a-f)x^m+(g-b)x^n+(h-c)x^r+(e+p)x^s+q-k$

Es kommt bey so allgemein ausgedrückten Formuln vornemlich nur darauf an, daß man die Summen und Differenzen der Coefficienten richtig auszudrücken wisse, weil die darin multiplicirte Potenz auch Factor der Summe oder des Restes bleibt. Am bequemsten schreibt man den positiven Theil voran, so giebt $-fx$ zu $+rx$ addirt die Summe $+(r-f)x$. Das der Parenthese vorangesetzte Zeichen beziehet sich auf alle in der Parenthese eingeschlossene Theile: daher würde $-(r-f)$ soviel seyn, als $-r+f$ oder $f-r$. Eben darum ist $-(c+p)$ die Summe von $-c$ und $-p$, aber $-g$ von $-b$ subtrahirt läßt den Rest $+(g-b)$.

52. §.

Wurzeln aus gleichen Potenzen mit gleichen Wurzel-Exponenten sind beym addiren und subtrahiren

gleich-

gleichfalls als gleichartige Grössen anzusehen, und dieserwegen addirt und subtrahirt man zusammengesetzte Ausdrücke, die solche Wurzeln als Theile enthalten, ebenfalls nach den Regeln des 16 und 17. §

Exempel.

$$\begin{array}{r} \sqrt[5]{a^2} - 7\sqrt[3]{b^4} + 9\sqrt[2]{c^7} - 4\sqrt{e^9} \\ 2\sqrt[5]{a^2} + 4\sqrt[3]{b^4} + 7\sqrt[2]{c^7} - 3\sqrt{e^9} \\ \hline \text{Summe } 5\sqrt[5]{a^2} - 3\sqrt[3]{b^4} + 16\sqrt[2]{c^7} - 7\sqrt{e^9}. \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \sqrt[7]{a^2} - 3\sqrt[8]{b^3} - 2\sqrt[3]{c^4} + 9\sqrt[7]{e^{12}} \\ 2\sqrt[7]{a^2} - 4\sqrt[8]{b^3} + 3\sqrt[3]{c^4} - 2\sqrt[7]{e^{12}} \\ \hline \text{Rest } 3\sqrt[7]{a^2} + \sqrt[8]{b^3} - 5\sqrt[3]{c^4} + 11\sqrt[7]{e^{12}} \end{array}$$

Oft sind die Wurzel-Exponenten zwar gleich, aber die Grössen unter dem Wurzel-Zeichen ungleich. Besteht nun die Grösse unter dem Wurzel-Zeichen aus zweenen Factoren, wovon der eine eine rationale Wurzel hat; so schreibt man diese vor dem Wurzel-Zeichen, und läßt den andern Factor unter dem Wurzel-Zeichen. Auf solche Art werden zuweilen ein Paar Wurzel-Grössen gleichartig, die es vorher nicht waren, wie in den nachstehenden Exempeln.

$\sqrt[n]{a^n b^m} = \sqrt[n]{a^n}\sqrt[n]{b^m}$ (48. §.) $= a\sqrt[n]{b^m}$, und $\sqrt{8} + \sqrt{18} = \sqrt{4.2} + \sqrt{9.2} = 2\sqrt{2} + 3\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

53. §.

Potenzen, die gleiche Wurzeln haben, in einander zu multipliciren.

Aufl. Das Product ist eine Potenz von eben der Wurzel, und ihr Exponent ist die Summe der Exponenten ihrer Factoren. So ist z. E. $a^3 a^5 = a^8$, $b^3 b^7 b^2 = b^{12}$ u. s. f.

Beweis. Das Product muß alle gleiche Factoren der in einander multiplicirten Potenzen enthalten, und die Exponenten der letztern zeigen an, wie viele derselben jede enthalte: also zeigt die Summe aller Exponenten, wie viele das ganze Product enthalte.

Zusatz. Wenn a eine positive Grösse ist, so sind alle ihre Dignitäten positiv, der Exponent mag eine grade oder ungrade Zahl seyn. Wenn aber $-a$ eine negative Grösse ist, so sind zwar alle ihre Dignitäten, die grade Exponenten haben, auch positiv: aber diejenigen Potenzen von $-a$ sind alle negativ, deren Exponenten eine ungrade Zahl ist. Es ist nemlich $(-a)^{2n} = ((-a)^2)^n = (+a^2)^n = +a^{2n}$, aber $(-a)^{2n+1} = (-a)^{2n} \times -a = +a^{2n} \times -a = -a^{2n+1}$.

54. §.

Mit Beobachtung dieser Regel lassen sich also auch zusammengesetzte Ausdrücke, die nach den Potenzen einer gewissen Grösse geordnet sind, in einander multipliciren, wie das beygefügte Exempel zeiget.

$$\begin{array}{l} ax^3 - bx^2 - cx + e \\ fx^2 - gx + h \\ \hline af.x^5 - bf.x^4 - cf.x^3 + ef.x^2 - eg.x + eh. \\ \qquad -ag. \quad +bg. \quad +cg. \quad -ch. \\ \qquad\qquad +ah. \quad -bh. \end{array}$$

Bey der Rechnung selbst geht man am bequemsten so zu Werke. Nachdem beyde Factoren gehörig

rig geordnet sind, multiplicirt man zuerst mit dem höchsten Gliede des Multiplicators, hierauf mit dem nächstniedrigen Gliede, u. s. f. das ganze Multiplicandum. Diejenigen einzelnen Producte, welche in einerley Potenz multiplicirt sind, setzt man unter einander hin; und der Kürze wegen schreibt man nur die Coefficienten unter einander, nachdem das erste mahl die darin zu multiplicirende Potenz in der obern Reihe ist dabeygesetzt worden. Auf die Art ergiebt sich das Product von selbst, nach den Potenzen von eben der Grösse geordnet, wornach die Factoren geordnet sind. Der im Exempel herausgebrachte Ausdruck bedeutet nun eben so viel, als ob man geschrieben hätte $afx^5 - (bf + ag)x^4 + (bg + ah - cf)x^3 + (ef + cg - bh)x^2 - (eg + ch)x + eh$.

Die Coefficienten der Glieder können selbst Potenzen andrer Buchstaben enthalten, als derjenigen, wornach die Factoren geordnet sind, da man denn bey ihrer Multiplication eben die Regel des vor. §. anbringen muß. Z. E.

$$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$$
$$x^2 - 2ax + a^2$$

$$x^5 - 3ax^4 + 3a^2x^3 - a^3x^2 + 2a^4x - a^5$$
$$- 2a + 6a^2 - 6a^3 + 3a^4$$
$$+ a^2 - 3a^3$$

In diesem Exempel lassen sich die Coefficienten des Products durch die würkliche Addition kürzer zusammen ziehen. Man erhält nämlich

$$x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5.$$

55. §.

Eine grössere Potenz durch eine kleinere von eben der Wurzel zu dividiren.

Aufl. Man subtrahire den Exponenten des Di-
sors vom Exponenten des Dividendi, der gesuch-
Quotient wird eine Potenz von eben der Wurzel,
nd ihr Exponent der herausgebrachte Rest seyn. So
t $\frac{a^5}{a^3} = a^2$, $\frac{b^7}{b^4} = b^3$, u. s. f. Wenn man
rweget, daß im Dividendo so viele gleiche Factoren
egfallen müssen, als im Divisor vorhanden sind:
fällt die Richtigkeit der Regel sogleich in die Augen.

56. §.

Mit Anwendung dieser Regel läßt sich nun auch
ie Division bewerkstelligen, wenn das Dividendum
nd der Divisor zusammengesetzte nach den Poten-
en einer gewissen Grösse geordnete Ausdrücke sind.
Man verfährt übrigens eben so, wie im 26. §. ist
ewiesen worden, und wie es das nachstehende Exem-
el zeiget.

$x^5 - 5ax^4 + 10a^2x^3 - 10a^3x^2 + 5a^4x - a^5 \mid x^2 - 2ax + a^2$

$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

$x^5 - 3ax^4 + 3a^2x^3 - a^3x^2$

$-2ax^4 + 7a^2x^3 - 9a^3x^2 + 5a^4x - a^5$

$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

$-2ax^4 + 6a^2x^3 - 6a^3x^2 + 2a^4x$

$+a^2x^3 - 3a^3x^2 + 3a^4x - a^5$

$x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - a^3$

$+a^2x^3 - 3a^3x^2 + 3a^4x - a^5$

o

Zusatz. Sollte in Fällen dieser Art die Division
vielleicht nicht aufgehen, so kann man sie auf ähnli-
liche Art, wie es im 26. §. 3. Zus. ist bemerkt wor-

den, fortsetzen. Wenn die höchste Potenz im Dividendus keinen grössern Exponenten hat; als die höchste Potenz im Divisor; so ist der Quotient als ein ächter algebraischer Bruch anzusehen, wie es der Bruch $\frac{x^2 + fx + g}{x^3 + px^2 + qx + r}$ seyn würde. Auch einem solchen Bruch kann vermittelst der Division die Form einer unbestimmt fortlaufenden Reihe gegeben werden.

57. §.

Wurzeln, die gleiche Wurzel-Exponenten haben, multiplicirt man in einander, wenn man ein Product aus den Grössen unter dem Wurzel-Zeichen der Factoren macht, und demselben das Wurzelzeichen mit eben dem Exponenten voransetzt: denn es ist $\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b} \cdot \sqrt[n]{c} = \sqrt[n]{abc}$ (48. §.) Eine Wurzel wird durch eine andre von eben dem Exponenten dividirt, wenn man die Grösse unter dem Wurzelzeichen des Dividendi mit der Grösse unter dem Wurzelzeichen des Divisors dividirt, und dem Quotienten das Wurzelzeichen mit eben dem Exponenten voransetzt: denn es ist $\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\frac{a}{b}}$ (48. §.) Kommen demnach unter den Theilen zusammengesetzter Grössen, die in einander multiplicirt, oder dividirt werden sollen, auch Wurzeln vor; so wird man die Rechnung mit Beybehaltung dieser Regeln ebenfalls nach dem 23. und 26. §. führen.

Exem-

Exempel.

$$\frac{2ax}{c} - \sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$\text{mult. mit } 3a + \sqrt{\frac{abb}{c}}$$

$$+\frac{2ax}{c} \cdot \sqrt{\frac{abb}{c}} - \sqrt{\frac{a^4bb}{cc}}$$

$$\frac{6a^2x}{c} - 3a \cdot \sqrt{\frac{a^3}{c}}$$

$$\frac{6a^2x}{c} + \left(\frac{2abx}{c} - 3a^2\right)\sqrt{\frac{a}{c}} - \frac{a^2b}{c}.$$

58. §.

Eine Potenz von neuen auf eine Potenz eines gegebenen Exponenten zu erheben.

Aufl. Man multiplicire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem neuen Exponenten, das Product wird der Exponent der verlangten Potenz von eben der Wurzel seyn. Es ist z. E. $(a^3)^2 = a^6$, $(b^7)^3 = b^{21}$, $(x^5)^6 = x^{30}$ u. s. f., und überhaupt $(a^m)^n = a^{mn}$.

Beweis. Die neue Potenz soll ein Product so vieler der gegebenen Potenz gleicher Factoren seyn, als der neue Exponent anzeigt. Dieses Product ist die Summe aller Exponenten der Factoren, (53. §.) und diese sind alle gleich: also muß der Exponent der gegebenen Potenz so vielmahl genommen werden, als der neue Exponent ausdrückt, das heißt, man muß jenen mit diesem multipliciren. Diesen Schlüssen gemäß ist $(a^3)^4 = a^{3+3+3+3} = a^{12}$ u. s. f.

59. §.

Die Wurzel einer verlangten Ordnung aus einer gegebenen Potenz auf eine andre Art als durch das vorangesetzte Wurzelzeichen auszudrücken.

Aufl. Man dividire den Exponenten der gegebenen Potenz mit dem verlangten Wurzel-Exponenten. Wenn man den Quotienten für den Exponenten einer Potenz von eben der Wurzel nimmt; so wird diese Potenz der verlangten Wurzel gleich seyn

Vermöge dieser Regel findet man $\sqrt[3]{a^{12}} = a^{\frac{12}{3}}$

$= a^4$, und überhaupt $\sqrt[n]{a^m} = a^{m:n} = a^{\frac{m}{n}}$.

Beweis. Es sey $\sqrt[n]{a^m} = R$: so ist $a^m = R^n$ (47. §.) oder $a^{\frac{m}{n} \times n} = R^n$. Wenn nun $\frac{m}{n}$ eine ganze Zahl ist; so ist $a^{\frac{m}{n} \times n} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$ (58. §.), also $R^n = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n$ und $R = a^{\frac{m}{n}}$. So erhellet die Richtigkeit der Auflösung, wenn m durch n ohne Rest theilbar ist: aber man kann die Sache so allgemein machen, daß sie sich auch auf die Fälle erstreckt, wenn m durch n, d. i. der Exponent der Dignität durch den Wurzel-Exponenten nicht ohne Rest theilbar ist.

Eine Wurzel aus einer Grösse ausziehen heißt nemlich nichts anders, als die Zahl in so viele gleiche Factoren zerfällen, als der Wurzel-Exponent anzeigt, und einen davon behalten. Weil nun die erste Dignität einer Grösse a oder a^1 diese Grösse selbst

ist,

, so können die Ausdrücke $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{1}{3}}$, $a^{\frac{1}{4}}$ u. s. f. die
Grösse eines jeden Factors bedeuten, die man erhält,
enn man a in zwey, drey, vier, u. s. f. gleiche
actoren theilet. Ueberhaupt also bedeutet $a^{\frac{1}{n}}$ die
Grösse eines jeden der Factoren, die man erhält,
enn a in $n$gleiche Factoren getheilt wird. Dem-
ach ist der Ausdruck $a^{\frac{1}{n}}$ mit dem Ausdrucke $\sqrt[n]{a^1}$
der $\sqrt[n]{a}$ einerley.

Aber deswegen ist auch der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ mit
$\sqrt[n]{a^m}$ einerley. Denn $a^{\frac{m}{n}}$ bedeutet nun nichts an-
ders, als die Grösse eines jeden der Factoren, die
man erhält, wenn a^m in n gleiche Factoren zerfället
wird, und eben dieses bedeutet auch der Ausdruck
$\sqrt[n]{a^m}$.

60. §.

Bruchpotenzen heissen solche Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, die sich nicht auf ganze Zahlen bringen lassen. Es sind also eigentlich Wurzeln aus andern Potenzen, und dieserwegen könnte es scheinen, als wenn man hier die im 44. §. festgesetzte Bedeutung des Nahmens einer Potenz zu sehr verlasse. Allein dergleichen Bruchpotenzen sind würklich eigentlich sogenannte Potenzen von Grössen, die man zugleich als Wurzeln anderer Grössen betrachtet: denn es ist $a^{\frac{m}{n}}$ eben so viel, als $(a^{\frac{1}{n}})^m$, oder in speciellen Fällen $a^{\frac{2}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^2$, $b^{\frac{3}{4}} = (b^{\frac{1}{4}})^3$

$(b^{\frac{1}{4}})^3$ u. s. f. Es ist nemlich $a^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{aa} = \sqrt[3]{a}\sqrt[3]{a}$ (57. §.) $= a^{\frac{1}{3}} a^{\frac{1}{3}} = (a^{\frac{1}{3}})^2$, und $b^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{bbb} = b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}} b^{\frac{1}{4}} = (b^{\frac{1}{4}})^3$.

Demnach bedeutet der Ausdruck $a^{\frac{2}{3}}$ ein Product aus zweyen von den 3 gleichen Factoren, worin sich a zerfällen läßt, und $b^{\frac{3}{4}}$ ein Product aus dreyen von den 4 gleichen Factoren, worin sich b zerfällen läßt:

mithin überhaupt $a^{\frac{m}{n}}$ ein Product aus m von den n gleichen Factoren, worin sich a zerfällen läßt.

Denn es ist $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a.a.a.....a}$, wo man sich vorstellen muß, daß der Buchstab a $m$mahl unter dem Wurzelzeichen stehe: also auch $a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} a^{\frac{1}{n}} \ldots\ldots a^{\frac{1}{n}}$ (48. §. $= (a^{\frac{1}{n}})^m$ (44. §.).

61. §.

Die im 53. und 55. §. erwiesenen Regeln für die Multiplication und Division der Potenzen, die einerley Wurzel und ganze Zahlen zu Exponenten haben, gelten auch für die Bruchpotenzen, wenn ihre Exponenten gleiche Nenner haben.

Beweis. Es ist $a^{\frac{m}{n}} . a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^m}\sqrt[n]{a^r}$ (59. §.) $= \sqrt[n]{a^m a^r}$ (48. §.) $= \sqrt[n]{a^{m+r}}$ (53. §.) $= a^{\frac{m+r}{n}}$ (59. §.); und $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{n}} = \sqrt[n]{a^m} : \sqrt[n]{a^r} =$

$= \sqrt[n]{\frac{a^m}{a^r}}$ (48. §.) $= \sqrt[n]{a^{m-r}}$ (54. §.) $= a^{\frac{m-r}{n}}$

59. §.) So erhellet die Richtigkeit des Satzes, wenn die Exponenten Brüche von einerley Nenner sind.

62. §.

Eine Bruchpotenz $a^{\frac{m}{n}}$ erhebt man auf eine neue Potenz eines ganzen Exponenten r, wenn man den gebrochnen Exponenten $\frac{m}{n}$ mit dem ganzen Exponenten r multiplicirt.

Beweis. Es ist $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^2 = a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m+m}{n}}$ (61. §.) $= a^{\frac{2m}{n}}$ und überhaupt $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}} a^{\frac{m}{n}} \ldots a^{\frac{m}{n}}$, wo man $a^{\frac{m}{n}}$ so vielmahl hinschreiben müßte, als r die Einheit enthält. Dies Product ist nach dem 61. §. eine Potenz eines gebrochnen Exponenten, dessen Nenner n ist, und dessen Zähler m so vielmahl enthält, als r die Einheit: also wird überhaupt $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r = a^{\frac{mr}{n}}$.

Man setze nun $a^{\frac{mr}{n}} = A$; so ist $\sqrt[n]{a^{mr}} = A$ (59. §.) Also $a^{mr} = A^n$, und $a^m = A^{n:r}$ (59. §.) Wenn nun $n : r$ eine ganze Zahl ist; so wird $a^{\frac{m}{n:r}} = A$, und $a^{\frac{m}{n:r}} = a^{\frac{mr}{n}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r$. Aber es

ist sowohl $\frac{mr}{n}$ als auch $\frac{m}{n:r} = \frac{m}{n} \times r$, und es war nöthig zu zeigen, daß beyde Arten einen Bruch mit einer ganzen Zahl zu multipliciren hier statt finden, welches man auch auf folgende Art übersehen kann.

Der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ verlangt, man soll a^m in n gleiche Factoren zerfällen: also will der Ausdruck $a^{\frac{m}{n:2}}$ man soll a^m nur in halb so viel gleiche Factoren, als vorhin zerfällen. Es sey also $a^m = \alpha^n$, und $n = 2\nu$, so ist auch $a^m = (\alpha^2)^\nu$, und wenn a^m in $\nu = \frac{1}{2}n$ gleiche Factoren zerfället wird, so ist α^2 einer von diesen gleichen Factoren: mithin ist $a^{\frac{m}{n:2}} = \alpha^2 = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^2$. Ist überhaupt $n = r\nu$, so hat man $a^m = (\alpha^r)^\nu$. Wenn alsdenn a^m in $\nu = \frac{1}{r}n$ gleiche Factoren zerfället wird, so ist jeder davon $= \alpha^r$, also ist $a^{\frac{m}{n:r}} = \alpha^r = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r$.

63. §.

Aus einer Bruchpotenz $a^{\frac{m}{n}}$ zieht man die Wurzel der Ordnung r, wenn man den Exponenten $\frac{m}{n}$ mit dem Wurzel-Exponenten dividirt.

Beweis. Es sey $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = R$, so ist $a^{\frac{m}{n}} = R^r$ und $a^m = R^{rn}$ (62. §.) Hieraus folgt einmahl, es sey $a^{m:r} = R^n$, und $a^{\frac{m:r}{n}} = R = a^{\frac{m}{rn}}$; es folgt aber auch aus eben dem Ausdruck $a^m = R^{rn}$, es sey $a^{\frac{m}{rn}} = R = \sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}}$. Nun ist sowohl $\frac{m:r}{n}$, als auch $\frac{m}{rn} = \frac{m}{n} : r$, also ist überhaupt $\sqrt[r]{a^{\frac{m}{n}}} = a^{\frac{m}{n}:r}$.

64. §.

Die Grösse einer Bruchpotenz ändert sich nicht, wenn man Zähler und Nenner des Exponenten mit einerley ganzen Zahl multiplicirt, oder dividirt.

Beweis. Es ist $a^{\frac{m \times r}{n \times r}} = \sqrt[r]{a^{\frac{mr}{n}}}$ (63. §.) $= \sqrt[r]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r}$ (62. §.) $= a^{\frac{m}{n}}$ (46. §.) und $a^{\frac{m:r}{n:r}} = \sqrt[r]{a^{\frac{m}{n:r}}}$ (63. §.) $= \sqrt[r]{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^r}$ (62. §.) $= a^{\frac{m}{n}}$ (46. §.)

65. §.

Die Multiplications- und Divisionsregeln für Potenzen, die einerley Wurzel und ganze Zahlen zu Exponenten haben, gelten ganz allgemein auch für Bruchpotenzen, wenn gleich

gleich die Exponenten der Factoren, oder des Divisors und Dividendi, nicht Brüche von gleichen Nennern sind.

Beweis. Man kann diese Brüche nach dem 99 §. der Rechenkunst auf gleiche Benennung bringen, dadurch wird die Grösse der Potenzen selbst nicht geändert (64. §.) Demnach ist $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms}{ns}} \cdot a^{\frac{nr}{ns}} = a^{\frac{ms+nr}{ns}}$, und $a^{\frac{m}{n}} : a^{\frac{r}{s}} = a^{\frac{ms-nr}{ns}}$ (61. §.).

Da eine ganze Zahl als ein Bruch angesehen werden kann, dessen Nenner $= 1$ ist; so bleibt die Regel noch richtig, wenn gleich die eine Potenz einen ganzen, und die andre einen gebrochenen Exponenten hat.

66. §.

Den Quotienten zu finden, wenn Dividendum und Divisor Potenzen ganzer Exponenten von einerley Wurzel sind, das Dividendum aber kleiner als der Divisor ist.

Aufl. Der Quotient ist ein Bruch, dessen Zähler $= 1$ ist, und der Nenner eine Potenz von eben der Wurzel, deren Exponent der Ueberschuß des Exponenten im Divisor über den Exponenten des Dividendi ist: denn man findet $\frac{a^n}{a^{m+n}} = \frac{a^n : a^n}{a^{m+n} : a^n} = \frac{1}{a^m}$ (55. §.) Man kann also die Regel des 55. §. auch selbst auf diesen Fall erweitern, wenn man die Regeln der algebraischen Subtraction dem

1. §. gemäß anwendet, und $\frac{a^n}{a^{m+n}} = a^{-m}$ setzet,

dann a^{-m} eben so viel, als $\frac{1}{a^m}$ bedeutet.

Beweis. Bey jeder Grösse kann man sich den Factor 1 vorstellen, denn es ist $a = 1 \times a$, und $a^m = 1 \times a^m$. Eine Grösse a auf die Potenz m erheben, heißt also, die Einheit $m$mahl nach einander mit a multipliciren, und der Exponent drückt aus, wie vielmahl die Multiplication vorgenommen ist. Aber eine Grösse mit einer andern multipliciren, und wieder dividiren, sind entgegengesetzte Operationen. Ist eine Grösse etliche mahl mit einer andern multiplicirt worden, und das Product wird durch eben dieselbe Grösse wieder etliche mahl dividirt: so nimmt die Anzahl der gleichen Factoren, um welche das Product gewachsen war, um eben so viele ab, so vielmahl man darin dividirt. Demnach sind im Ausdruck $\frac{a^m}{a^r} = \frac{1 \times a^m}{a^r}$ die Exponenten des Dividendi und Divisors entgegengesetzte Grössen (1. §.): und wenn man mehrmahl mit a dividirt, als vorher die 1 damit multiplicirt war; so wird hiedurch nicht allein die Anzahl der gleichen Factoren im Product völlig aufgehoben, sondern es bleiben auch von der Anzahl der gleichen Divisoren so viele übrig, als ihr Ueberschuß über der Anzahl der Factoren beträgt. Also verwandelt sich die Anzahl gleicher Factoren, womit 1 multiplicirt war, nun in eine Anzahl gleicher Divisoren, und dies bezeichnet das vorangesetzte

Zei-

Zeichen (−) in dem Ausdruck $\frac{a^n}{a^{m+n}} = a^{-m}$.

Man mag die Einheit mit a multipliciren oder dividiren: so verändert man sie beydemahl in einerley geometrischem Verhältniß, aber auf entgegengesetzte Art: im ersten Fall im Verhältniß $1 : a$, im zweyten Fall im Verhältniß $a : 1$, und dieses letzte Verhältniß ist zwar dem ersten gleich, aber zugleich demselben entgegengesetzt. Diesemnach ist a^{-m} nichts anders als 1 mit a $m$mahl nach einander dividirt.

1. Zusatz. Eine Potenz, wie a^{-m} wird nach der Regel des 58. §. auf eine neue Potenz des ganzen Exponenten n erhoben: denn es ist $(a^{-m})^n = \left(\frac{1}{a^m}\right)^n = \frac{1}{a^{mn}} = a^{-mn}$.

2. Zusatz. Man ziehet auch nach der Regel des 59. §. aus einer solchen Potenz die Wurzel eines ganzen Exponenten: denn man erhält $\sqrt[n]{a^{-m}} = \sqrt[n]{\frac{1}{a^m}} = 1 : \sqrt[n]{a^m} = 1 : a^{m:n} = a^{m:n}$.

3. Zusatz. Wenn gleich Dividendum und Divisor Bruchpotenzen von einerley Wurzel sind, und der Divisor grösser als das Dividendum ist; so findet man doch den Quotienten nach der in diesem Lehrsatz bewiesenen Regel. Denn es ist $a^{\frac{n}{r}} : a^{\frac{n+m}{r}} = \frac{1}{a^{m:r}} = \frac{1}{\sqrt[r]{a^m}} = \sqrt[r]{\frac{1}{a^m}} = \sqrt[r]{a^{-m}} = a^{-\frac{m}{r}}$.

67. §.

Jede Potenz ist = 1, wenn ihr Exponent o ist.

Beweis. Es ist $a^{\circ} = a^{m-m} = \frac{a^m}{a^m} = 1$,

s auch a bedeutet. So wie der Ausdruck a^m an- gt, man solle 1 mit a $m$mahl nach einander mul- liciren, der Ausdruck a^{-m} aber, man solle 1 mit $m$mahl nacheinander dividiren; so verlangt a°, an solle 1 mit a weder multipliciren noch dividiren, er man solle 1 unverändert lassen.

Zusatz. Weil man auch $\frac{1}{\infty}$ anstatt o setzen nn, so folget daraus, es sey auch $a^{\frac{1}{\infty}} = 1$. (31. §.) Wenn m und a positive ganze Zahlen sind, oder auch ein positiver unächter Bruch ist; so ist allemahl $a^{\frac{1}{m}}$ 1. Je grösser m genommen wird, desto näher mmt $a^{\frac{1}{m}}$ dem Werthe = 1, kann aber nie kleiner s 1 werden: demnach ist die Gränze des Werthes $^{\frac{1}{n}}$ oder $a^{\frac{1}{\infty}} = 1$.

68. §.

Die Multiplications- und Divisions-Re- eln für Potenzen, die einerley Wurzel und anze Zahlen (53. 55. §.) oder Brüche (65. §.) u Exponenten haben, lassen sich ganz allge- nein anwenden, wenn auch die Exponenten er Potenzen durch die Zeichen + und − un- erschieden sind; nur muß man alsdenn die Expo-

nenten

nenten nach den Regeln des 1 Abschnittes algebraisch addiren, oder subtrahiren.

Beweis. Vermöge des 66. §. ist

$$a^{-n} \cdot a^{-m} = \frac{1}{a^n} \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{1}{a^{m+n}} = a^{-(m+n)}$$

$$a^{+n} \cdot a^{-m} = a^n \cdot \frac{1}{a^m} = \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$$

$$a^{-n} \cdot a^{+m} = \frac{1}{a^n} \cdot a^m = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{-n+m}$$

$$a^{-n} : a^{-m} = \frac{1}{a^n} : \frac{1}{a^m} = \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} = a^{-n+m}$$

$$a^{+n} : a^{-m} = a^n : \frac{1}{a^m} = a^n \cdot a^m = a^{n+m}$$

$$a^{-n} : a^{+m} = \frac{1}{a^n} : a^m = \frac{1}{a^{n+m}} = a^{-(n+m)} = a^{-n-m}$$

Die Buchstaben n und m können hier auch Brüche bedeuten.

69. §.

Wenn die Theile eines zusammengesetzten Ausdrucks Potenzen einer Grösse enthalten, wovon in andern Theilen eben des Ausdrucks Wurzeln vorkommen, und wenn man alsdenn die Wurzeln durch Bruchpotenzen ausdrückt; so wird der Ausdruck denjenigen ganz ähnlich, die im 50. und 51. §. sind betrachtet worden. Man kann nun einen solchen Ausdruck ebenfalls nach den Potenzen einer gemeinschaftlichen Wurzel so ordnen, daß nach den abnehmenden positiven Exponenten wachsende negative folgen. Demnach läßt sich die Formul

$a\sqrt{x}$

$$\sqrt{x} + bx^2 - c\sqrt[3]{x^2} - e\sqrt[4]{x^3} + fx + \frac{g}{\sqrt{x}}$$

verändern

$$ax^{\frac{1}{2}} + bx^2 - cx^{\frac{2}{3}} - ex^{\frac{3}{4}} + fx + gx^{-\frac{1}{2}},$$

ıd man ordnet sie auf die Art:

$$bx^2 + fx - ex^{\frac{3}{4}} - cx^{\frac{2}{3}} + ax^{\frac{1}{2}} + gx^{-\frac{1}{2}}.$$

ieſe Verwandelungen ſind in vielen Fällen ſehr vor-
eilhaft, beſonders wenn man ſolche Formuln in ein-
nder multipliciren oder dividiren ſoll.

Um den Ausdruck $a\sqrt[3]{x} + bx - \frac{e}{\sqrt[3]{x}} - \frac{e}{\sqrt[3]{x^2}}$

$f - g\sqrt[3]{x^2}$ mit $x - f\sqrt[3]{x^2}$ zu multipliciren, rech-
et man auf folgende Art:

$$\begin{array}{l} bx - gx^{\frac{2}{3}} + ax^{\frac{1}{3}} + fx^{\circ} - cx^{-\frac{1}{3}} - ex^{-\frac{2}{3}} \\ x - fx^{\frac{2}{3}} \\ \hline b.x^2 - g.x^{\frac{5}{3}} + a.x^{\frac{4}{3}} + f.x - c.x^{\frac{2}{3}} - e.x^{\frac{1}{3}} \\ \quad - bf \quad + fg \quad - af \quad - ff \quad + cf + ef \end{array}$$

Wenn aber der Ausdruck

$$f\sqrt[5]{x^3} - (ag + bf)\sqrt[5]{x} - \frac{cg}{\sqrt[5]{x^2}} + \frac{bg}{\sqrt[5]{x}}$$

$+ ef$ mit $f - \frac{g}{\sqrt[5]{x^2}}$ dividirt werden ſoll; ſo wird
die Rechnung ſo geführt:

$$ef+afx^{\frac{3}{5}}-cgx^{-\frac{3}{5}}-(ag+bf)x^{\frac{1}{5}}+bgx^{-\frac{1}{5}} \mid c+ax^{\frac{3}{5}}-bx^{-\frac{1}{5}}$$

$$f-gx^{-\frac{2}{5}}$$

$$cf-cgx^{-\frac{2}{5}}$$

$$afx^{\frac{3}{5}}-(ag+bf)x^{\frac{1}{5}}+bgx^{-\frac{1}{5}}$$

$$f-gx^{-\frac{2}{5}}$$

$$afx^{\frac{3}{5}}-agx^{\frac{1}{5}}$$

$$-bfx^{\frac{1}{5}}+bgx^{-\frac{1}{5}}$$

$$f--gx^{-\frac{2}{5}}$$

$$-bfx^{\frac{1}{5}}+bgx^{-\frac{1}{5}}$$

0

Der IV. Abschnitt.

Berechnung der Quadrat- und Cubic-Wurzeln, auch allgemeine Formuln für die Wurzeln aller Ordnungen.

70. §.

Die nachstehenden Quadrate aller einfachen Ziffern kommen im Ein mahl Eins vor.

Ziffern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81.

Wem also das Ein mahl Eins geläufig ist, der wird sich leicht auf die Wurzel besinnen, wenn eins von diesen neun Quadraten vorkommt. Uebrigens erhellet,

llet, daß das Quadrat einer einfachen Ziffer öchstens aus zwoen Ziffern bestehe.

Wenn an einer der einfachen Ziffern zur Rechten ullen hängen; so bestehet ihr Quadrat aus eben n Ziffern mit doppelt so vielen Nullen (37. §. R.): so ist umgekehrt die Wurzel eines dieser neun Qua- rate, wenn daran eine grade Anzahl von Nullen ängt, die Wurzel der Ziffern mit halb so vielen ullen, als das Quadrat enthält.

71. §.

Soll man aus einer ganzen Zahl, die höchstens us zwoen Ziffern bestehet, aber unter den neun Qua- ratzahlen des vor. §. nicht vorkommt, die Qua- ratwurzel suchen; so läßt sich diese weder durch eine anze noch gebrochene Zahl genau ausdrücken (190. . R.) Wenn man aber die Wurzeln der beyden Quadrate nimmt, zwischen welchen die gegebene Zahl fällt; so hat man zwo Gränzen dieser Wurzel, ie nur um 1 unterschieden sind. Z. E. $5 < \sqrt{31}$, nd $6 > \sqrt{31}$. Nimmt man demnach in solchen Fällen die Wurzel des nächst kleinern vollkommenen Quadrats für die gesuchte an, so irret man noch nicht um eine ganze Einheit.

72. §.

Wenn eine Zahl aus zweenen Theilen beste- het; so ist ihr Quadrat aus dem Quadrat des ersten Theils, dem doppelten Product des ersten Theils in den zweyten, und dem Qua- drat des zweyten Theils zusammengesetzt. Denn es ist $(a + b)(a + b) = aa + 2ab + bb$ (23. §.) Also ist z. E. das Quadrat der Zahl $99 = (90 + 9)^2 = 8100 + 1620 + 81$.

Zusatz. Wenn also die Quadratwurzel einer Zahl um Eins vermehrt wird, so wächst die Quadratzahl um die doppelte vorige Wurzel und Eins.

73. §.

Das Quadrat einer Ziffer der ersten Decimal-Ordnung, d. i. einer einfachen Ziffer woran eine Null hängt, hat zwey Nullen (70. §.); und weil das Quadrat dieser Ziffer höchstens aus zwoen Ziffern besteht, so kann die höchste Ziffer des Quadrats nur höchstens bis in die Stelle der Tausende kommen, die niedrigste aber kommt in die Stelle der Hunderte. Z. E. $90 \times 90 = 8100$. Weil ferner das doppelte Product zwoer einfachen Ziffern in einander höchstens nur drey Ziffern haben kann; so kommt die höchste Ziffer des doppelten Products eines Zehners in eine einfache Ziffer ebenfalls höchstens in die Stelle der Tausende, wie z. E. $2 \times 90 \times 9 = 1620$.

74. §.

Bestehet eine Zahl aus mehr denn zwoen Ziffern; so kann man sie in zweene Theile zerfällen, davon der erste ihre höchste Ziffer, und der zweyte die übrigen alle enthält. Z. E. $324 = 300 + 24$. Aber wenn eine solche Zahl auch nur drey Ziffern hat; so bestehet das Quadrat des höchsten Theils wenigstens aus fünf Ziffern. Wenn demnach eine vollkommene Quadratzahl aus drey, oder vier Ziffern bestehet; so muß ihre Quadrat-Wurzel aus zwoen und nicht mehrern Ziffern bestehen.

75. §.

Wenn man eine Zahl, die aus drey oder vier Ziffern bestehet, von der Rechten gegen die Linke in Clas-

sen

en eintheilet, so daß entweder jede Classe zwo Zif-
ern, oder auch die linke nur eine bekommt; so ent-
ält die linke Classe das ganze Quadrat des Zehners
er Wurzel, und vielleicht auch etwas von dem dop-
elten Product des Zehners in den Einer der Wur-
el (73. §.) In der rechten Classe höchsten Stelle
ängt das doppelte Product beyder Theile an, und
n der niedrigsten Stelle das Quadrat des Einers,
elches in dieser Classe ganz enthalten ist (70. 73. §.)

Ob nun gleich in der linken Classe mehr, als das
Quadrat des Zehners der Wurzel enthalten seyn kann;
o kann doch diese linke Classe von keinem grössern
Zehner das Quadrat enthalten, als von demjenigen,
elcher der erste Theil der Wurzel ist. Wäre die
Ziffer des Zehners α, und die Ziffer des Einers der
Wurzel β; so wäre die Zahl selbst $= \alpha \times 10 + \beta$.
Aber der nächst grössere Zehner ist $(\alpha + 1) . 10 =$
$\alpha . 10 + 10$, das Quadrat jener Zahl ist $\alpha^2 100$
$+ 2\alpha\beta . 10 + \beta^2$, und das Quadrat dieser Zahl
$= \alpha^2 . 100 + 2\alpha 10 . 10 + 10 . 10$. Weil nun
allemahl $\beta < 10$ ist; so ist das erste Quadrat alle-
mahl kleiner als das letztere.

76. §.

Eine ganze Zahl bestehet aus drey oder höchstens vier Ziffern, man soll ihre Quadrat-Wurzel suchen.

Aufl. Wenn man die gegebene Zahl in Classen eintheilt, so daß wenigstens die rechte Classe zwo Ziffern bekommt; so steckt das Quadrat des ersten Theils der Wurzel in der linken Classe (75. §.). Ist demnach die Ziffer der linken Classe eine vollkommene

Quadratzahl aus dem 70. §.: so ist ihre Wurzel der höchste Theil der gesuchten Wurzel: widrigenfalls wird doch die Wurzel der nächst kleinern vollkommenen Quadratzahl der höchste Theil der gesuchten Wurzel seyn (75. §.). Wenn man diesen hat, so ist es leicht den zweyten Theil zu finden, und man geht bey der Rechnung so zu Werke.

Es sey die Zahl 2916 gegeben: so schreibe man unter der linken Classe 29 die nächstkleinere Quadratzahl 25, diese ist das Quadrat des ersten Theils der Wurzel. Rechter Hand ziehe man einen Strich herunter, wie man es beym dividiren macht, und setze auf der andern Seite des Strichs die Wurzel dieses Quadrats, nemlich 5, als den gefundenen ersten Theil der Wurzel. Man subtrahire die Quadratzahl 25 von der höchsten Classe, so bleibt 4. Nimmt man hiezu die höchste Ziffer der folgenden Classe; so steckt in den beyden Ziffern 41 das doppelte Product des ersten Theils der Wurzel in den zweyten (73. §.). Also duplire man den gefundenen höchsten Theil der Wurzel nemlich 5, und schreibe dies Product 10 so unter, daß die niedrigste Ziffer 0 unter der höchsten Ziffer 1 der zweyten Classe zu stehen kommt, und dividire die Zahl 41 mit dem Product 10: so muß der Quotient wenigstens nicht kleiner, als der zweyte Theil der Wurzel seyn. Aber er könnte wohl grösser seyn, weil in diesem Rest noch etwas zum Quadrat des zweyten Theils gehöriges stecken könnte.

29	16	54
25		
4 16		
1 0		
4 0		
16		
16		
0		

Deswegen multiplicire man nun den gebrauchten Divisor 10 in den gefundenen niedrigsten Theil der Burzel 4, und subtrahire das Product vom Dividendo 41. Gienge dies nicht an, so müßte man den veyten Theil der Wurzel so lange um 1 vermindern, is man das Product subtrahiren könnte.

Im Exempel bleibt 1 oder eigentlich 10 zum Rest. Wenn hiemit die letzte Ziffer 6 verbunden wird, so nuß die noch übrige Zahl 16 das Quadrat des nierigsten Theils 4 von der Wurzel seyn. Man mahe also dies Quadrat, und subtrahire es von dem noch übrigen Rest. Wenn alles aufgehet, so hat man die Wurzel genau gefunden. Bleibt aber ein Rest der kleiner ist, als die doppelte schon gefundene Wurzel um Eins vermehrt; (72. §. Zus.) so ist es ein Beweis, daß man die Wurzel nicht genau angeben kann, und die gefundene Wurzel ist zu klein. Aber die wahre Wurzel ist um keine ganze Einheit grösser, als die gefundene: also hat man wenigstens zwo Gränzen der gesuchten Wurzel, die nur um 1 unterschieden sind.

Dieser letzte Fall würde sich ergeben, wenn man aus der Zahl 5628 die Wurzel suchen wollte, wie die nebenstehende Berechnung zeiget, wo die Zahl 3 zum Rest bleibt, und also die Wurzel zwischen 75 und 76 fält. Es ist hier bey der Rechnung zugleich eine kleine Verkürzung angebracht. Nachdem nemlich durch die Division des doppelten ersten Theils 14 der Wurzel in 72 der zweyte Theil 5 war gefunden worden, ist das doppelte Product mit dem Quadrat des zweyten Theils der Wurzel in eine Summe zusam-

56	28	75
49		
728		
14		
725		
3		

mengezogen, und beydes auf einmahl subtrahirt. Man macht nemlich gleich nachdem der zweyte Theil 5 durch die Division gefunden ist, sein Quadrat 25, schreibt dessen niedrigste Ziffer 5 gehörig unter, und behält die höchste Ziffer 2 in mente. Nun multiplicirt man den doppelten ersten Theil 14 in den zweyten 5, und rechnet das, was in mente geblieben war, gehörig dazu. So erhält man $4 \times 5 = 20$ und 2 dazu giebt 22, wovon wieder 2 in mente bleiben, da dann $1 \times 5 + 2$ die höchste Ziffer 7 der zu subtrahirenden Zahl giebt.

77. §.

Die Zahl, welche angiebt, zu welcher Decimalordnung eine Ziffer gehöre, (16. §. Rech.) nennt man den Exponenten der Ordnung dieser Ziffer; man schreibt ihn oben über der Ziffer wie $29\overset{8}{1}6$, welches eben so viel ist, als 291600000000, oder 2916×10^8.

1. Zusatz. Der Exponent der Ordnung des Products zwoer Ziffern verschiedener Ordnungen in einander ist die Summe der Exponenten der Factoren: der Exponent der Ordnung des Quotienten zwoer Ziffern, die zu verschiedenen Ordnungen gehören, wird gefunden, wenn man den Exponenten des Divisors vom Exponenten des Dividendi subtrahirt.

2. Zusatz. Wenn an einer Zahl, sie mag aus so vielen Ziffern als sie wolle bestehen, rechter Hand Nullen hängen; so ist ihr Quadrat das Quadrat der Ziffern mit doppelt so viel Nullen. Umgekehrt: wenn an einer vollkommenen Quadratzahl eine grade Anzahl von Nullen hängt; so ist ihre Quadratwur-

zel

l die Quadratwurzel der Ziffern mit halb so vielen
ullen. Diesemnach ist $\sqrt{2916} = 54$, und
erhaupt $\sqrt{2916} = 54$.

3. Zusatz. Die Ziffern der Decimal-Brüche
nd ebenfalls einfache Ziffern, die in Potenzen der
o mit negativen Exponenten multiplicirt sind. So
z. E. $43,25 = 4 \times 10 + 3 + 2 \times 10^{-1} + 5 \times 10^{-2}$: demnach wird der Exponent der Ordnung sol-
er Ziffern eine verneinte Zahl.

4. Zusatz. Eine Zahl mag aus so vielen Zif-
rn, als sie wolle, bestehen: so ist die Einheit, mit
viel angehängten Nullen, als jene Zahl Ziffern
at, schon gröſſer, als diese Zahl. Es ist $100 > 99$, $1000 > 999$, $10000 > 9999$, u. s. f.
rt. Wenn also eine Zahl aus n Ziffern bestehet,
ist 1^n gröſſer als diese Zahl. Unter allen Zahlen
ber, die aus n Ziffern bestehen ist 1^{n-1} die kleinste.

78. §.

Die Zahl der Ziffern einer vollkommenen Quadratzahl ist nie kleiner, als die doppelte Zahl der Ziffern ihrer Wurzel weniger Eins.

Beweis. Die Zahl der Ziffern der Wurzel sey $= n$ so ist die Wurzel nicht $< 1^{n-1}$ (77. §. 4. Zus.) also die Quadratzahl nicht $< 1^{2n-2}$, folglich die Zahl ihrer Ziffern nicht $< 2n-1$.

79. §.

Jede vollkommene Quadratzahl bestehet höchstens aus doppelt sovielen Ziffern, als ihre Wurzel.

Beweis. Wenn die Zahl der Ziffern der Wurzel $= n$ ist; so ist die Wurzel $< 1^{n}$, (77. §. 4. Zus.) also die Quadratzahl $< 1^{2n}$, folglich die Zahl ihrer Ziffern nicht $> 2n$.

80. §.

Wenn man eine Quadratzahl, die aus so vielen Ziffern als man will bestehet, von der Rechten gegen die Linke in Classen eintheilet, und jeder Classe zwo Ziffern giebt, wie in diesem Exempel: 75|25|56|25| da dann in die höchste Classe nur eine Ziffer kommt, wenn ihre Anzahl ungrade ist; so besteht die Quadratwurzel der Zahl aus so vielen Ziffern, als man Classen gemacht hat. Denn die Wurzel kann nicht weniger Ziffern haben, weil man sonst weniger Classen hätte (79. §.). Sie kann auch nicht mehr Ziffern haben, weil man sonst mehr Classen hätte. (78. §.)

Hätte nemlich die Wurzel der Zahl 75255625 nur drey Ziffern, so hätte ihr Quadrat höchstens 6 Ziffern, und also nur 3 Classen. Wenn die Wurzel der obigen Zahl 5 Ziffern hätte, so müste ihr Quadrat wenigstens 9 Ziffern haben, und so hätte man 5 Classen.

81. §.

In der höchsten Classe der nach dem 80. §. eingetheilten Zahl ist das ganze Quadrat von der höchsten Ziffer der Wurzel enthalten, aber kein Quadrat einer grössern Ziffer von eben der Ordnung.

Beweis. 1) Die Zahl der Classen sey $= n$, so besteht die Wurzel aus n Ziffern, (80. §.) und das Quadrat ihrer höchsten Ziffer gehört zur Ordnung $(n-1)$. Zu eben der Ordnung gehört auch die höchste Classe der eingetheilten Quadratzahl: also muß die Quadratzahl der höchsten Ziffer der Wurzel in der höchsten Classe enthalten seyn.

2) Es sey α die höchste Ziffer der Wurzel, so ist 1^{n-1} schon grösser als der übrige Theil der Wurzel, welcher noch aus $n-1$ Ziffern bestehet (77. §.) also $(\alpha+1)^{n-1}$ schon grösser als die Wurzel und $(\alpha+1)^{2(n-1)}$ grösser als die vorgelegte Quadratzahl.

82. §.

Wenn $m+n$ die Zahl der Classen einer vollkommenen Quadratzahl, also auch $m+n$ die Zahl der Ziffern ihrer Wurzel ist, und wenn man alsdenn soviele von den höchsten Ziffern der Wurzel zusammen nimmt, als die Zahl m Eins enthält; so ist die Quadratzahl dieser Ziffern in eben sovielen von den höchsten Classen der Quadratzahl zusammen enthalten: aber kein Quadrat einer grössern Zahl von eben der Ordnung.

Beweis. 1. Wenn der Theil der Wurzel mit A bezeichnet wird, wozu die höhern Ziffern an der Zahl m gehören, und der übrige Theil mit B, so ist die Quadratzahl $= A^2 + 2A \cdot B + B^2$, (72. §.) und A^2 gehört zur Ordnung $2n$. Der Theil aber von der Quadratzahl, welcher aus den höhern Classen an

der

der Zahl m bestehet, gehört ebenfalls zur Ordnung $2n$: also muß die Quadratzahl des höhern Theils der Wurzel, welcher aus m Ziffern bestehet, in den m höhern Classen der Quadratzahl enthalten seyn.

2) Wenn A noch um $\overset{n}{1}$ vermehrt wird, so ist $\overset{n}{1} > B$, also auch $(A+1) > \overset{n}{A}+B$, und $(A+1)^{2n} > (\overset{n}{A}+B)^2$.

83. §.

Wenn nun 75|25|56|25| die gegebene Zahl ist, die nach dem 80. §. eingetheilt, 4 Classen giebt; so erhellet aus dem 81. §, daß $\overset{6}{64}$ das Quadrat der höchsten Ziffer der Wurzel, also diese höchste Ziffer der Wurzel selbst $= \overset{3}{8}$ sey. Um ferner die zweyte Ziffer der Wurzel zu finden, kann man die beyden höchsten Classen der Quadratzahl 75|25, allein vornehmen, und die Regeln des 76. §. anwenden; so findet man für die beyden höchsten Ziffern der Wurzel die Zahl $\overset{2}{86}$ mit dem Rest 129.

84. §.

In den drey höchsten Classen 75|25|56| ist die Quadratzahl der drey höchsten Ziffern der Wurzel enthalten. (82. §.) Es sey z diese dritte Ziffer, und A die Summe der beyden ersten; so ist

$$A^2 + 2Az + z^2 = 75|25|56|$$
$$\text{und } A^2 = (86)^2$$

$$\text{also } 2Az + z^2 = 129|56.$$

Um

n also die dritte Ziffer zu finden kann man so rech-
n, als wenn man nur 3 Classen in der Quadrat-
hl, mithin auch nur 3 Ziffern in der Wurzel hätte.
es doppelten Products 2Az niedrigste Ziffer kommt
die höchste Stelle der dritten Classe, und z^2 kommt
nz in diese Classe. Demnach dividire man

129	56	$z = 7$
mit $2Az =$ 17	2)	
so ist ferner $z^2 =$	49	
$2Az =$ 120	4	
$2Az + z^2 =$ 120	89	
Rest 8	67	

Weil nun die Quadratzahl der 4 höchsten Ziffern der
Wurzel wiederum in den 4 höchsten Classen der Qua-
ratzahl ganz enthalten ist, und kein Quadrat einer
öhern Zahl; so wird aus den bekannten drey höch-
ten Ziffern der Wurzel die vierte, und überhaupt
us jeder schon bekannten Zahl von den Ziffern der
Wurzel die nächstfolgende leicht völlig eben so, wie
us den beyden höchsten zusammen die dritte gefunden.

85. §.

Eine Zahl bestehet aus so vielen Ziffern, als man will, man soll ihre Quadratwurzel suchen.

Aufl. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen, wie es im 80. §. ist vorgeschrieben worden.

Hierauf nehme man zuerst die beyden höchsten Classen vor, und stelle die Rechnung nach dem 76. §. eben so an, als ob die Zahl nicht mehr, als diese beyden Classen hätte.

Zum übrigbleibenden Rest rechne man die folgende Classe, und wiederhole dieselbe Rechnung nur mit dem Unterschied, daß man beyde, schon gefundene Theile der Wurzel, als den ersten Theil ansiehet, dessen Quadrat schon ist subtrahirt worden: so erhält man den dritten Theil der Wurzel.

Zum übrig gebliebenen Rest nimmt man wieder die folgende Classe, und verfährt wie vorhin, nur daß allemahl die schon gefundenen Theile der Wurzel zusammen als der erste Theil angesehen werden, dessen Quadrat schon ist subtrahirt worden (84. §.).

Wofern nun die gegebene Zahl eine vollkommne Quadratzahl ist, so muß in der letzten Classe nichts übrig bleiben: widrigenfalls wird ein Rest bleiben, der kleiner ist, als die doppelte gefundene Wurzel um Eins vermehrt. (72. §. Zus.) In diesem letztern Falle hat man die Wurzel zwar nicht völlig aber doch so genau, daß sie von der wahren Wurzel um keine ganze Einheit unterschieden ist.

Wie in dem beygefügten Exempel die drey ersten Ziffern der Wurzel gefunden werden, ist schon im 76. und 84. §. gewiesen worden. Die vierte Ziffer ist mit Anwendung der nachstehenden Regeln gefunden.

75	25		56		25		8675	
64								
11	25							
	16							
	996							
		1	2	9	5	6		
			1	7	2			
		1	2	0	8	9		
						8	6	725
				1	7	34		
				8	6	725		
						0		

Zum

um Rest 867 (84. §.) nimmt man die höchste ffer 2 der folgenden Classe, dividirt 8672 mit × 867 = 1734, da dann der Quotient 5 gefunden ird. Ferner erhält man 2 × 867 × 5 + 25 = 1734 5 + 25 = 86725, welches von 86725 abgezogen inen Rest übrig läßt: also ist 8675 die gesuchte Burzel.

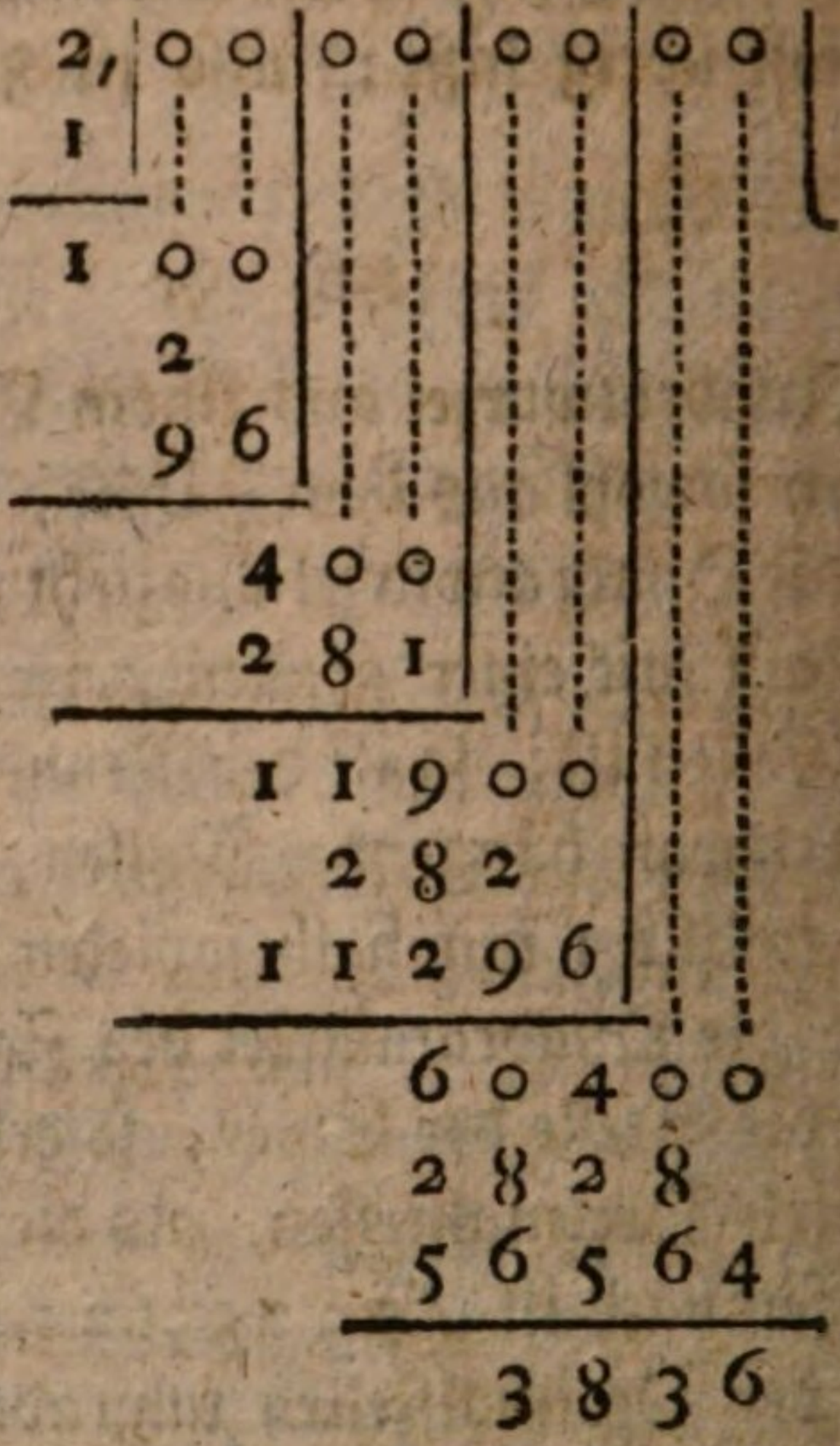
86. §.

Die Quadratwurzel aus einem Bruch erhält man, enn man sowohl aus dem Zähler, als auch aus dem lenner die Quadratwurzel auszieht (48. §.). Wenn s eine Zahl mit einer graden Anzahl dazu gehöriger ecimalstellen ist; so ist der Nenner 1 mit einer gra- en Zahl daran hängender Nullen, und seine Wur- el ist ebenfalls 1 mit halb sovielen Nullen. Man uche also die Quadratwurzel des Zählers ohne Rück- cht auf die Stelle der Einer, so erhält diese Wurzel alb so viele Decimalstellen, als die Quadratzahl hat- e. Diesemnach ist $\sqrt{75,255625} = 8,675$. Wäre ie Zahl der Decimalstellen ungrade, so müste man ur am Ende noch eine Null beyfügen, welches wie ekannt ist, den Werth der Zahl nicht ändert. Weil emlich $8,427 = \frac{8}{1}\frac{4}{0}\frac{2}{0}\frac{7}{0} = \frac{8}{1}\frac{4}{0}\frac{2}{0}\frac{7}{0}\frac{0}{0}$, so findet man $\sqrt{8,427} = \frac{1}{1}\frac{1}{0}\frac{}{0}\sqrt{84270}$.

1. Zusatz. Diese Schlüsse dienen zugleich aus iner unvollkommenen Quadratzahl die Wur- el durch Näherung so genau als man will zu finden. Man bemerke nemlich die Stelle der Einer mit dem bekannten Zeichen (,) so erhält man die Frey- heit so viele Nullen, als man will, anzuhängen (131. §. R.) deren Anzahl aus der eben angeführ- ten Ursache eine grade Anzahl seyn muß. Für jedes

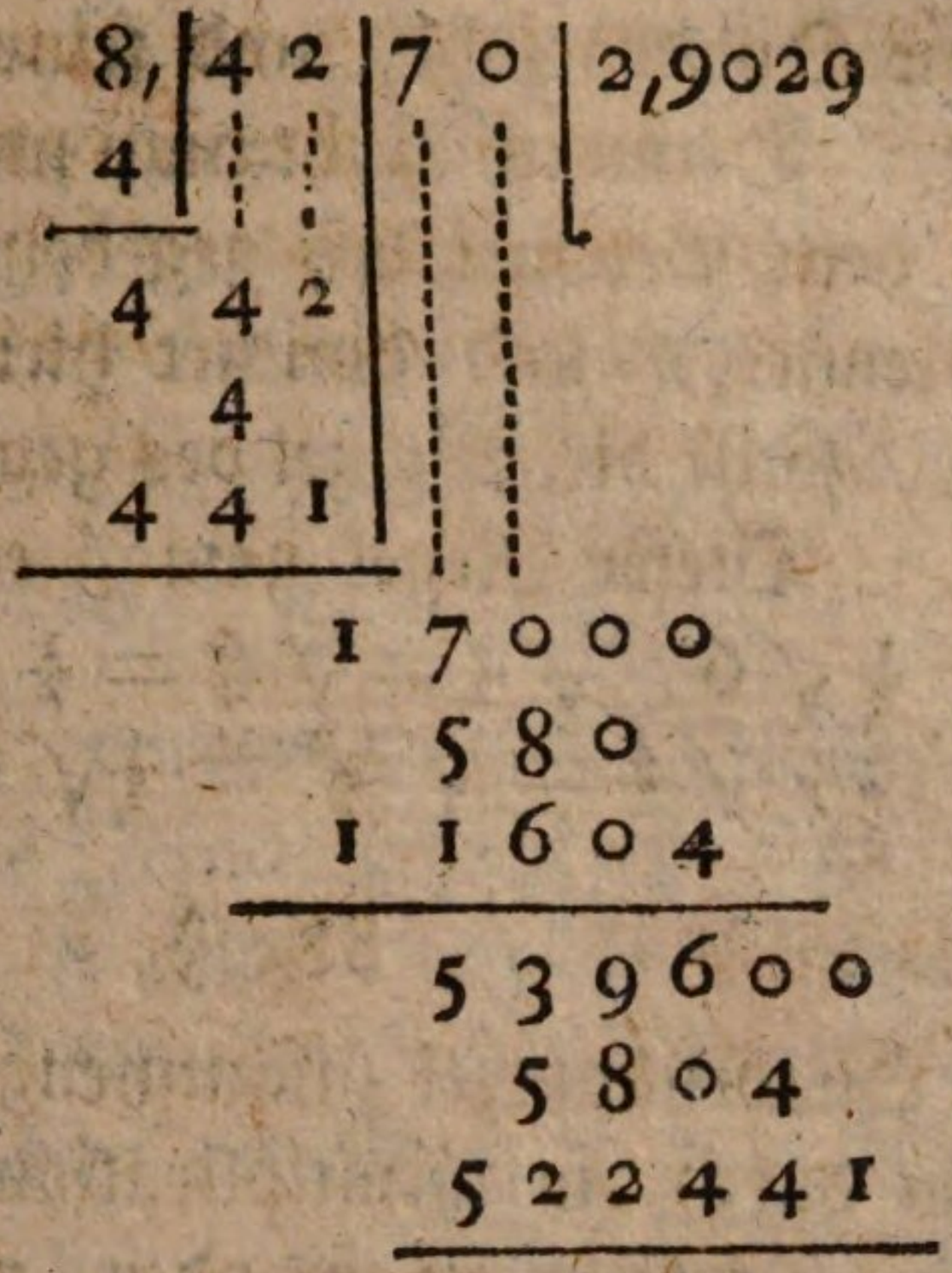
Paar

Paar Nullen bekömmt die Wurzel eine Decimalstelle, daß man also allemahl zum voraus wissen kann, wie viele Nullen man anhängen muß, um die Wurzel, bis auf eine gewisse Decimalstelle richtig zu erhalten. So findet man im nebenstehenden Exempel $\sqrt{2} = 1{,}4142$, wo der Fehler kleiner, als $\frac{1}{10000}$ ist. Denn, eigentlich ist man nun versichert, daß $1{,}4142 < \sqrt{2}$ und $1{,}4143 > \sqrt{2}$ sey.



2. Zusatz. Diese Näherung kann man in allen Fällen auf ähnliche Art so weit treiben, als man will, auch wenn die gegebene Zahl schon Decimalstellen enthält, wie im 86. §. Man kann ausser der einen Null, die man im 86. §. um eine grade Anzahl von Decimalstellen zu erhalten beyfügt, noch so viel Paare Nullen, als man nöthig findet, anhängen, oder auch diese Nullen weil es einerley ist, dem letzten Rest beyfügen.

So findet man
ermöge der bey-
efügten Berech-
ung $\sqrt{8,427} =$
,9029 rc. Es
ommt in diesem
Exempel zugleich
ne kleine Ver-
ürzung vor, die
erjenigen ähnlich
t, welche im 66
. R. bey der Di-
ision ist gebraucht
vorden, wenn der



Divisor grösser als der folgende Theil des Dividendi ist. Die zweyte Classe nemlich läßt zum Rest 1: wird hiemit die erste Ziffer der folgenden Classe verbunden, so giebt das 17. Aber der doppelte schon gefundene Theil der Wurzel ist 58, welcher in 17 dividirt, 0 giebt: (66. §. R.) also wird diese 0 der dritte Theil der Wurzel, und man hat die übrige Rechnung nicht nöthig; man kann gleich zur folgenden Classe schreiten, indem man zum Rest 170 noch zwo Nullen setzt.

87. §.

Einen gemeinen Bruch kann man in Decimaltheile verwandeln und hiernächst die Quadratwurzel suchen: oder man kann auch anstatt dessen, wenn der Nenner nicht vielleicht schon eine vollkommene Quadratzahl ist, Zähler und Nenner des Bruchs mit dem Nenner multipliciren, und hiernächst die Regel des 86. §. anwenden. Nun ist der Nenner eine voll-

kommene Quadratzahl, und seine Wurzel ist schon bekannt. Demnach sucht man nur die Quadratwurzel aus dem Product des gegebenen Zählers mit seinem Nenner, und dividirt hiernächst mit diesem Nenner, so ist die Wurzel des gegebenen Bruchs gefunden. Dieser Regel gemäß erhält man $\sqrt{\frac{2}{3}} = \sqrt{\frac{6}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{3}{2}} = \sqrt{\frac{6}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{6}$, $\sqrt{\frac{3}{4}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \frac{1}{4}\sqrt{12}$, $\sqrt{\frac{4}{3}} = \sqrt{\frac{12}{9}} = \frac{1}{3}\sqrt{12}$.

88. §.

Die Quadratwurzel zusammengesetzter Zahlen findet man durch die Multiplication der Quadratwurzeln ihrer Factoren in einander, wenn diese schon bekannt sind, als $\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3}$, $\sqrt{14} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{7}$, $\sqrt{15} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5}$. Man kann dabey die Regeln der abgekürzten Multiplication aus dem 142. §. der Rechenkunst anwenden. Wenn der eine Factor eine vollkommene Quadratzahl ist, so wird auf diesem Wege die Rechnung vortheilhaft verkürzt. Daher ist es auch rathsam, daß man sich die Quadratwurzeln aus den ersten kleinern Primzahlen ein für allemahl zum voraus berechne, als

$\sqrt{2} = 1,4142135623731$
$\sqrt{3} = 1,7320508075688$
$\sqrt{5} = 2,2360679 \ldots\ldots$
$\sqrt{7} = 2,64575131 \ldots\ldots$
$\sqrt{10} = 3,1622776625 \ldots.$
$\sqrt{11} = 3,3166248$
$\sqrt{13} = 3,6055513$
$\sqrt{17} = 4,1231056$
$\sqrt{19} = 4,3588989$

Aus diesen Wurzeln erhält man ferner folgende:

$\sqrt{6} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = 2,4494897$
$\sqrt{10} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = 3,1622776625$
$\sqrt{14} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{7} = 3,7416574$
$\sqrt{15} = \sqrt{3} \cdot \sqrt{5} = 3,8729833$
$\sqrt{20} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{10} = 4,47213594$

$$\sqrt{8} = 2\sqrt{2} = 2{,}82842712$$
$$\sqrt{12} = 2\sqrt{3} = 2{,}46410\,14$$
$$\sqrt{18} = 3\sqrt{2} = 4{,}24264068$$
$$\sqrt{1000} = 10\sqrt{10} = 31{,}622776625$$
$$\sqrt{100000} = 100\sqrt{10} = 316{,}22776625.$$

89. §.

Wenn die Zahl, woraus man die Quadratwurzel ziehen soll, eine Irrationalzahl ist, wie z. E. 41 42 rc $= \sqrt{2}$; so findet man die Wurzel desto richtiger, je mehr Decimaltheile das bekannte Stück der Irrationalzahl schon enthält, und man kann auf folgende Art untersuchen, in wie viel Ziffern man die Wurzel richtig finden werde. Es sey a der bekannte, und x der unbekannte Theil der Irrationalzahl: so wird $\sqrt{a} < \sqrt{(a+x)}$ seyn. Man setze es $= \sqrt{a} + e = \sqrt{(a+x)}$: so wird $a + 2e\sqrt{a} + ee = a + x$ und $(2\sqrt{a} + e)e = x$, also $e = \frac{x}{2\sqrt{a}+e}$, und daraus erhellet, daß $e < \frac{x}{2\sqrt{a}}$ sey. Nun sey die höchste Ziffer der Zahl $\sqrt{a}$ von der Ordnung n; so ist die höchste Ziffer der Zahl $2\sqrt{a}$ höchstens von der Ordnung $n + 1$. Ferner sey die höchste Ziffer der Zahl x von der Ordnung $-m$; so wird die höchste Ziffer der Zahl $\frac{x}{2\sqrt{a}}$ entweder auf die Ordnung $-m-n$, oder auch auf die Ordnung $-m-(n+1)$ steigen: also kann man $\sqrt{a}$ bis auf die Ziffer von dieser Ordnung berechnen, da denn der Fehler keine ganze Einheit der Ordnung $-m-(n+1)$ oder $-m-n$ beträgt.

Es sey $\sqrt{2} = 1{,}4142 + x$: so ist $a = 1{,}4142$; $-m = -5$. Nun giebt die Rechnung $\sqrt{a} =$ 1,1892 rc, also ist die höchste Ziffer in $2\sqrt{a}$ von der Ordnung 0, und deswegen die höchste Ziffer der Zahl $\frac{x.}{2\sqrt{a}}$ von der Ordnung -5. Demnach beträgt der Fehler keine ganze Einheit der Ordnung -4, wenn man in diesem Exempel $\sqrt{1{,}4142}$ für $\sqrt{\sqrt{2}}$ annimmt. Wäre demnach $\sqrt{1{,}4142} = 1{,}189$ $\alpha\beta\gamma\ldots\ldots$, wo die griechischen Buchstaben die fehlenden Ziffern bedeuten: so erhellet, daß es nicht nöthig sey, diese fehlenden Ziffern zu berechnen, weil der wahre Werth von $\sqrt{\sqrt{2}}$ höchstens nur in den ersten vier Decimalstellen mit $\sqrt{1{,}4142}$ übereinkommt, und die vierte Decimalstelle vielleicht schon um 1 zu klein ist. Hätte man $\sqrt{2}$ selbst auf mehr Decimalstellen berechnet; so würde man auf eben die Art auch $\sqrt{\sqrt{2}}$ in mehr Decimalstellen richtig finden.

90. §.

Die nachstehenden Würfel aller einfachen Ziffern erhält man durch die Multiplication ihrer Quadrate in die Wurzel.

Ziffern	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Quadrate	1	4	9	16	25	36	49	64	81
Würfel	1	8	27	64	125	216	343	512	729

Wer oft rechnet, behält diese 9 Cubikzahlen leicht, und besinnet sich benöthigten Falles auf die Wurzel; sonst muß man sich dieser kleinen Tafel bedienen.

Uebrigens ist hiebey zu bemerken, daß der Würfel einer einfachen Ziffer nur höchstens aus dreyen Ziffern bestehen könne.

Wenn

Wenn an einer der einfachen Ziffern Nullen hän-
n; so bestehet ihr Würfel aus eben den vorigen
ffern mit dreymahl so viel Nullen: (37. 40. §. R.)
o umgekehrt, wenn an einem dieser 9 Würfel ei-
durch 3 theilbare Anzahl von Nullen hänget; so
ält man die Cubikwurzel einer solchen Zahl, wenn
an der Cubikwurzel der Ziffern den 3ten Theil der
ullen des Würfels beyfüget.

91. §.

Soll man von einer ganzen Zahl, die höchstens
s dreyen Ziffern bestehet, aber unter diesen 9 Wür-
ln nicht vorkommt, die Cubikwurzel suchen; so
ßt sich diese zwar weder in ganzen noch in gebroche-
n Zahlen genau ausdrücken (49. §.). Wenn man
er die Wurzeln der beyden Würfel nimmt, zwi-
hen welchen die gegebene Zahl fällt; so hat man
o Gränzen dieser Wurzel, die nur um 1 unter-
hieden sind. Es ist nemlich $4 < \sqrt[3]{103},\ 5 > \sqrt[3]{103}$;
$< \sqrt[3]{839},\ 10 > \sqrt[3]{839}$. Nimmt man demnach
n solchen Fällen die Wurzel des nächst kleinern voll-
ommenen Würfels für die Wurzel an; so irret man
och nicht um eine ganze Einheit.

92. §.

Wenn eine Zahl aus zweenen Theilen bestee-
et; so enthält ihre Cubikzahl folgende Stü-
ke: den Würfel des ersten Theils, das drey-
fache Product aus dem Quadrat des ersten
Theils in den zweyten, das dreyfache Pro-
duct aus dem ersten Theil in das Quadrat des
zweyten, den Würfel des zweyten Theiles.

Beweis. Das Quadrat $(a+b)^2$ mit $a+b$ multiplicirt giebt $(a+b)^3$, und durch die würkliche Multiplication findet man $(a^2+2ab+b^2)(a+b)$ $= a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$.

Zusatz. Wenn die Cubicwurzel um Eins vermehrt wird, so wächst die Cubiczahl um die dreyfache Summe der vorigen Wurzel und ihrer Quadratzahl um Eins vermehrt.

93. §.

Der Würfel einer Ziffer der ersten Decimalordnung hat zur Rechten drey Nullen (90. §.); und weil der Würfel dieser Ziffer höchstens aus dreyen einfachen Ziffern bestehet, so kann die höchste Ziffer des Würfels von einem Zehner nur höchstens bis in die sechste Stelle kommen, und die niedrigste kommt in die vierte, (allemahl von der Rechten gegen die Linke gerechnet). Z. E. $90^3 = 729000$.

Das dreyfache Product des Quadrats einer einfachen Ziffer in eine einfache Ziffer bestehet höchstens aus vier Ziffern: denn 9 ist unter den einfachen Ziffern die größte, und es ist $3 \times 9^2 \times 9 = 2187$. Wenn demnach diejenige, deren Quadrat im Product vorkommt, ein Zehner ist; so hat das Product höchstens 6 Ziffern: ist aber die andre ein Zehner; so hat das Product höchstens fünf Ziffern.

94. §

Wenn eine Zahl aus mehr als zwo Ziffern bestehet; so kann man sie in zweene Theile zerfällen, davon der erste ihre höchste Ziffer, und der zweyte die übrigen alle enthält. Z. E. $518 = 500 + 18$. Aber, wenn eine solche Zahl auch nur drey Ziffern

hat,

ıt, so bestehet der Würfel des höchsten Theils we-
gstens aus sieben Ziffern. Wenn demnach eine
ollkommene Cubiczahl aus vier bis sechs Ziffern be-
ehet; so muß ihre Cubikwurzel aus zweyen, und
cht mehrern Ziffern bestehen (90. §.).

95. §.

Theilt man eine Cubikzahl, die aus vier bis sechs
iffern bestehet, von der Rechten gegen die Linke in
lassen, so daß entweder jede Classe drey Ziffern,
der auch die höchste nur eine oder zwo Ziffern be-
ımmt: so enthält die linke Classe den ganzen Wür-
el des Zehners der Wurzel, und vielleicht auch et-
as von den dreyfachen Producten der Quadrate ei-
es jeden der beyden Theile in den andern. In der
echten Classe steckt der ganze Würfel des zweyten
heils, und seine niedrigste Ziffer in der niedrigsten
Stelle. Aber die niedrigste Ziffer des dreyfachen
Products aus dem Quadrat des Zehners in den Einer
teckt in der höchsten Stelle, und die niedrigste Ziffer
es dreyfachen Products aus dem Zehner in das Qua-
rat des Einers Ziffer in der mittelsten Stelle dieser
Classe. (93. §.)

Ob nun gleich in der linken Classe mehr, als der
Würfel des Zehners enthalten seyn kann; so wird
doch diese linke Classe von keinem grössern Zehner ei-
nen Würfel enthalten können, als von demjenigen,
welcher der erste Theil der Wurzel ist. Wäre die Zif-
fer des Zehners α, und des Einers β; so wäre die
Zahl selbst $\alpha . 10 + \beta$. Der nächst grössere Zeh-
ner ist $(\alpha + 1) 10 = \alpha . 10 + 10$, der Würfel jener
Zahl ist $\alpha^3 . 1000 + 3\alpha^2 . 100 . \beta . + 3\alpha . 10 .$
$\beta^2 + \beta^3$, und der Würfel dieser Zahl ist $\alpha^3 . 1000$

$+ 3\alpha^2 . 100 . 10 . 10^2 + 10^3$. Weil nun allemahl $\beta < 10$ ist; so ist der erste Würfel allemahl kleiner als der letztere.

96. §.

Eine ganze Zahl bestehet aus vier bis sechs Ziffern, man soll ihre Cubikwurzel suchen.

Aufl. Wenn man die gegebene Zahl in Classen eintheilt, so daß die rechte Classe drey Ziffern bekommt; so steckt der Würfel des ersten Theils der Wurzel in der linken Classe. (95. §.) Ist demnach die linke Classe eine vollkommene Cubikzahl aus dem 90 §.: so ist ihre Wurzel der höchste Theil der gesuchten Wurzel: widrigenfalls wird doch die Wurzel der nächst kleinern vollkommenen Cubikzahl der höchste Theil der gesuchten Wurzel seyn (95. §.), und wenn man diesen hat, so ist es leicht, den zweyten Theil zu finden, wenn man die Rechnung auf eine ähnliche Art, wie im 76. §. bey Ausziehung der Quadratwurzel anstellet. Es sey die Zahl 103823 gegeben: so schreibe man unter der linken Classe 103 den nächst kleinern Würfel 64, dieser ist der Würfel des ersten Theils der Wurzel, welcher also im Exempel 4 seyn wird. Man schreibt ihn zur Seite hin, wie bey Ausziehung der Quadratwurzel. Nun subtrahire man den Würfel 64 von der höchsten Classe: so bleibt der Rest 39. Nimmt man hiezu die höchste Ziffer 8 der folgenden Classe, so steckt in der Zahl 398 das dreyfache Product aus dem

103	823	47
64		
39823		
48		
336		
588		
343		
39823		
0		

m Quadrat des ersten Theils der Wurzel in den eyten. Also triplire man das Quadrat 16 des er- n Theils 4 der Wurzel, und schreibe das Pro- ct 48 so unter, daß die niedrigste Ziffer 8 unter r höchsten Ziffer 8 der zweyten Classe zu stehen mmt, und dividire nun mit 48 in 398: so muß r Quotient wenigstens nicht kleiner als der zweyte heil der Wurzel seyn.

Man kann den Divisor unterstreichen, um sich y der folgenden Rechnung desto weniger zu verse- n. Der herausgebrachte Quotient könnte aber wohl rösser, als der zweyte Theil der Wurzel seyn, weil n Dividendo noch wohl etwas zu dem zweyten drey- chen Product und zum Würfel des zweyten Theils ehöriges stecken könnte.

Es würde im Exempel zwar 48 in 398 dividirt zum Quotienten geben, allein man darf, wegen er gleich anzuführenden Ursache, nicht mehr als 7 ehmen. Um nemlich zu prüfen, ob der Quotient uch zu groß sey, multiplicirt man das dreyfache Quadrat des ersten Theils der Wurzel in den gefun- enen Quotienten, als den zweyten Theil, und schreibt as Product gehörig unter, so daß die niedrigste Zif- er unter der höchsten der zweyten Classe zu stehen ommt. Hierunter setzt man das dreyfache Product us dem ersten Theil in das Quadrat des zweyten Theils, so daß die niedrigste Ziffer desselben um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt wird (95. §.). Unter diesem Product setzt man noch den Würfel des zweyten Theils wieder um eine Stelle weiter gegen die Rechte gerückt, weil dessen niedrigste Ziffer zu den Einern gehört. Diese drey Theile müssen nun noch in dem Rest 39823 enthalten seyn, der übrig

ist, nachdem der Würfel des ersten Theils ist subtrahirt worden. Deswegen addire man die gedachten drey Theile. Ist nun die Summe grösser, als jener Rest: so muß man den für den zweyten Theil der Wurzel angenommenen Quotienten so lange um Eins vermindern, bis man die erwehnte Summe subtrahiren kann. Bleibt nichts übrig: so ist die Wurzel nun genau gefunden, wie im Exempel 47. Bleibt ein Rest, so ist die gefundene Wurzel zu klein: aber die wahre Wurzel ist um keine ganze Einheit grösser, als die gefundene: also hat man wenigstens zwo Gränzen der gesuchten Wurzel, die nur um 1 unterschieden sind. So findet man im beygefügten Exempel $83 < \sqrt[3]{586752}$, und $84 > \sqrt[3]{586752}$, jedoch wird vorausgesetzt, daß der übrig gebliebene Rest kleiner sey, als die dreyfache Summe der gefundenen Wurzel und ihrer Quadratzahl um Eins vermehrt. (92. §. Zus.)

586	752	83
512		
74752		
192		
576		
216		
27		
59787		
14965		

97. §.

Wenn an einer Zahl, die übrigens aus so vielen Ziffern als man will bestehet, rechter Hand Nullen hängen; so ist ihr Würfel der Würfel der Ziffern mit dreymahl so vielen Nullen. (40. §. R.) Wofern also an einer vollkommenen Cubikzahl eine durch 3 theilbare Anzahl von Nullen hängt; so ist ihre Cubikwurzel die Wurzel der Ziffern mit dem dritten Theil der Nullen. Diesemnach ist $\sqrt[3]{1038230000000}$ =

: 4700, oder wie man es verkürzt ausdrückt

$\sqrt[6]{103823} = 47^{2}$ (77. §.).

98. §.

Die Zahl der Ziffern einer vollkommenen ubikzahl ist nie kleiner, als die dreyfache lnzahl der Ziffern ihrer Wurzel weniger zwey.

Beweis. Die Zahl der Ziffern der Wurzel sey $= n$, so ist die Wurzel nicht $< 1^{n-1}$, (77. §. 4. Zus.) also die Cubikzahl nicht $< 1^{3n-3}$, folglich die Zahl der Ziffern nicht $< 3n - 2$.

99. §.

Jede vollkommene Cubikzahl bestehet höchstens aus dreymahl so vielen Ziffern, als ihre Wurzel.

Beweis. Es bestehe die Wurzel aus n Ziffern, so ist diese Wurzel $< 1^{n}$, also die Cubikzahl $< 1^{3n}$, folglich die Zahl der Ziffern nicht $> 3n$. (77. §. 4. Zus.)

100. §.

Theilt man nun eine Zahl, die aus so vielen Ziffern als man will bestehet, von der Rechten gegen die Linke in Classen, und giebt man jeder Classe drey Ziffern auf folgende Art: 432|081|216, da dann die höchste Classe auch nur eine oder zwo Ziffern erhalten kann, wenn die Anzahl der Ziffern nicht durch 3 theilbar ist: so besteht die Cubikwurzel der Zahl aus so vielen Ziffern, als man Classen hat. Denn die Wurzel kann nicht mehr Ziffern haben, weil man sonst mehr (98. §.), und nicht weniger, weil man sonst weniger Classen hätte. (99. §.)

101. §.

In der höchsten Classe der nach dem 100. §. eingetheilten Zahl ist der ganze Würfel von der höchsten Ziffer der Wurzel enthalten, aber kein Würfel einer grössern Ziffer von eben der Ordnung.

Beweis. 1. Die Zahl der Classen sey $= n$, so hat die Wurzel n Ziffern, (100. §.) und die Cubikzahl ihrer höchsten Ziffer gehört zur Ordnung $3(n-1)$. Zu eben der Ordnung gehört auch die höchste Classe der eingetheilten Cubiczahl: also muß die Cubiczahl der höchsten Ziffer der Wurzel in der höchsten Classe enthalten seyn.

2. Es sey α die höchste Ziffer der Wurzel, so ist α^{n-1} 1 gröſſer, als der übrige Theil der Wurzel, welcher noch aus $n-1$ Ziffern bestehet, (77. §.) also auch $(\alpha+1)^{n-1}$ schon gröſſer als die Wurzel und $(\alpha+1)^{3(n-1)}$ gröſſer als die vorgelegte Cubiczahl.

102. §.

Wenn $m+n$ die Zahl der Classen einer vollkommenen Cubiczahl, also auch $m+n$ die Zahl der Ziffern ihrer Wurzel ist, und wenn man alsdenn so viele von den höchsten Ziffern der Wurzel zusammen nimmt, als die Zahl m Eins enthält; so ist die Cubiczahl dieser Ziffern in eben so vielen von den höchsten Classen der Cubiczahl enthalten: aber keine Cubiczahl einer gröſſern Zahl von eben der Ordnung.

Beweis. 1. Wenn der Theil der Wurzel mit A bezeichnet wird, wozu die höhern Ziffern der Wur-

zel

zel an der Zahl m gehören, und der übrige Theil mit B; so ist die Cubiczahl $= A^3 + 3A^2 . B + 3A . B^2 + B^3$ (92. §.), und A^3 gehört zur Ordnung $3n$. Der Theil aber von der Cubiczahl, welcher aus den höhern Classen an der Zahl m bestehet, gehört ebenfalls zur Ordnung $3n$: also muß die Cubiczahl des höhern Theils der Wurzel, welcher aus m Ziffern bestehet, in den m höhern Classen der Cubiczahl enthalten seyn.

2. Wenn A noch um 1 vermehrt wird, so ist $1 \overset{n}{>} B$, (77. §. 4. Zus.) also auch $(A + 1) \overset{n}{>} A + B$, und $(A + 1)^3 \overset{3n}{>} (A + B)^3$.

103. §.

Wenn nun 432|081|216 die gegebene Zahl ist, die nach dem 100. §. eingetheilt 3 Classen giebt; so erhellet aus dem 101. §. daß 343 der Würfel des höchsten Theils der Wurzel, und also dieser höchste Theil der Wurzel selbst, $= 7$ sey.

Um ferner die zweyte Ziffer der Wurzel zu finden, kann man die beyden höchsten Classen der Cubiczahl 432|081 allein vornehmen, und die Regeln des 96. §. anwenden, so findet man für die beyden höchsten Ziffern der Wurzel die Zahl 75 mit dem Rest 10206.

104. §.

In den drey höchsten Classen 432|081|216 ist die Cubiczahl der drey höchsten Ziffern der Wurzel enthalten (102. §.). Es sey also z die dritte Ziffer, und A die Summe der beyden ersten; so ist

$$A^3 + 3A^2z + 3Az^2 + z^3 = 432|081|216$$
$$\text{und } A^3 = (75)^3$$

$$\text{also } 3A^2z + 3Az^2 + z^3 = 10|206|216.$$

Um also die folgende Ziffer der Wurzel zu finden, es mag dieses schon die letzte seyn, oder es mögen noch mehrere folgen, kann man so rechnen, als wenn man nur 3 Classen in der Cubiczahl, mithin auch nur 3 Ziffern in der Wurzel hätte. Des dreyfachen Products $3A^2z$ niedrigste Ziffer kommt in die höchste Stelle der dritten Classe, des dreyfachen Products $2Az^2$ niedrigste Ziffer in die mittelste Stelle, und z^3 ganz in diese dritte Classe. Demnach dividire man

	10	206	216	$z = 6$
mit $3A^2z =$	1	687	5)	
so ist ferner $z^3 =$			216	
$3A.z^2 =$		81	00	
$3A^2.z =$	10	125	0	
	10	206	216	

Weil kein Rest bleibt, so ist 756 die gesuchte Wurzel.

105. §.

Eine Zahl bestehet aus so vielen Ziffern, als man will, man soll ihre Cubikwurzel suchen.

Aufl. Man theile die gegebene Zahl von der Rechten gegen die Linke in Classen, wie im 100. §. ist vorgeschrieben worden.

Hierauf suche man aus den beyden ersten Classen die beyden ersten Theile der Wurzel eben so, wie nach dem 96. §. die beyden Theile der Wurzel gesucht werden, wenn die Zahl nicht mehr als 2 Classen hat.

Zum übrigbleibenden Rest nehme man die folgende Classe, und wiederhole dieselbe Arbeit, nur mit dem

dem Unterscheid, daß die Summe der schon gefundenen Theile der Wurzel als ihr erster Theil angesehen wird, dessen Würfel schon ist subtrahirt worden. Eben so muß man mit jeder folgenden Classe umgehen, woraus sich denn allemahl der folgende Theil der Wurzel ergiebt (104. §.), bis man auf die letzte Classe kommt.

Woferne die gegebene Zahl eine vollkommene Cubikzahl ist: so muß in der letzten Classe nichts übrig bleiben. Bleibt demnach ein Rest, so ist die gefundene Wurzel kleiner, als die wahre, doch ist sie von der wahren Wurzel um keine ganze Einheit unterschieden, wofern anders der Rest kleiner ist als die dreyfache Summe der gefundenen Wurzel und ihrer Quadratzahl um Eins vermehrt. Man hat eigentlich in diesem Falle ein Paar Gränzen der gesuchten Wurzel in ganzen Zahlen, die nur um 1 unterschieden sind. In dem beygefügten Exempel ist die ganze im 103. und 104. §. angestellte Rechnung nochmahl kurz im Zusammenhange vorgestellet, damit man sie desto besser übersehen, und andre Exempel darnach rechnen könne.

```
432 | 081 | 216 | 756.
343 |
----
 89081
   147
  ----
   735
   525
   125
  ----
 78875
----
 10206216
   16875
  ------
 101250
   8100
    216
  ------
 10206216
 --------
        0
```

106. §.

Die Cubikwurzel eines Bruchs ist ein Bruch, dessen Zähler und Nenner die Cubikwurzel aus dem Zähler und Nenner der Cubiczahl seyn muß (48. §.) Wenn es eine Zahl mit einer durch 3 theilbaren Anzahl Decimalstellen ist; so ist der Nenner 1 mit einer durch 3 theilbaren Anzahl Nullen. Man suche also die Cubicwurzel des Zählers ohne Rücksicht auf die Stelle der Einer, so erhält diese Wurzel dreymahl weniger Decimalstellen, als die Cubiczahl hatte.

Diesemnach ist $\sqrt[3]{432,081\,216} = 7,56$. Wäre die Zahl der Decimalstellen nicht mit 3 theilbar, so müßte man am Ende noch eine oder zwey Nullen beyfügen, um eine mit 3 theilbare Anzahl Decimalstellen zu erhalten. Anstatt $\sqrt[3]{56,4327}$ sucht man $\sqrt[3]{56,432700}$.

1. Zusatz. Eben dieses Hülfsmittel dienet zugleich aus einer unvollkommenen Cubiczahl die Wurzel durch Näherung so genau als man will zu finden. Nachdem nemlich die Stelle der Einer mit dem bekannten Zeichen ist bemerkt worden, so erhält man die Freyheit, so viele Nullen als man will beyzufügen, deren Anzahl aus der obgedachten Ursache durch 3 theilbar seyn muß. Für jede drey Nullen erhält man eine Decimalstelle in der Wurzel, und man kann allemahl zum Voraus wissen, wie viele Nullen man anhängen muß, um die Wurzel bis auf eine gewisse Decimalstelle richtig zu erhalten, wie es das nachstehende Exempel zeiget.

```
5,000|000|000|000| 1,7099 rc.
1
-----
4000
   3
-----
  21
 147
 343|
-----
3913
-----
   87000|000
    86700
   ------
   780300
    41310
        729|
   ------
  7844382 9
  ---------
  855617100 0
    8762043
  ---------
  78858387
     415287
        729
  ---------
  788992299
  ---------
  666178701 rc.
```

2. Zusatz. Es kann diese Näherung in allen Fällen, so weit man will, getrieben werden, auch wenn die gegebene Zahl schon Decimalstellen enthält, wie im 106. §. Auch ausser der einen, oder den zweyen Nullen, die im 106. §. erfordert werden, um eine durch 3 theilbare Anzahl von Decimalstellen zu erhalten, kann man noch so vielmahl drey Nullen, entweder der Zahl selbst, oder den übrigbleiben-

den Resten beyfügen, als die jedesmahlige Schärfe erfodert, die man bey der Rechnung zu erhalten sucht.

107. §.

Die Rechnung wird bey Ausziehung sowohl der Quadratwurzeln als auch der Cubikwurzeln sehr erleichtert, wenn man solche Tafeln zur Hand hat, worin die Quadrat- und Cubikzahlen für die Wurzeln, die aus drey bis vier Ziffern bestehen, berechnet sind: in der Wolfischen Ausgabe der Trigonometrischen Tafeln, auch in mehrern andern Ausgaben davon, wovon weiter unten mehr Nachrichten vorkommen werden, sind sie bis auf die Wurzel 1000 berechnet. Hat man demnach diese Tafeln zur Hand, und die gegebene Cubiczahl hat nicht über 9 Ziffern: so findet man in diesen Tafeln ohne alle Rechnung entweder die Wurzel selbst, oder doch ihre Gränzen in ganzen Zahlen, wofern die Zahl keine vollkommene Cubiczahl ist. Wenn aber die gegebene Zahl mehr als 9 Ziffern hat; so kann man gleich, nachdem diese Zahl gehörig in ihre Classen eingetheilt ist, von den Ziffern der drey höchsten Classen den nächst kleinern Würfel, den man in den Tafeln findet, abziehen, dessen Cubicwurzel für den ersten Theil der gesuchten Wurzel annehmen, und mit der übrigen Rechnung wie im 105. §. fortfahren, wie im beygefügten Exempel. Man hat in diesen, und ähnlichen Fällen zugleich die Bequemlichkeit, daß man auch das Quadrat des er-

```
144125083 | 907 | 5243
143877824 |
-----------
  247259907
     823728
-----------
  247 1 1 8 4
      1 4 1 48
            27
-----------
  247259907
-----------
          0
```

ersten Theils der Wurzel, der hier 524 ist, aus den Tafeln nehmen, und auf solche Art die Mühe es zu berechnen ersparen kann.

108. §.

Es geht auch an, mit Hülfe solcher Tafeln die ersten Decimalstellen der irrationalen Wurzeln zu finden, wenn die gegebene Cubiczahl nicht sehr groß ist, und die ganze Zahl, welche den ersten Theil der Wurzel ausmacht, weniger Ziffern hat, als die grö-

ssten Wurzeln der Tafeln. Wollte man z. E. $\sqrt[3]{5}$ auf solche Art finden: so müste man ein Paar Cubiczahlen aus den Tafeln nehmen, die durch 1000, oder auch durch 1000000 dividirt, ein Paar Gränzen abgeben, zwischen welchen die gegebene Zahl 5 fällt. Dergleichen würden aus den Wolfischen Tafeln die beyden Zahlen 4,913000 und 5,000211 seyn. Da nun $4{,}913000 = (1{,}70)^3$ und $5{,}000211 = (1{,}71)^3$; so erhellet, daß $1{,}70 < \sqrt[3]{5}$ und $1{,}71 > \sqrt[3]{5}$ sey. Im 106. §. 1. Zus. ist diese Wurzel genauer gesucht.

109. §.

Nachdem man durch Hülfe der bisher beschriebenen Regeln aus einer gegebenen Zahl die Quadrat- oder Cubicwurzel gefunden hat, ist es nicht undienlich, zu prüfen, ob auch in der Rechnung ein Fehler eingeschlichen sey. Zu dem Ende suche man das Quadrat oder den Würfel der gefundenen Wurzel vermittelst der Multiplication, und prüfe, ob die gegebene Quadrat- oder Cubikzahl richtig wieder herauskomme. Geschieht dies nicht, so ist gewiß ein Fehler vorgegangen, wofern man richtig multiplicirt

hat, und die gegebene Zahl eine vollkommene Quadrat- oder Cubiczahl ist. Hat man aber aus einer unvollkommenen Quadrat- oder Cubiczahl die Wurzel ausgezogen, die man nie ganz erhält; so muß das Quadrat, oder der Würfel, von dem gefundenen Theil der Wurzel, wenn dazu der übriggebliebene Rest addirt wird, die gegebene Zahl wieder herstellen. So wird im 86. §. 1. Zus.

$1{,}4142^2 = 1{,}99996164$

der übrig gebliebene Rest 3836

Summe 2,00000000

und im 106. §. 1. Zus.

$1{,}7099^3 = 4{,}9993338212 99$

der übrige Rest 666178701

Summe 5,000000000000

110. §.

Einen gemeinen Bruch kann man in Decimaltheile verwandeln, und hiernächst seine Cubicwurzel suchen. Anstatt dessen aber kann man ihn, wenn der Nenner nicht schon eine vollkommene Cubiczahl ist, allemahl in einen solchen verwandeln, dessen Nenner diese Eigenschaft hat, wenn man Zähler und Nenner mit der Quadratzahl des Nenners multiplicirt. Demnach suche man die Cubicwurzel aus dem Product des Zählers mit der Quadratzahl seines Nenners, und dividire sie mit dem Nenner, so ist die Cubicwurzel des vorgelegten Bruchs gefunden.

Nach dieser Regel erhält man $\sqrt[3]{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt[3]{4}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{9}$, $\sqrt[3]{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{18}$, $\sqrt[3]{\frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt[3]{48}$.

111. §.

Wenn die Cubicwurzeln der Factoren einer vorgelegten Zahl schon bekannt sind, so kann man die Cubicwurzel des Products durch Multiplication der Cubicwurzeln der Factoren in einander finden: da dann die Rechnung vortheilhaft verkürzt wird, wenn der eine Factor eine vollkommene Cubiczahl ist, wie in folgenden Exempeln.

$$\sqrt[3]{16} = 2\sqrt[3]{2} = 2{,}519842$$

$$\sqrt[3]{54} = 3\sqrt[3]{2} = 3{,}779763$$

$$\sqrt[3]{128} = 4\sqrt[3]{2} = 5{,}039684.$$

Man bemerkt sich um deßwillen am beßten ein für allemahl die nachstehenden Cubicwurzeln, um benöthigten Falles davon Gebrauch zu machen.

$\sqrt[3]{2} = 1{,}2599205$	$\sqrt[3]{6} = 1{,}8171206$
$\sqrt[3]{3} = 1{,}4422496$	$\sqrt[3]{7} = 1{,}9129312$
$\sqrt[3]{4} = 1{,}5874011$	$\sqrt[3]{9} = 2{,}0800837$
$\sqrt[3]{5} = 1{,}7099759$	$\sqrt[3]{10} = 3{,}1544347.$

112. §.

Wenn die Wurzel aus zweenen Theilen bestehet wie $a + b$, und alsdenn der Exponent n eine ganze Zahl ist, so hat man $(a+b)^n = a^n$

$$+na^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2}a^{n-2}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}a^{n-3}b^3$$

$$+ \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}a^{n-4}b^4 + \ldots.$$

und jedes folgende Glied hat die allgemeine

Form $\frac{n.n-1.n-2.....n-(r-1)}{1.2.3.4....r} a^{n-r}b^r$

wenn r die Zahl aller vorhergehenden Glieder bezeichnet.

Beweis. Es ist vermöge des 72. und 92. §.

$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

und $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$.

Man mult. mit $a + b$

$a^4 + 3a^3b + 3a^2b^2 + ab^3$
$+ a^3b + 3a^2b^2 + 3ab^3 + b^4$

so wird $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$.

Wenn nun in der obenstehenden allgemeinen Formul $n = 2$, $n = 3$, $n = 4$, gesetzt wird, so erhält man die 2te, 3te, 4te Potenz eben so wie vermittelst der Multiplication. Allemahl aber, wenn die Potenz für den Exponenten n richtig ist, so bleibt eben das Gesetz auch für die Potenz mit dem Exponenten $n + 1$, wie die nachstehende Rechnung zeiget, wenn man $(a+b)^n$ mit $a + b$ von neuen multiplicirt. Man findet $(a+b)^{n+1} = a^{n+1}$.

$+ \frac{n}{1} a^n b + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-1}b^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-2}b^3 + ...$

$+ a^n b + \frac{n}{1} a^{n-1}b^2 + \frac{n.n-2}{1.2} a^{n-2}b^3 + ...$

und die Summe dieser beyden Reihen ist

$= a^{n+1} + \frac{n+1}{1} a^n b + \frac{n+1.n}{1.2} a^{n-1}b^2$

$+ \frac{n+1.n.n-2}{1.2.3} a^{n-2}b^3 + ...$

Jes

Jedes Glied in der ersten Reihe, das nach r Gliedern folgt, ist $=$

$$\frac{n.n-1.n-2....n-(r-2).n-(r-1)}{1.2.3.4....r-1.r} a^{n-(r-1)}b^r,$$

und dazu gehört in der zweyten Reihe das Glied

$$\frac{n.n-1.n-2....n-(r-2)}{1.2.3.4.....r-1} a^{n-(r-1)}b^r.$$ Der gemeinschaftliche Factor ist $a^{n-(r-1)}b^r$, und die Summe der beyden übrigen

$$\frac{n.n-1.n-2....n-(r-2)}{1.2.3.4....r-1}\left(\frac{n-(r-1)}{r}+1\right)$$

$$=\frac{n+1.n.n-1.n-2.....n-(r-2)}{1.2.3.4....r-1.r}.$$ Wenn aber in der Reihe $(a+b)^n$ allenthalben $n+1$ anstatt n geschrieben wird, so erhält man die vermittelst der Multiplication gefundene Reihe für $(a+b)^{n+1}$; folglich muß diese letzte richtig seyn, wofern die erste richtig ist. Aber die Reihe $(a+b)^n$ ist richtig, wenn die Zahlen 2, 3, 4, für n gesetzt werden, wie vorhin gefunden ward: also gilt sie auch für $n=5$, und eben darum wieder für $n=6$, also für $n=7$, und so ferner für jede ganze Zahl.

1. Zusatz. Die Potenz $(a-b)^n$ wird gefunden, wenn man vor allen Gliedern der Reihe $(a+b)^n$, die eine Potenz von b mit einem ungraden Exponenten als Factor enthalten, das Zeichen $+$ in das entgegengesetzte verwandelt. (53. §. Zus.)

2. Zusatz. Wenn $a=1$ ist, so hat man $(1+b)^n=$

$$1+\frac{n}{1}b+\frac{n.n-1}{1.2}b^2+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}b^3+....$$

Es sey n eine andre ganze Zahl, so erhellet, wenn $n > m$ ist, daß $\frac{(1+b)^n}{(1+b)^m} = (1+b)^{n-m}$, (55. §.) sey, also vermöge der bewiesenen allgemeinen Formul

$$(1+b)^{n-m} = 1 + \frac{n-m}{1}b + \frac{(n-m).(n-m-1)}{1.2}b^2 + \ldots$$

seyn müsse. Eben dieselbe Reihe wird vermittelst der Division gefunden, wenn man $(1+b)^n = 1 + \frac{n}{1}b + \frac{n.n-1}{1.2}b^2 + \ldots$. mit $(1+b)^m = 1 + \frac{mb}{1} + \frac{m.m-1}{1.2}b^2 + \ldots$. dividirt.

Aber eben die allgemeine Form des Quotienten bleibt, wenn auch $n < m$ angenommen wird, also $n - m$ eine negative Zahl ist: daraus folgt, daß die allgemeine Formul für $(1+b)^n$ noch richtig bleibe, wenn gleich n eine negative Zahl bezeichnet. Weil nun b jede Zahl vorstellen kann, so gilt sie auch für $\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, und eben darum für $(a+b)^n = a^n\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n$, wenn gleich n eine negative ganze Zahl vorstellet. Man findet nemlich

$$\left(1 + \frac{b}{a}\right)^n = 1 + \frac{n}{1}.\frac{b}{a} + \frac{n.n-1}{1.2}.\frac{b^2}{a^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}.\frac{b^3}{a^3} + \ldots.$$

es mag n positiv oder negativ seyn: also

$(a+b)^n$

$$(a+b)^n = a^n + \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n.n-1}{1.2} a^{n-2}b^2$$
$$+ \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} a^{n-3}b^3 + \ldots.$$

3. Zusatz. In dem Fall, wenn das n eine positive ganze Zahl vorstellet, ist dasjenige Glied, dessen Index r ist, das letzte Glied, wenn $r = n - 1$ wird: denn das nächste Glied, was folgen sollte, hat nur, wie alle noch weiter folgende, den Factor $n - r = 0$. Ist dagegen n eine negative ganze Zahl, so kann die Reihe so weit man will fortgesetzt werden, und die Potenz mit dem negativen Coefficienten ist die Gränze der Summe aller Glieder.

4. Zusatz. Man setze $b = -\frac{az}{a+z}$, so ist

$a+b = \frac{aa}{a+z}$, und man erhält $\frac{a^{2n}}{(a+z)^n} = a^n$

$$- \frac{na^n z}{a+z} + \frac{n.n-1.a^n z^2}{1.2(a+z)^2} - \frac{n.n-1.n-2.a^n z^3}{1.2.3.(a+z)^3}$$
$+ \ldots..$ Wird diese Gleichung mit a^{2n} dividirt, so findet man $(a+z)^{-n} = a^{-n}\left(1 - \frac{nz}{a+z}\right.$

$$\left. + \frac{n.n-1.z^2}{1.2.(a+z)^2} - \frac{n.n-1.n-2.z^3}{1.2.3.(a+z)^3} + \ldots..\right)$$

Diese Reihe bricht eben so, wie die vorige ab, wenn der Index eines Gliedes $= n - 1$ wird. Weil nun in jener Reihe, woraus diese ist hergeleitet worden, auch n eine negative ganze Zahl bezeichnen kann; (2. Zusatz) so sey $n = -m$, und man erhält auch

$$(a+z)^m = a^m\left(1+\frac{mz}{a+z}+\frac{m.m+1.z^2}{1.2.(a+z)^2}+\frac{m.m+1.m+2.z^3}{1.2.3.(a+z)^3}+\ldots\ldots\right).$$

5. Zusatz. Wenn x die veränderliche Wurze einer Potenz x^n bezeichnet, und x um die Differen z grösser angenommen wird, so erhält man $(x+z)$

$$=x^n+\frac{n}{1}x^{n-1}z+\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}z^2+..$$

und die Potenz x^n wächst um die Differenz $nx^{n-1}z$

$$+\frac{n.n-1}{1.2}x^{n-2}z^2+\ldots\ldots,$$ wenn ihre Wurzel um die Differenz z grösser wird.

6. Zusatz. Jede Potenz einer solchen Wurzel, die grösser als 1 ist, kann jede gegebene Zahl übertreffen, wenn der Exponent n der Potenz eine positive ganze Zahl ist. Soll n sich der Gränze ∞ nähern, so nähert sich die Potenz $\left(1+\frac{b}{a}\right)^n$ der Gränze $1+\frac{b}{a}.n+\frac{1}{2}.\frac{b^2}{a^2}n^2+\frac{1}{2.3}.\frac{b^3}{a^3}n^3+\ldots.$ die mit n unendlich groß wird, so lange $\frac{b}{a}$ noch einen Bruch bezeichnet, der sich angeben lässet, er sey sonst so klein als man will.

7. Zusatz. Jede Potenz eines ächten Bruchs nähert sich also der Gränze 0, wenn der Exponent positiv ist, und immer grösser angenommen wird.

Denn

Denn es ist $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \frac{b^n}{a^n} = 1 : \frac{a^n}{b^n}$. Wenn aber $b < a$ ist, so wird $\frac{a^n}{b^n}$ mit n unendlich groß:

(6. Zus.) also muß alsdenn $1 : \frac{a^n}{b} = \frac{b^n}{a^n} = 0$ werden.

113. §.

Wenn eine unbestimmt fortlaufende nach den Potenzen einer veränderlichen Grösse z geordnete Reihe von der Form $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \varepsilon z^4 + \ldots\ldots$ einer andern ähnlichen Reihe $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + Ez^4 + \ldots\ldots$ gleich seyn soll; so müssen die Coefficienten der gleichnahmigen Potenzen ebenfalls insgesammt gleich groß seyn.

Beweis. Soll die Gleichung $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \ldots\ldots = A + Bz + Cz^2 + \ldots\ldots$ richtig bleiben, was auch für ein Werth für z angenommen wird; so muß man auch $z = 0$ setzen können, und das giebt $\alpha = A$, mithin auch $\beta + \gamma z + \delta z^2 + \ldots\ldots = B + Cz + Dz^2 + \ldots\ldots$, woraus $\beta = B$ folgt, wenn man $z = 0$ setzt, also ferner $\gamma + \delta z + \varepsilon z^2 + \ldots\ldots = C + Dz + Ez^2 + \ldots\ldots$ Diese Schlüsse lassen sich eben so auf jedes folgende Paar Coefficienten gleichnahmiger Potenzen anwenden: mithin muß jeder Coefficient der einen Reihe dem Coefficienten des gleichnahmigen Gliedes der andern Reihe gleich seyn.

114. §.

Jede Potenz einer zweytheiligen Wurzel, wie $(a+b)^k$, wenn der Exponent k eine positive

sitive gebrochene Zahl ist, läßt sich durch eine unbestimmt fortlaufende Reihe von der nachstehenden Form ausdrücken

$$(a+b)^k = a^k + \frac{k}{1}a^{k-1}b + \frac{k.k-1}{1.2}a^{k-2}b^2 + \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}a^{k-3}b^3 + \ldots\ldots,$$

die der Reihe ganz ähnlich ist, welche im 112. §. für den Fall bewiesen ward, wenn das dortige n eine ganze Zahl bezeichnet.

Beweis. 1. Es ist $(a+b)^k = a^k\left(1+\frac{b}{a}\right)^k$, und es genüget, wenn bewiesen werden kann, daß

$$\left(1+\frac{b}{a}\right)^k = 1 + \frac{k}{1}\cdot\frac{b}{a} + \frac{k.k-1}{1.3}\cdot\frac{b^2}{a^2} + \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}\cdot\frac{b^3}{a^3} + \ldots\ldots$$

sey, weil jene Reihe aus dieser folgt. Man setze $\frac{b}{a} = y$, und $k = \frac{n}{m}$, vorausgesetzt, daß n und m positive ganze Zahlen bezeichnen. Ferner sey $(1+y)^{\frac{n}{m}} = 1 + Ay + By^2 + Cy^3 + Dy^4 + \ldots\ldots$, wo das erste Glied der Reihe $= 1$ seyn muß, damit $(1+y)^{\frac{n}{m}} = 1$ werde, wenn man $y = 0$ setzt. Weil nun auch $(1+y)^{\frac{n}{m}} = \sqrt[m]{(1+y)^n}$ ist, (60. §.) so erhält man vermöge des 112. §.

$\sqrt[m]{}$

$$\sqrt[m]{\left(1+ny+\frac{n.n-1}{1.2}y^2+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}y^3+\ldots\right)}=$$
$$1+Ay+By^2+Cy^3+\ldots.$$

und daraus folgt

$$1+ny+\frac{n.n-1}{1.2}y^2+\frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}y^3+\ldots=1+m(Ay+By^2+\ldots.)$$
$$+\frac{m.m-1}{1.2}(Ay+By^2+\ldots.)^2$$
$$+\ldots\ldots\ldots$$

2. Wenn die Reihe hinter dem Gleichheitszeichen gehörig entwickelt wird, so nimmt sie die nachstehende Form an

$$1+mA.y+P.y^2+Q.y^3+R.y^4+\ldots\ldots$$

und vermöge des 113. §. müssen die Coefficienten der gleichnahmigen Glieder auf beyden Seiten der zuletzt n. 1. gefundenen Gleichung einander gleich seyn. Demnach erhält man $mA=n$, mithin $A=\frac{n}{m}$, und es ist $(1+y)^{\frac{n}{m}}=1+\frac{n}{m}y+By^2+Cy^3+Dy^4+\ldots\ldots$

3. Man stelle in dieser letzten Gleichung die Werthe $y=\frac{b}{a}$ und $\frac{n}{m}=k$ wieder her, hiernächst multiplicire man mit a^k, so findet man $(a+b)^k=a^k+k.a^{k-1}b+B.a^{k-2}b^2+\ldots\ldots$ Weil man hier auch $1+y$ anstatt a, z anstatt b setzen kann, so ist auch $(1+y+z)^k=(1+y)^k+k(1+y)^{k-1}z+B(1+y)^{k-2}z^2+\ldots\ldots$ Anstatt $1+y$ kann man auch x setzen, und so erhellet überhaupt, wenn die Wurzel einer Bruchpotenz

x^k

x^k um die Differenz z grösser wird, daß diejenige Differenz um welche die Potenz wächst, unter der Form $kx^{k-1}z + Fx^{k-2}z^2 + Gx^{k-3}z^3 + \ldots$ enthalten sey.

4. Nunmehro gehe man auf die allgemeine Gleichung

$$(1+y)^k = 1 + Ay + By^2 + \ldots + Py^n + Qy^{n+1} + \ldots$$

(n. 1) zurück, setze in derselben $y + z$ anstatt z, ziehe von der so veränderten Gleichung die erste wieder ab, und dividire hiernächst mit z; so erhält man nach n. 3.

$$k(1+y)^{k-1} + F(1+y)^{k-2}z + \ldots = A + B(2y+z) + \ldots$$
$$+ P\left(ny^{n-1} + \frac{n.n-1}{1.2}y^{n-2}z + \ldots\right)$$
$$+ Q\left((n+1)y^n + \frac{(n+1)n}{1.2}y^{n-1}z + \ldots\right)$$
$$+ \ldots\ldots\ldots$$

Weil nun diese Gleichung für jeden Werth der veränderlichen Grösse z richtig ist, so kann man auch $z = 0$ setzen: das giebt

$$k(1+y)^{k-1} = A + 2By + \ldots + nPy^{n-1} + (n+1)Qy^n + \ldots$$

5. Diese nun gefundene Gleichung multiplicire man mit $1 + y$, so findet man

$$k(1+y)^k = A + 2B.y + \ldots + nPy^{n-1} + (n+1)Qy^n + \ldots$$
$$+ A. + \ldots\ldots\ldots + nP. + \ldots$$

und vermöge der Voraussetzung ist auch

$$k(1+y)^k = k + kA.y + kB.y^2 + \ldots + kP.y^n + \ldots$$

(n. 1. 4.) demnach sind beyde Reihen, und eben darum auch die Coefficienten ihrer gleichnahmigen Glieder, einander gleich. (113. §.) Daraus folgt $A = k$,

$2B + A = kA$, also $2B + k = k^2$ und $B = \frac{k^2 - k}{2}$

$= \frac{k(k-1)}{2}$, überhaupt aber $(n+1)Q + nP =$

kP, mithin $Q = \frac{(k-n)P}{n+1}$. Das will sagen, um aus dem Coefficienten eines jeden Gliedes P, dessen Index n ist, den Coefficienten des nächstfolgenden zu finden, muß jener mit der Zahl $\frac{k-n}{n+1}$ multiplicirt werden. Aus $B = \frac{k.k-1}{1.2}$, wird also

$C = \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3}$, und daraus $D = \frac{k.k-1.k-2.k-3}{1.2.3.4}$, und so ferner.

6. Diesemnach ist $(1+y)^k = 1 + ky + \frac{k.k-1}{1.2} y^2 + \frac{k.k-1.k-2}{1.2.3} y^3 + \ldots\ldots$, und wenn $y = \frac{b}{a}$ gesetzt wird, so erhält man $a^k\left(1 + \frac{b}{a}\right)^k =$

$(a+b)^k = a^k + ka^{k-1}b + \frac{k.k-1}{1.2} a^{k-2}b^2 + \ldots$

völlig so, wie in dem Fall, wenn k eine positive ganze Zahl wäre. (112. §.)

1. Zusatz. Wenn nun im 112. §. 3. Zus. $\frac{(1+b)^n}{(1+b)^m} = (1+b)^{n-m} = 1 + \frac{n-m}{1}$ b

+

$$+\frac{(n-m)(n-m-1)}{1.2}b^2+\ldots.$$ gefunden ward

so können n und m in dieser Gleichung auch positive Brüche bedeuten. Die daselbst vorgetragenen Schlüsse ergeben ferner, daß eben die Form der Reihe bleiben müsse, wenn $m > n$, also $n-m$ eine negative Zahl ist: mithin ist die Formul für $(1+y)^k$ und eben darum auch die Formul für $(a+b)^k$ ganz allgemein, es mag anstatt k ein positiver oder ein negativer Bruch gesetzt werden.

2. Zusatz. In der Reihe, welche oben im 112 §. 4. Zus. für $(a+z)^m$ gefunden ward, kann also anstatt m ebenfalls ein Bruch gesetzt werden, auch kann daselbst z was man will bedeuten; demnach ist auch

$$(a+b)^k = a^k\left(1+\frac{kb}{a+b}+\frac{k.k+1.b^2}{1.2.(a+b)^2}\right.$$
$$\left.+\frac{k.k+1.k+2.b^3}{1.2.3.(a+b)^3}+\ldots.\right).$$

Der V. Abschnitt.

Von den Sexagesimal-Brüchen.

115. §.

Die einzelnen Ziffern verschiedener Ordnungen, wodurch eine auf gewöhnliche Art geschriebene Zahl ausgedrückt wird, sind als einfache in eine solche Potenz der Zahl 10 multiplicirte Ziffern anzusehen, wovon der Exponent mit dem Exponenten der

Ord-

Ordnung der Ziffer einerley ist. Eine solche Reihe, wie $374268 = 3.10^5 + 7.10^4 + 4.10^3 + 2.10^2 + 6.10 + 8$, ist denjenigen völlig ähnlich, welche im 50. und 51. §. sind betrachtet worden; sie ist nach den Potenzen der Zahl 10 geordnet, und die einzelnen Ziffern geben die Coefficienten ab.

Hängen an einer ganzen Zahl Decimalstellen; so sind diese nichts anders, als die Fortsetzung einer ähnlichen Reihe der Potenzen von 10 auf negative Exponenten, und es ist $543{,}2687 = 5.10^2 + 4.10^1 + 3.10^0 + 2.10^{-1} + 6.10^{-2} + 8.10^{-3} + 7.10^{-4}$.

Die Ziffern also, welche die Decimalbrüche ausmachen, sind als Ziffern negativer Decimalordnungen anzusehen, und der Exponent ihrer Ordnung wird eine verneinte Zahl (77. §. 3. Zus.). Uebrigens bleibt es allgemein richtig, was im 77. §. vom Exponenten der Ordnung der niedrigsten Ziffer eines Products oder eines Quotienten zweyer Ziffern verschiedener Ordnungen ist festgesetzt worden: man muß aber die algebraische Summe oder den algebraischen Rest verstehen, wenn der Unterschied positiver und negativer Decimalordnungen in Betracht kommt, alsdenn findet man $\overset{3}{7} \times \overset{-4}{6} = 7.10^3 \times 6.10^{-4} = 42.10^{-1}$ (68. §.) $= 4{,}2 = \overset{-1}{42}$, und $\overset{7}{8} : \overset{-5}{2} = 8.10^7 : 2.10^{-5} = 4.10^{12} = \overset{12}{4}$.

Man wird leicht wahrnehmen, daß die Rechnungs-Regeln für Decimalbrüche im VII. Abschnitt der Rechenkunst auf diesen Gründen beruhen. Wenn man auch statt der Zahl 10 eine andre, z. E. 12 nehmen wollte; so würden sich aus der Natur einer solchen Reihe, die nach den Potenzen von 12 geord-

net wäre, völlig ähnliche Rechnungs-Regeln für so
che Brüche herleiten lassen, deren Nenner Poten
zen der 12 wären, und die man Duodecimalbrü
che nennen könnte. So wie bey der Decimal-Ab
theilung der Längenmaasse in der Geometrie die De
cimalbrüche mit Vortheil gebraucht werden, di
Rechnung zu verkürzen: eben so würden sich die Duo
decimalbrüche bey der Duodecimal-Abtheilung m
Vortheil gebrauchen lassen. Weil inzwischen di
Duodecimal-Eintheilung bey den Geometern nich
üblich ist; so pfleget man auch für die Duodecima
Brüche keine besondre Regeln zu geben.

116. §.

Man braucht aber bey Messung der Winkel di
Sexagesimal-Eintheilung der Maasse, das is
man theilt die kleinern Maasse der Winkel allemal
wieder in 60 Theile. Ein Grad hat 60 Minuten
eine Minute 60 Secunden, u. s. f. (267. §. Geom.
Demnach werden die Minuten, Secunden, u. s.
Sexagesimalbrüche der Grade, das ist, es wer
den solche Brüche, deren Nenner Potenzen von 6
sind. Man theilt auf eine ähnliche Art im gemei
nen Leben bey Abmessung der Zeit, eine Stunde i
60 Minuten, eine Minute in 60 Secunden, u. s.
Dies ist die Ursache, weswegen man für die vie
Rechnungsarten mit den Sexagesimalbrüchen beso
dre Rechnungs-Regeln vorzutragen pfleget. Ma
darf auch diese Brüche nur durch eine Reihe ausdrü
cken, deren Glieder Potenzen negativer Exponente
von 60, und deren Coefficienten die Zähler derselbe
sind: so ist man keiner besondern Regeln benöthigt
und die ganze Sache beruhet auf demjenigen, was

im 68. §. ist festgesetzet worden. Nur macht man hier die kleine Veränderung, daß man der Kürze wegen die Potenzen der 60, worin die Zähler der Brüche zu multipliciren sind, nicht würklich hinsetzet, sondern anstatt dessen die Zähler der Brüche als Zahlen verschiedener Sexagesimal-Ordnungen ansiehet: der Exponent ihrer Ordnung ist allemahl einerley mit dem Exponenten der Potenz von 60, deren Coefficienten sie sind, man setzt diesen Exponenten der Ordnung oben über den Ziffern, und der Ausdruck $50^{\circ}\ 26'\ 31''\ 40'''\ 21^{IV}$ wird so geschrieben:

0 —1 —2 —3 —4

40 26 31 40 21. Diesemnach bleibt der Exponent der Ordnung des Products die Summe der Exponenten der Factoren, und man subtrahirt den Exponenten der Ordnung des Divisors vom Exponenten des Dividendi, um den Exponenten der Ordnung des Quotienten zu finden.

117. §.

Sexagesimal-Brüche zu addiren.

Aufl. Man setze sie so unter einander, daß die Theile von einerley Ordnung in eine Columne kommen. Hierauf addire man zuerst die niedrigste Columne, und dividire durch 60; der Quotient bleibt in mente, und wird zur nächst höhern Columne gerechnet, der Rest aber unter dieser Columne gesetzt.

Mit der Summe der nächst höhern Columne, nachdem das, was vorher in mente geblieben war, ist dazu gerechnet worden, verfahre man auf eben die Art, und setze dies Verfahren durch alle Columnen bis zur höchsten fort: so erhält man die ganze Summe.

Exempel.

	0	—1	—2	—3	—4	—5
	27	18	35	43	08	16
	19	03	17	05	37	59
	43	54	07	51	14	12
		76	60	100	60	87
		60		60		60
Summe	90	16	00	40	00	27

118. §.

Eine Reihe solcher Sexagesimal-Brüche von einer andern zu subtrahiren.

Aufl. Nachdem die Zahlen wie vorhin unter einander gesetzt sind, mache man mit der Subtraction bey der niedrigsten Columne den Anfang, und gehe von jeder Columne zur nächst höhern fort. Ist das, was man subtrahiren soll, grösser als die obenstehende Zahl; so borge man Eins aus der nächsthöhern Classe: hiedurch wird die nächstniedrige um 60 vermehrt. Soll man aus einer Classe borgen, worin die Null steht, so borge man darüber weg; so erhält man in dieser Classe 59 u. s. f.

Exempel.

	0	$\frac{1}{59}$	$\frac{2}{59}$	$\frac{3}{60}$	$\frac{4}{59}$	$\frac{5}{60}$
	27	00	00	13	00	33
	0					
	18	29	17	26	14	43
Rest	8	30	42	46	45	50.

119. §.

Sexagesimalbrüche in einander zu multipliciren.

Aufl. 1. Fall. Wenn das Multiplicandum aus mehrern Theilen bestehet, der Multiplicator aber einfach ist; so multiplicirt man den letztern in jeden Theil des Multiplicandi mit Beobachtung der Regel des 116. §. wegen der Exponenten. Man dividirt jedes Product durch 60, und setzt nur den Rest hin, rechnet aber den Quotienten zum Product der nächst höhern Ordnung.

Exempel.

0	—1	—2	—3	—4	—5	—6	—7
34	16	23	17	08			
			—3				
			25				
856	409	582	428	200			
840	360	540	420	180			
Product 14	16	49	42	08	20		

2. Fall. Wenn auch der Multiplicator aus mehrern Theilen zusammengesetzt ist; so multiplicirt man nach einander das ganze Multiplicandum mit einem jeden Theil des Multiplicators, setzt diese Producte gehörig unter einander, und bringet sie hierauf in eine Summe.

Exempel.

0	—1	—2	—3	—4
14	17	32		
0	—1	—2		
8	07	12		
02	51	30	24	
01	40	2	44	
114	20	16		
Prod. 116	03	10	14	24

Das mühsamste bey dieser Rechnung besteht dar
in, nachdem die Producte der einzelnen Theile gefun
den sind, durch die Division zu erfahren, wievie
man zur nächst höhern Classe rechnen muß, und wi
viel der Rest ausmacht, welcher in der Classe bleibt
die der Exponent der Ordnung des Products aus
drückt. Wer viel mit solchen Zahlen zu rechnen hat
würde am besten thun, sich ein für allemahl alle Pro
ducte zu suchen, die ein Paar Factoren geben könnten
wovon keiner grösser, als 59 ist: diese Producte
könnte man denn gleich mit 60 dividiren, und den
Quotienten nebst dem Rest hinsetzen. Wenn man
dies in eine Tabelle brächte; so könnte man aus der
selben die Producte nur gleich ausschreiben. Eine
solche Tabelle hat man würklich berechnet, sie ist
dem Pythagorischen Rechentisch (36. §. R.) in allen
ähnlich. Die Producte sind durch die Quotienten
und übrig bleibende Reste, welche die Division mit
60 giebt, ausgedrückt auf folgende Art: 32 × 12 =
06 24, wo 06 der Quotient, und 24 der Rest ist.
Eben so ist 12 × 17 = 03 24; 34 × 25 = 14 10.
Man findet die Tafel in Hausens Elementis Mathe
seos 77 - 82. S., und bey andern Schriftstellern
mehr, vornemlich solchen, welche zu astronomischen
Rechnungen Anweisung geben.

120. §.

Sexagesimal-Brüche in einander zu divi
diren.

Aufl. 1. Fall. Wenn der Divisor einfach ist,
so dividire man jeden Theil des Dividendi mit dem
selben, indem man mit dem höchsten anfängt, und
nach und nach zu den folgenden fortgehet. Was bey

jede

jeder Division übrig bleibt, rechne man zum folgenden Theil des Dividendi. Geht einmahl alles auf, so hat man den ganzen Quotienten; wo nicht, so muß man entweder zu dem letzten Theil des Quotienten, wie gewöhnlich, einen Bruch setzen, oder man kann auch den letzten Rest wieder mit einer um 1 niedrigern Potenz von 60 multipliciren, und auf solche Art die Division, so weit man will, fortsetzen.

Exempel.

0	−1	−2	−3	2	1	0	−1
34	16	27	05	2	26	53	$21\frac{1}{4}$
−2	360	720	300				
14	376	747	305				
28	14	14	14				
6	28	70	28				
−1	96	47	25				
60	14	14	14				
−1	84	42	11				
360	12	5					
	−2	−3					
	60	60					
	−2	−3					
	720	300					

2. Fall. Wenn auch der Divisor aus mehrern Theilen bestehet, so dividirt man des Dividendi höchsten Theil durch des Divisors höchsten Theil, wofern jener nicht kleiner als dieser ist: denn widrigenfalls muß man die beyden höchsten Theile des Dividendi zusammen nehmen. Hierauf multiplicirt man den gefundenen Quotienten in den ganzen Divisor, und zieht das Product vom Dividendo ab. Wenn man mit dem Rest allemahl dasselbe Verfahren wie-

derhohlet, so bekommt man die Theile des Quotien ten nach einander. Wenn auch zuletzt nicht alle aufgehet, so kann man diese Division so weit man will treiben, und den Quotienten so nahe, als man es nöthig erachtet, durch Sexagesimal-Brüche aus drücken.

Exempel.

0	−1	−2	−3	−4	0	−1	−2
116	3	10	14	24	8	7	12

0	−1	−2
14	17	32
114	20	16

1	42	54	14
	14	17	32
1	40	2	44

	2	51	30	24
		14	17	32
	2	51	30	24

0

Wenn man die Tafel der sechzigtheiligen Producte zur Hand hat, so erleichtert dies die Division ungemein. Man kann sie bey diesem Geschäfte eben so gebrauchen, wie den pythagorischen Rechentisch bey der Division der Decimal-Ziffern, welches für sich leicht in die Augen fällt.

121. §.

Hätte man für die ersten 59 Zahlen einfache Ziffern, so wie man sie für die ersten 9 Zahlen hat, und legte man sodann jeder Ziffer in der nächstfolgenden linken Classe einen 60 mahl grössern Werth bey, als in der vorhergehenden: so liessen sich alle Zahlen

durch

durch diese Ziffern auf eine ähnliche Art ausdrücken, wie es jetzt durch Hülfe der bekannten 9 Ziffern gewöhnlich ist. Alle Regeln der Rechenkunst würden in der Hauptsache dieselben bleiben. Die Tafel der sechzigtheiligen Producte würde das Ein mahl Eins werden, man würde darin 1741 Producte nöthig haben; statt dessen, daß bey der dekadischen Rechenkunst nur 41 nöthig sind. In dieser Rechenkunst würden die Sexagesimalbrüche das seyn, was in der dekadischen die Decimalbrüche sind, und die Rechnung damit würde an völlig einerley Regeln gebunden seyn.

122. §.

Die Sache selbst ist so allgemein, daß man auf diese Betrachtung unzählig viele verschiedene Arten die Zahlen zu bezeichnen gründen kann, nachdem man mehr oder weniger einfache Ziffern gebrauchen will. Der allgemeinste Ausdruck einer jeden Zahl ist $ax^m + bx^{m-1} + \text{---} + ex + f + gx^{-1} + hx^{-2} - kx^{-n}$. In der gewöhnlichen Dekadik ist $x = 10$, und keiner der Coefficienten grösser als 9, wobey zu merken ist, daß auch Coefficienten $= 0$ seyn können. Die Voraussetzung $x = 2$ giebt die von Leibnitzen angegebene Diadik, da denn jeder Coefficient entweder $= 1$, oder $= 0$ ist. Die Voraussetzung $x = 4$ giebt die Weigelsche Tetraktik, und die Coefficienten werden nie grösser, als 3. Eben so könnte man unsre 24 Buchstaben nach der Ordnung die ersten 24 Zahlen bedeuten lassen, und $x = 25$ setzen. Alle diese Untersuchungen sind an sich artig, und dienen dazu, die Lehren der Rechenkunst in ihrer völligen Allgemeinheit zu übersehen. Uebrigens aber

würde es von keinem Nutzen seyn, die Sache weiter zu treiben, und wohl gar einer andern Characteristik unsre einmahl eingeführte Dekadik nachzusetzen; da doch diese ihre grosse Bequemlichkeiten hat, und mit den Zahlwörtern, die man fast in allen Sprachen hat, so sehr wohl überein kommt. Die alten Chineser sollen die Diadik gebraucht haben, wie Leibnitz aus einem alten Manuscript, so man dem Fohi zuschreibt, geschlossen hat, und eine Stelle im Plutarch veranlaßte Weigeln, dafür zu halten, daß die alten Thracier die Tetractik gebraucht haben.

Der VI. Abschnitt.

Von der Zusammensetzung und Theilung der Verhältnisse als dem Ursprung der Logarithmen.

123. §.

Wenn die einzelnen Verhältnisse, woraus ein anderes, wie A:F im 220. §. R. zusammengesetzt ist, alle gleich groß sind; so heist A:F überhaupt **ein vervielfachtes Verhältniß** (ratio multiplicata) eines jeden der einzelnen gleichen Verhältnisse, woraus es zusammengesetzt ist: jedes der einzelnen Verhältnisse heißt alsdenn seine ratio submultiplicata des ganzen A:F. Diese vervielfachten Verhältnisse bekommen den Nahmen von der Anzahl der gleichen Theile, woraus sie zusammengesetzt sind. Hätte man

$A : B = m : n$
$B : C = m : n$
$C : D = m : n$
$D : E = m : n$
$E : F = m : n$ u. s. f.

so heist A : E die ratio quadruplicata, A : F die ratio quintuplicata von $m : n$ u. s. f. Umgekehrt also ist $m : n$, oder A : B die ratio subquadruplicata von A : E, die ratio subquintuplicata von A : F u. s. f. Diese gleichen Verhältnisse sind also in Ansehung des ganzen Verhältnisses eben das, was die aliquoten Theile einer Grösse gegen die ganze Grösse sind.

Im 234 und 240. §. Geom. sind bereits ähnliche Nahmen gebraucht worden, wenn das ganze Verhältniß nur aus zweyen, oder dreyen gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist.

Uebrigens ist hiebey noch anzumerken, daß der Satz des 221. §. der Rechenkunst ganz allgemein richtig sey, wenn gleich die Glieder der Verhältnisse keine Zahlen, sondern Linien, oder andre Grössen sind, weil die Gründe, woraus dieser Satz folget, im 199. §. Geom. in dieser Allgemeinheit sind bewiesen worden.

124. §.

Verhältnisse, die man aus einer gleichen Anzahl gleicher Verhältnisse zusammensetzt, sind gleich groß.

Wenn aber ein Verhältniß $B : F$ zwar aus eben den gleichen Verhältnissen zusammengesetzt ist, woraus ein andres $A : D$ besteht, überdem aber noch aus mehrern eben so grossen Verhältnissen: so ist $B : F$ in $= A : D$.

Beweis.

Beweis. 1. Es sey $A:D = \left\{\begin{matrix}\alpha:\beta\\ \gamma:\delta\\ \varepsilon:\zeta\\ \text{rc.}\end{matrix}\right\}$ und $B:E = \left\{\begin{matrix}a:b\\ c:d\\ e:f\\ \text{rc.}\end{matrix}\right\}$ überdem aber $\alpha:\beta = a:b$, $\gamma:\delta = c:d$, $\varepsilon:\zeta = e:f$ rc: so hat man: $\alpha.\gamma.\varepsilon:\beta.\delta.\zeta = a.c.e:b.d.f$. (174. §. R.) $A:D = \alpha.\gamma.\varepsilon:\beta.\delta.\zeta$, und $B:E = a.c.e:b.d.f$. (221. §. R.). Also $A:D = B:E$.

2. Wenn zu den Theilen, die das Verhältniß $B:E$ ausmachen, nur noch ein neues $g:h$ hinzu käme, so daß $B:F$ aus den Theilen des Verhältnisses $B:E$, und überdem noch aus $g:h$ zusammengesetzt wäre; so würde $B:F \rhd B:E$ und also auch $B:F \rhd A:D$ seyn.

125. §.

Das Verhältniß zweyer Potenzen der Ordnung n ist $n$mahl grösser, als das Verhältniß ihrer Wurzeln.

Beweis. Es ist $A^n:B^n$ so viel als $A.A.A\ldots:B.B.B\ldots$, und zwar so, daß jeder Factor in diesen Producten so vielmahl stehet, als die ganze Zahl n Eins enthält (44. §.): also ist das Verhältniß der Producte $A^n:B^n$ aus dem Verhältniß $A:B$, $n$mahl genommen, zusammengesetzt (123. §.).

1. Zusatz. Demnach ist umgekehrt das Verhältniß zweyer Wurzeln der Ordnung n wie $\sqrt[n]{A}:\sqrt[n]{B}$, $\frac{1}{n}$tel des Verhältnisses $A:B$.

2. Zu-

2. Zusatz. Das Verhältniß zweyer gleichnahmigen Bruchpotenzen ist gegen das Verhältniß der Wurzeln so groß, als der gebrochene Exponent gegen 1: denn es ist $A^{\frac{m}{n}} : B^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{A^m} : \sqrt[n]{B^m} = \frac{1}{n}(A^m : B^m) = \frac{1}{n} . m . (A:B) = \frac{m}{n}(A:B)$.

126. §.

Es ist in einer geometrischen Progression das erste und letzte Glied gegeben, nebst der Anzahl der Glieder, die nach dem ersten folgen sollen: man soll eine allgemeine Gleichung für das zweyte Glied finden.

Aufl. Wenn A das erste Glied ist, und m der Exponent des Verhältnisses des zweyten Gliedes zum ersten: so ist die Progression diese A, mA, m^2A, m^3A, m^4A, m^5A u. s. f. (179. §. R.). Ferner sey n die Zahl der Glieder, welche nach dem ersten folgen: so ist das letzte Glied $= m^n A$. Diesemnach setze man das letzte Glied $m^n A = V$ das zweyte Glied $mA = B$: so hat man $m^n A \times A^{n-1} = A^{n-1}V = m^n A^n$, und $\sqrt[n]{A^{n-1}V} = mA$, mithin ist $B = \sqrt[n]{A^{n-1}V}$.

Zusatz, Die gefundene Gleichung läßt sich auch so ausdrücken $B = A . \frac{\sqrt[n]{A^{n-1}V}}{\sqrt[n]{A^n}}$, oder $B = A . \sqrt[n]{\frac{V}{A}}$.

127. §.

Wenn eine geometrische Progression aus $n+1$ Gliedern bestehet; so ist das Verhältniß des letzten Gliedes zum ersten n mahl so groß als das Verhältniß des zweyten Gliedes zum ersten.

Beweis. Es sey A, B, C, D ... V die Progression: so ist $B = \sqrt[n]{A^{n-1}V}$, also $B^n = A^{n-1}V$ und $\frac{B^n}{A^n} = \frac{V}{A}$, folglich $V:A = B^n:A^n$, d. V : A ist aus dem Verhältnisse B : A $n$mahl genommen zusammengesetzt. (125. §.)

128. §.

Man zähle nun die Glieder, welche in einer geometrischen Progression nach dem ersten folgen, etwa auf diese Art:

$$A, \overset{1}{B}, \overset{2}{C}, \overset{3}{D}, \overset{4}{E}, \overset{5}{F}, \overset{6}{G}, \overset{7}{H}, \overset{8}{I}, \overset{9}{K}, \overset{10}{L}, \text{ u. s. w.}$$

und sehe ein Verhältniß F : A als das Ganze an: wird man die Grösse des Verhältnisses eines jeden andern Gliedes der Progression zum ersten Gliede gegen das Verhältniß F : A durch eine Zahl ausdrücken können, die gegen Eins eben so groß ist. Es ist nemlich $B:A = \frac{1}{5}(F:A)$, $C:A = \frac{2}{5}(F:A)$, $D:A = \frac{3}{5}(F:A)$, $E:A = \frac{4}{5}(F:A)$, $G:A = \frac{6}{5}(F:A)$, $H:A = \frac{7}{5}(F:A)$, $I:A = \frac{8}{5}(F:A)$, $K:A = \frac{9}{5}(F:A)$, $L:A = \frac{10}{5}(F:A) = 2(F:A)$ u. s. f. Hiebey ist aber die Erinnerung des 237. §. der Geometrie zu wiederhohlen: die Ausdrücke B : A, C : A, u. s. f. bedeuten hier keine Quotienten, sondern blos Verhältnisse, und man weiß, daß diese mit den Quotienten nicht in aller Absicht einerley sind.

129. §.

Es verhält sich mit dieser Sache nun eben so, wie mit allen andern Messungen: jedes Maaß ist an sich willkührlich, und es muß die Grösse desselben ein für allemahl bestimmt seyn. Frägt man, wie lang eine gewisse Linie sey? so kann man nicht antworten, wofern man nicht ausdrückt, wie viele Fusse, Ruthen, Meilen, u. s. f. diese Länge ausmachen; auch muß es vorher ausgemacht seyn, wie lang das gebrauchte Maaß, z. E. ein Fuß, eine Ruthe, eine Meile, u. dgl. seyn solle. Dann aber kann man die Länge entweder in ganzen Fußen, Ruthen, Meilen, u. s. f. oder nur in aliquoten Theilen des gebrauchten Maasses ausdrücken. Ist demnach die Frage: Wie groß ein Verhältniß sey? so kann man nicht antworten, wofern nicht ein für allemahl ein gewisses Verhältniß als das Maaß aller übrigen angenommen wird. Ist ein solches Verhältniß festgesetzt: so kann man die Grösse eines jeden andern Verhältnisses in Vergleichung mit dem Maaßverhältnisse ausdrücken, wenn dieses letztere entweder ganz, oder doch ein aliquoter Theil desselben, in dem andern etliche mahl enthalten ist.

130. §.

Die Zahl, welche die Grösse eines Verhältnisses, z. E. D : A (128. §.) gegen das Maaßverhältniß ausdrückt, heißt der **Logarithme** des Verhältnisses D : A (*αριθμὸς λόγων*). Wenn im 128. §. F : A das Maaßverhältniß ist; so ist $\frac{2}{5}$ der Logarithme des Verhältnisses K : A, 2 der Logarithme des Verhältnisses L : A. Der Kürze wegen soll der Buchstab *l* in der Folge allemahl den Logarithmen desjenigen Verhältnisses bedeuten, dem er so vorausgesetzt

setzt ist, daß man wegen mehrerer Deutlichkeit da
Verhältniß in eine Parenthese einschließt. So wir
$\frac{3}{5} = l(D:A)$, $\frac{2}{5} = l(K:A)$, $2 = l(L:A)$, u.
f. wenn F:A das Maaßverhältniß ist, und in diese
Voraussetzung ist $l(F:A) = 1$, weil nun F:A be
Ausmessung der Verhältnisse das ist, was bey Aus
messung einzelner Grössen dasjenige Maaß ist, wel
ches man für Eins annimmt.

131. §.

Man kann jedes Verhältniß so ausdrücken, daß
eins von beyden Gliedern = 1 wird, wenn man nem
lich mit demjenigen Gliede dividirt, statt dessen man
die Einheit haben will. So ist z. E. $D:A = \frac{D}{A} : 1$ (181. §. G.). Weil dieses die Grösse des
Verhältnisses nicht ändert, so ändert es auch den Lo
garithmen desselben nicht. Es bleibt $l\left(\frac{D}{A} : 1\right) = l(D:A)$ vorausgesetzt, daß $F:A = \frac{F}{A} : 1$ das
Maaßverhältniß bleibe. Man kann nemlich auch
alle Glieder einer geometrischen Progression mit dem
ersten Gliede dividiren, ohne daß solches die Ver-
hältnisse der Glieder gegen einander ändert, und man
würde im 128. §. diese Progression erhalten.

$$1 \quad \frac{B}{A} \quad \frac{C}{A} \quad \frac{D}{A} \quad \frac{E}{A} \quad \frac{F}{A} \quad \frac{G}{A} \quad \frac{H}{A}$$
(1 2 3 4 5 6 7) u. s. f. Wenn

$F:A = \frac{F}{A} : 1$ das Maaßverhältniß bleibt, so

bleibt

bleibt $\frac{3}{5} = l\left(\frac{D}{A} : 1\right)$, $\frac{7}{5} = \left(\frac{H}{A} : 1\right)$ u. s. f.

Man kann also ein für allemahl annehmen, die geometrische Progression solle von 1 anfangen, und dann das Verhältniß eines gewissen Gliedes zur Einheit für das Maaßverhältniß annehmen: so wird dadurch die Grösse der Logarithmen der Verhältnisse aller übrigen Glieder zur Einheit bestimmt. Man nehme z. E. folgende Progression in Zahlen.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10
1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024 u. s. f.

und es sey 32 : 1 das Maaßverhältniß: so hat man $\frac{1}{5} = l(2:1)$, $\frac{3}{5} = l(8:1)$, $\frac{7}{5} = l(128:1)$, u. s. f.

132. §.

Der Logarithme des Verhältnisses einer Zahl zur Einheit heißt auch der Kürze wegen der Logarithme dieser Zahl: demnach ist nach diesem Sprachgebrauch der Logarithme von 8 nichts anders, als der Logarithme des Verhältnisses 8 : 1. Man muß also bemerken, daß in der Folge die Ausdrücke $l\,8$, und $l(8:1)$, oder überhaupt $l\,N$, und $l(N:1)$ als gleichgültig gebraucht werden. Wenn die Zahl fest gesetzt ist, deren Logarithme = 1 seyn soll: so ist das Maaßverhältniß festgesetzt, und zugleich sind die Logarithmen aller übrigen Zahlen bestimmt. Wenn man also den Logarithmen einer andern von der vorigen verschiedenen Zahl = 1 setzt: so ändert man dadurch zugleich die Logarithmen aller übrigen Zahlen. Im vor. §. ward $l\,32 = 1$ gesetzt; also war $l\,2 = \frac{1}{5}$, $l\,4 = \frac{2}{5}$, u. s. f. Wenn man aber $l\,128 = 1$ setzt; so wird $l\,2 = \frac{1}{7}$, $l\,4 = \frac{2}{7}$ u. s. f. Jede Reihe von Logarithmen mit ihren zugehörigen Zah-

len, die aus einem angenommenen einfachen Verhältniß ihren Ursprung hat, heißt ein Logarithmisches System, und die Zahl, deren Logarithme = 1 gesetzt ist, deren Verhältniß zur Einheit also das Maaßverhältniß, oder Grundverhältniß ist, heißt die *basis*, oder die Grundzahl des Systems. Demnach giebt es unzählig viele verschiedene Logarithmische Systeme, weil es ganz willkührlich ist, welche Zahl die basis des Systems seyn soll.

133. §.

Wenn in einerley Logarithmen-System zwey Verhältnisse gleiche Logarithmen haben; so sind die Verhälnisse gleich groß.

Sind aber die Logarithmen ungleich, so sind auch die Verhältnisse ungleich.

Beweis. 1. Es sey $b : 1$ das Grundverhältniß und $\frac{n}{m}$ der Logarithme der Verhältnisse B:A, und D:C, oder welches einerley ist, der Verhältnisse $\frac{B}{A} : 1$, und $\frac{D}{C} : 1$: so ist jedes dieser Verhältnisse $= \frac{n}{m}$ $(b : 1)$ (130. §.) das heißt, jedes dieser Verhältnisse ist aus dem Verhältnisse $\frac{1}{m}$ $(b : 1)$ *m*mahl genommen zusammengesetzt. Also ist $\frac{B}{A} : 1 = \frac{D}{C} : 1$ (124. §. 1 Satz.) oder B:A = D:C.

2.

3. Wäre aber $l\left(\frac{B}{A}:1\right)=\frac{r}{m}$ und $l\left(\frac{D}{C}:1\right)=\frac{n}{m}$: so wäre $\frac{B}{A}:1=\frac{r}{m}(b:1)$ und $\frac{D}{C}=\frac{n}{m}(b:1)$. Demnach wäre jenes Verhältniß aus $\frac{1}{m}(b:1)$ rmahl, und dieses aus eben dem Verhältnisse nmahl genommen zusammengesetzt, mithin wäre auch $\frac{B}{A}:1$ in $=\frac{D}{C}:1$, oder B:A in = D:C. (124. §. 2ter Satz.)

134. §.

Hieraus folgt umgekehrt: wenn zwey Verhältnisse gleich sind, so müssen sie in einerley System auch gleiche Logarithmen haben. Denn wären ihre Logarithmen ungleich, so wären die Verhältnisse selbst ungleich (133 §.) wider die Voraussetzung.

In einerley Logarithmen-System gehören also gleiche Zahlen zu gleichen Logarithmen, und umgekehrt, zu gleichen Logarithmen gehören gleiche Zahlen.

135. §.

Sobald die Grundzahl eines Logarithmen-Systems bestimmt ist, oder welches einerley ist, sobald man die Zahl festgesetzt hat, womit der Logarithme = 1 zusammen gehören soll, sobald ist das ganze System bestimmt, und jede Zahl hat ihren bestimmten Logarithmen, keinen andern. Ob man aber die

Grundzahl des Systems bestimmt, oder den Loga
rithmen irgend einer andern Zahl, oder eines Ver
hältnisses beliebig nimmt, das ist wieberum beydes ei
nerley. Denn sobald der Logarithme irgend einer Zahl
bestimmt ist, sobald ist zugleich die balis oder Grund-
zahl des Systems bestimmt. Wenn man festsetzt, es
solle $l256 = \frac{8}{5}$ d. i. $l(256:1) = \frac{8}{5}$ seyn; so muß der
Logarithme desjenigen Verhältnisses $= \frac{5}{5} = 1$ seyn,
welches 5 solcher Theile enthält, wovon 8 das Ver-
hältniß 256:1 ausmachen. Es sey b die balis des
Systems: so ist $256:1 = \frac{8}{5}(b:1)$, also $\sqrt[8]{256}:1$
$= \frac{1}{5}(b:1)$ (125. §. 1. Zus.). In diesem leichten
Exempel findet man bald, daß $\sqrt[8]{256} = 2$ sey, also
hat man $2:1 = \frac{1}{5}(b:1)$, und $32:1 = b:1$, oder
$b = 32$.

136. §.

Wenn man ein Verhältniß aus zweyen an-
dern zusammensetzt; so ist der Logarithme des
zusammengesetzten Verhältnisses die Summe
der zu einerley System gehörigen Logarith-
men jener Verhältnisse, woraus man es zu-
sammensetzt.

Beweis. Es sey $l(B:1) = \frac{n}{m}$, und $l(C:1)$
$= \frac{r}{m}$, die balis des Systems $= b$: so ist $B:1 =$
$\frac{n}{m}(b:1)$ und $C:1 = \frac{r}{m}(b:1)$, also $B \times C:1$
$= \frac{n+r}{m}(b:1)$, das heißt, das Verhältniß,

was man aus den vorigen beyden zusammengesetzt, muß das Verhältniß $\frac{1}{m}$ $(b:1)$ so vielmahl enthalten, als es in jenen beyden zusammen enthalten war. Demnach ist $l(B \times C:1) = \frac{n+r}{m}$ (130. §.) $= l(B:1) + l(C:1)$.

Zusatz. Also ist der Logarithme eines Products zweyer Zahlen die Summe der Logarithmen der Factoren.

137. §.

Der im vorigen §. bewiesene Satz gilt auch für mehr als zwey Verhältnisse. Wenn überhaupt ein Verhältniß, aus so vielen andern, wie man will, zusammengesetzt wird; so ist der Logarithme des zusammengesetzten Verhältnisses die Summe der Logarithmen der einzelnen Verhältnisse. Denn es ist $l(B \times C \times D:1) = l(B \times C:1) + l(D:1) = l(B:1) + l(C:1) + l(D:1)$ (136. §.), und eben so kann man von jeder Anzahl der einzelnen Verhältnisse auf die nächstfolgende um Eins grössere Anzahl schliessen.

Zusatz. Demnach ist auch überhaupt der Logarithme eines Products die Summe der Logarithmen der einzelnen Factoren, es mögen ihrer so viele seyn, als man will.

138. §.

Den Logarithmen eines Quotienten erhält man, wenn man den Logarithmen des Divisors vom Logarithmen des Dividendi subtrahirt, wenn hier noch vorausgesetzt wird, daß das Dividendum grösser als der Divisor sey.

Beweis. Es sey $\frac{B}{A} = Q$, so ist $B = A \times Q$

folglich $lB = lA + lQ$, (136. §.) und daraus folgt $lQ = lB - lA$.

1. Zusatz. Der Logarithme eines unächten Bruches wird gefunden, wenn man vom Logarithmen des Zählers den Logarithmen des Nenners subtrahirt.

2. Zusatz. In jedem System ist $l1 = 0$, denn es ist $1 = \frac{\Lambda}{A}$, was man auch statt A für eine Zahl setzt, also $l1 = l\Lambda - lA = 0$, weil in jedem System $lA = l\Lambda$ ist. Es ist nemlich $l1$ und $l(1:1)$ oder auch überhaupt $l(A:A)$ einerley. Wenn aber $\lambda = l(X:A)$ und $X \triangleright A$ ist; so erhellet, daß λ wachse, wenn X grösser wird, und abnehme, wenn X abnimmt. Je weniger X von A unterschieden ist, desto kleiner muß λ seyn, und man siehet leicht, wenn $X = A$ ist, daß nun das Verhältniß $X:A$ gar keine Grösse mehr habe, und also $\lambda = 0$ seyn müsse, weil λ die Grösse dieses Verhältnisses ausdrücken soll.

139. §.

Der Logarithme des Quadrats ist doppelt so groß, als der Logarithme der Wurzel, der Logarithme des Würfels dreymahl und überhaupt der Logarithme einer Potenz der Ordnung n ist $n$mahl grösser, als der Logarithme der Wurzel. (136. 137. §.)

1. Zusatz. Umgekehrt also ist der Logarithme der Quadrat-Wurzel die Hälfte vom Logarithmen des Quadrats, der Logarithme der Cubicwurzel der dritte Theil vom Logarithmen des Würfels, und

über-

überhaupt der Logarithme einer jeden Wurzel der Ordnung n wird gefunden, wenn man den Logarithmen der Potenz mit dem Wurzel-Exponenten dividirt. Wenn man nemlich $lA^n = nlA$ setzt; so ist $lA = \frac{1}{n} lA^n$: ist also $A^n = B$, so hat man $A = \sqrt[n]{B}$, folglich $l\sqrt[n]{B} = \frac{1}{n} lB$.

2. Zusatz. Der Logarithme einer jeden Bruch-Potenz wird gefunden, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt. Denn es ist $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ (59. §.), also $la^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n} la^m$: aber $la^m = mla$, also $la^{\frac{m}{n}} = \frac{1}{n} mla = \frac{m}{n} la$.

140. §.

Den Logarithmen eines ächten Bruchs zu finden.

Aufl. Man subtrahire den Logarithmen des Nenners vom Logarithmen des Zählers nach den Regeln der algebraischen Subtraction, (11. §.) so ist der Rest der gesuchte Logarithme.

Beweis. Der Logarithme des Bruchs $\frac{2}{3}$ ist eigentlich $= l(\frac{2}{3} : 1) = l(2 : 3)$. Wenn nun b die basis des Systems, und $b > 1$ ist: so kann das Verhältniß $\frac{2}{3} : 1$ aus dem Fundamental-Verhältniß $b : 1$ durch die Zusammensetzung und Theilung gar nicht entstehen. Denn es sey $\frac{2}{3} : 1 = \frac{m}{n} (b : 1)$:

so ist dies eben so viel, als $\frac{2}{3} : 1 = b^{\frac{m}{n}} : 1$ (125. §. 2. Zus.). Aber b^m ist allemahl grösser, als 1, also auch $b^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{b^m}$ allemahl grösser, als 1 (48. §.): dieserwegen kann $\frac{2}{3} : 1$ nie $= \frac{m}{n}$ $(b : 1)$ werden, was auch m und n für ganze Zahlen bedeuten, dagegen könnte wohl $1 : \frac{2}{3} = \frac{m}{n}$ $(b : 1)$ werden, und dann wäre $l\left(\frac{1}{2:3} : 1\right) = l(\frac{3}{2} : 1) = \frac{m}{n}$. Nun ist das Verhältniß $\frac{3}{2} : 1$ dem andern $\frac{2}{3} : 1$ zwar für sich gleich, aber auf entgegengesetzte Art: in jenem ist das vorhergehende Glied grösser, in diesem kleiner als das nachfolgende; dort ist das vorhergehende $\frac{3}{2}$mahl grösser, hier aber $\frac{3}{2}$mahl kleiner, als das nachfolgende Glied. Wenn also der Logarithme des Verhältnisses $\frac{2}{3} : 1$ beydes die Grösse und zugleich die entgegengesetzte Beziehung desselben gegen das Grundverhältniß ausdrücken soll; so muß $l(\frac{2}{3} : 1) = -l(\frac{3}{2} : 1)$ gesetzt werden, oder $l\frac{2}{3} = -l\frac{3}{2}$, folglich $l\frac{2}{3} = l2 - l3$. (138. §.)

1. Zusatz. Wenn das vorhergehende Glied $\frac{3}{2}$ des Verhältnisses $\frac{3}{2} : 1$ abnimmt, so nimmt der Logarithme $(\frac{3}{2} : 1)$ ab, und dieser Logarithme verschwindet, wenn $\frac{3}{2} = 1$ wird, weil nun das Verhältniß selbst keine Grösse hat (138. §. 2. Zus.). Wird das vorhergehende Glied kleiner als 1; so wächst das Verhältniß wieder, aber auf entgegengesetzte Art, denn nun wird das vorhergehende Glied gegen das folgende kleiner, da es vorher grösser war.

So

So erhellet deutlich, wie die Logarithmen der ganzen Zahlen und unächten Brüche durch die Gränze 0 in die ihnen entgegengesetzten Logarithmen der unächten Brüche übergehen.

2. Zusatz. Die Regel des 138. §. ist allgemein, wenn gleich das Dividendum kleiner als der Divisor, und der Bruch ein ächter Bruch ist. Man kann nemlich statt des Bruchs $\frac{2}{3}$, der im Beweise der Deutlichkeit wegen ist gebraucht worden, jeden andern setzen, weil auf die Grösse desselben gar nichts ankommt.

3. Zusatz. Verhältnisse, in welchen das vorhergehende Glied grösser als das nachfolgende ist, heissen sonst auch **Verhältnisse der grössern Ungleichheit**; so wie diejenigen, worin das vorhergehende Glied kleiner ist als das nachfolgende, **Verhältnisse der kleinern Ungleichheit** heissen. Die Logarithmen aller Verhältnisse der letzten Art, also auch aller ächten Brüche, sind demnach negativ, wenn der Logarithme der basis positiv genommen wird, und diese basis grösser als 1 ist.

4. Zusatz. Wenn aber die basis kleiner als 1 ist; so werden die Logarithmen der ächten Brüche positiv, die Logarithmen der ganzen Zahlen und unächten Brüche aber, so wie die Logarithmen aller Verhältnisse der grössern Ungleichheit sind alsdenn negativ.

141. §.

Der Logarithme einer jeden Potenz, auch wenn ihr Exponent eine negative Zahl ist, wird gefunden, wenn man den Logarithmen der Wurzel mit dem Exponenten der Potenz multiplicirt.

Beweis. Es ist $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$, es mag m eine ganze Zahl, oder einen Bruch bedeuten (66. §.), also $l a^{-m} = l 1 - m l a$. Aber $l 1 = 0$ (138. §. 2. Zus.), also $l a^{-m} = - m l a$.

1. Zusatz. Die Logarithmen aller Potenzen einer und eben derselben Wurzel sind mit den Exponenten der Potenzen in einerley Verhältniß: in dem Fall aber, wenn die Wurzel selbst die basis des Systems ist, sind die Exponenten der Potenzen zugleich ihre Logarithmen. Weil nemlich $l a^m = m l a$ ist, was auch m für eine Zahl bedeutet, so ist $m l a = m$, wenn $l a = 1$, oder a die basis des Systems ist.

2. Zusatz. Ist also die basis eines Systems gegeben, und man soll den Logarithmen einer andern Zahl suchen, der zu eben diesem System gehöret; so soll man eine Zahl finden, welche ausdrückt, in wie viel gleiche Factoren die basis zerfället, und wie viel solcher Factoren hinwiederum ineinander multiplicirt werden müssen, um die gegebene Zahl herzustellen. Das heißt mit andern Worten, man soll die gegebene Zahl als eine Potenz der basis ansehen, und den dazugehörigen Exponenten suchen.

142. §.

In verschiedenen Logarithmen-Systemen sind die Logarithmen, welche einer und eben derselben Zahl zugehören, in einem bestimmten Verhältnisse, welches für alle Zahlen einerley bleibt.

Beweis. In dem einen System sey β, in dem andern b die basis, so kann man auch die Zahl b als eine Potenz der Zahl β ansehen; und den dazu gehörigen Exponenten suchen. Dieser Exponent sey $= m$, also $b = \beta^m$. Ferner bezeichne y eine Zahl, welche man will, und im System, wozu die basis b gehört, sey log. $y = l$, so ist $y = b^l$, (141. §. 2. Zus.) also auch $y = \beta^{ml}$. Im System, wozu die basis β gehört, sey log. $y = \lambda$, so ist $\lambda = ml$, (141. §. 1. Zus.) folglich bleibt $\lambda : l = m : 1$, was man auch für eine Zahl anstatt y setzen will.

1. Zusatz. Wenn m eine positive Zahl und > 1, ist, so ist das Verhältniß $b : 1$ $m$mahl gröſſer, als das Verhältniß $\beta : 1$; diese Verhältnisse sind zwey verschiedene Maaßverhältnisse für ein und eben dasselbe Verhältniß $y : 1$, darum muß das kleinere Maaßverhältniß $\beta : 1$ $m$mahl mehr als das gröſſere $b : 1$ in dem Verhältnisse $y : 1$ enthalten, und eben deßwegen $\lambda = ml$ seyn.

2. Zusatz. Es hat hiemit eben die Bewandniß, wie mit allen andern Messungen. Von der Verschiedenheit des Maasses, dessen man sich bedienet, rührt es her, daß eine und eben dieselbe Gröſſe bald durch diese bald durch jene Zahl ausgedrückt wird, nachdem man dieses oder ein andres Maaß erwählet hat. Wenn eine Distanz 100 Ruthen lang ist, und 10 Fuß auf eine Ruthe gerechnet werden, so muß man eben dieselbe Distanz 1000 Fuß lang finden.

143. §.

Wenn man für alle Zahlen die dazugehörigen Logarithmen hätte, oder wenigstens leicht finden könnte, und wenn man auch umgekehrt die Zahl leicht wissen

könnte, die mit einem herausgebrachten Logarithmen zusammen gehörte; kurz wenn man ein für allemahl ein gewisses Logarithmisches System berechnet hätte: so würde man bey weitläuftigen Rechnungen, wo grosse Zahlen in einander zu multipliciren und zu dividiren vorkommen, mit ihren Logarithmen rechnen können (136. 137. 138. §.). Man würde durch Hülfe der Logarithmen überaus leicht jede Zahl auf jede verlangte Potenz erheben, und aus jeder Zahl eine verlangte Wurzel ausziehen können (139. §.), und dies alles würde die Rechnungen ungemein erleichtern. Durch diese Betrachtung sind verschiedene Mathematiker im Anfange des vorigen Jahrhunderts bewogen worden, dergleichen Logarithmen-Systeme zum practischen Gebrauch zu berechnen, und dies ist der Ursprung der sogenannten Logarithmen-Tafeln.

Die erste Bekanntmachung eines Logarithmen-Systems hat man einem Schottländischen Freyherrn Joh. Neper, Bar. von Merchiston, zu verdanken, wenn gleich auch andre und unter denselben deutsche Mathematiker noch früher auf die ersten Grundbegriffe von den Logarithmen verfallen sind. Man verglich die Eigenschaften der Arithmetischen und Geometrischen Proportion (160. 175. §. R.) mit einander, und die davon abhängenden Eigenschaften der Arithmetischen und Geometrischen Progressionen. (164. 165. 178. 179. 192. §. Rech.). Bey den Arithmetischen Proportionen und Progressionen wird das durch die Addition und Subtraction gefunden, was man bey den Geometrischen durch die Multiplication und Division findet: dieses veranlaßte, daß man versuchte, eine Arithmetische Progression mit einer Geometrischen so zu verbinden, daß die

Glie-

Glieder der einen eine beständige Verbindung mit den gleichnahmigen Gliedern der andern hätten, und jedes Glied der einen das gleichnahmige Glied der andern bestimmte. Aus ältern Schriften gehört hieher die bekannte merkwürdige Stelle in *Michaelis Stifelii* Arithmetica Integra, Norimb. 1544. fol. 249. 250. wo das wesentliche der ganzen Theorie stehet, nur daß der Nahme Logarithme noch nicht gebraucht ist. Man setze unter den Gliedern der Geometrischen Progression P, die von 1 anfängt, eine Arithmetische L, die von 0 anfängt, auf folgende Art:

P 1 2 4 8 16 32 64 128 256 u. s. f.
L 0 1 2 3 4 5 6 7 8 u. s. f.

so zeigt jede Zahl der Reihe L an, wie viele gleiche Verhältnisse in der Geometrischen Progression zwischen dem ersten und demjenigen Gliede fallen, welches mit der vorigen Zahl der Arithmetischen Reihe gleichnahmig ist. Die Zahl 5 zeigt auf solche Art an, daß zwischen den Gliedern 32 und 1 der obern Reihe 5 eben so grosse Verhältnisse, als 2 : 1 enthalten sind, und das veranlaßte den Nahmen ἀριθμὸς λόγων, (numerus rationum) oder Verhältniß-Zahl.

144. §.

Ehe und bevor man es als eine wesentliche Eigenschaft des Logarithmen eines Verhältnisses festgesetzt hatte, daß derselbe die Grösse des dazu gehörigen Verhältnisses in Vergleichung mit einem angenommenen Grundverhältnisse anzeigen solle, hielte man es nicht für nothwendig, daß die Reihe P von der 1, und die Reihe L von der 0 anfange, ob dies gleich die einfacheste Voraussetzung ist. Wollte man die nachstehenden Reihen zum Grunde legen,

P 7 21 63 189 567 u. s. f.
L 5 9 13 17 21 u. s. f.

so würden doch zwischen 5 und 21 so viele gleiche Differenzen fallen, als es zwischen 7 und 567 gleiche Verhältnisse giebt, und eben diese Bewandniß hat es mit jeden zweyen andern gleichnahmigen Gliedern. Man drücke beide Reihen allgemein so aus:

(P) $a \quad am \quad am^2 \quad am^3 \quad am^4 \quad am^5 \quad am^6 \ldots$
(L) $\alpha \quad \alpha+\delta \quad \alpha+2\delta \quad \alpha+3\delta \quad \alpha+4\delta \quad \alpha+5\delta \quad \alpha+6\delta \ldots$

und nenne die Glieder der Reihe L die Logarithmen der Glieder der Reihe P: so erhellet, daß die Logarithmen aller Glieder der Reihe P bestimmt sind, wenn man die Logarithmen zweyer ihrer Glieder bestimmt hat. Es kann hier also $a = 1$ genommen werden, ohne daß es schlechterdings nothwendig wäre $\alpha = 0$ zu nehmen. Indessen verbindet Stifelius schon die 0 mit 1 setzt auch die Reihe rückwärts fort, und giebt den ächten Brüchen negative Indices, wie es das nachstehende aus seiner schon angeführten Schrift genommene Exempel zeiget

$$\begin{array}{cccccccccccc} -3 & -2 & -1 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & 1 & 2 & 4 & 8 & 16 & 32 & 64 \end{array}$$

Bey jeder Art, den Ursprung der Logarithmen vorstellig zu machen, kommt alles auf den Umstand an, daß die gleichen Differenzen der Reihe L die Anzahl der damit zusammengehörigen gleichen Verhältnisse der Reihe P anzeigen: auf diesen Umstand gründen sich alle Schlüsse, worauf Neper die Berechnung des Logarithmischen Systems gebauet hat, welches er zuerst bekannt machte, als er 1614 zu Edenburg das berühmte Werk: Mirifici canonis Logarithmorum *Descriptio* herausgab. Von diesem Werke und den dazu gehörigen Tafeln hat man auch eine zu Lion im

Jahr

Jahr 1719 veranstaltete Ausgabe. In eben diesem Jahre gab Nepers Sohn seines 1718 verstorbenen Vaters Buch zum andernmahl heraus, zu dieser zweyten Edenburger Ausgabe kamen drey Zusätze als Opera posthuma auch unter einem besondern Titel; der erste und wichtigste dieser Zusätze ist: Mirifici Canonis Logarithmorum *Constructio* et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines. Diese Opera posthuma sind zu Lion im Jahr 1620 unter dem eben angezeigten Titel ebenfalls der Ausgabe des ersten Werkes beygefügt worden. In dieser neuern zu dem ersten Werk im Jahr 1619 hinzugekommenen Abhandlung sind die Gründe, worauf Neper die Berechnung seiner Tafeln gebauet hat, vollständiger aus einander gesetzt. Wer den Zusammenhang der daselbst vorgetragenen Theorien in Erwegung ziehen will, wird bald finden, daß die eigentliche Natur der Logarithmen nach den eigenen Begriffen des Erfinders durch die im 130. und 132. §. gegebene Erklärung am deutlichsten ins Licht gesetzt werde. Die besten unter den neuern Schriftstellern, welche die Anfangsgründe abhandeln, erklären sich darüber eben so, dahin ich vornemlich folgende rechne. Hausen in den Elementis Matheseos 58 S. 6 Defin. von Segner in den Vorlesungen über die Rechenkunst und Geometrie 13. Abschnitt 140. u. f. §. auch in beyden Ausgaben der lateinischen Anfangsgründe. Kästner in den Anfangsgründen der Arithmetik und Geometrie VI Cap. der Rechenkunst 18. §.

145. §.

Wenn der Logarithme einer von 1 unterschiedenen Zahl = 0 gesetzt wird; so drücken die Logarithmen eigentlich die Grösse der Verhältnisse der ihnen zugehö-

hörigen Zahlen gegen diejenige Zahl aus, deren Lo
garithme = o genommen ist. Man nehme z. E. fol
gendes System:

(P) $\frac{1}{16}$ $\frac{1}{8}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{2}$ 1 2 4 8 16 32 u. s. f.
(L) −1 0 1 2 3 4 5 6 7 8 u. s. f.

wo $l1 = 3$ gesetzt ist. Wenn man beyde Reihen rückwärts fortsetzt, so wird $l\frac{1}{8} = 0$, und der Aus druck $l1 = 3$ will hier eigentlich so viel sagen, $l(1:\frac{1}{8}) = 3$. Das Grundverhältniß dieses Systems ist das Verhältniß $\frac{1}{4}:\frac{1}{8}$, oder 2:1, daß also eigentlich $l(\frac{1}{4}:\frac{1}{8})$ oder $l(2:1) = 1$ ist, so wie $l(\frac{1}{8}:\frac{1}{8}) = l(1:1) = l1 = 0$ bleibt, wie nach dem 138. §. er fodert wird. Will man die Voraussetzung $l1 = 3$ beybehalten, so leiden die Regeln des 136. und 138. §. einige Aenderung. Es muß nemlich von der Summe der Logarithmen der Factoren $l1 = 3$ subtrahirt werden, um den Logarithmen des Products zu finden: zur Differenz der Logarithmen des Divisors und Dividendi aber muß man $l1 = 3$ addiren, wenn der Logarithme des Quotienten gesucht wird. Denn es ist eigentlich $l\frac{\frac{1}{2} \times 4}{1} = l\frac{1}{2} + l4 - l1$, $l32:\frac{4}{1} = l32 + l1 - l4$. Nach Nepers Tafel ist $l10000000 = 0$ und $l5000000 = 6931469$, das heißt, wie er sich auch selbst darüber erklärt, es $l\frac{5000000}{10000000}$ oder $l\frac{1}{2} = 6931469$.

146. §.

Eine allgemeine Gleichung zu finden, welche angiebt, wie der Logarithme einer Zahl in jedem System von dieser Zahl abhängt.

Aufl. 1. Wenn b die Grundzahl des Systems und n eine positive ganze Zahl bezeichnet, so fällt die

Zah

Zahl $\sqrt[n]{b} = b^{\frac{1}{n}}$ desto kleiner aus, je grösser die Zahl n angenommen wird, demnach aber kann $b^{\frac{1}{n}}$ nie bis auf 1 abnehmen, so lange n eine Zahl von bestimmter Grösse bleiben soll. Um $\sqrt[n]{b}$ aus b zu finden, würde vielleicht eine etwas weitläuftige Rechnung nöthig seyn, wenn man b als gegeben annehmen wollte; auch wüste man wenigstens nicht jedesmahl vorher, ob $\sqrt[n]{b}$ eine rationale oder irrationale Zahl seyn würde. Weil es nun willkührlich ist, wie groß man b annehmen will; so kann man umgekehrt suchen, wie groß b ausfallen muß, wenn $\sqrt[n]{b}$ eine rationale Zahl werden soll, die sehr wenig grösser, als 1 ist. Man setze also $\sqrt[n]{b} = 1 + \frac{1}{n}$, so wird $b = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$, und man findet nach dem 112. §.

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 1 + 1 + \frac{n.n-1}{1.2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3} \cdot \frac{1}{n^3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \cdot \frac{1}{n^4} + \ldots.$$

oder

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2 + \tfrac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} + \ldots.$$

So lange n eine Zahl von bestimmter Grösse bleibt, so lange bestehet auch diese

Reihe aus eben so vielen Gliedern, als die Zahl n anzeigt, denn das $(n+1)$te Glied erhält den Factor $n - n = 0$, so wie alle weiter folgende Glieder.

2. Nun sey m eine andre positive ganze Zahl, so erhält man $b^{\frac{m}{n}} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 1 + m \cdot \frac{1}{n} + \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} \cdot \frac{1}{n^2} + \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot \frac{1}{n^3} + \ldots$ oder $b^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n} \cdot \frac{m-2}{n} + \ldots$ und diese Reihe bestehet ausser dem ersten Gliede noch aus m Gliedern, weil das $(m+1)$te und alle weiter folgende den Factor $m - m = 0$ haben. Ferner ist nun $\frac{m}{n} = lb^{\frac{m}{n}}$, weil $lb = 1$ seyn soll: wenn also ein rationale Zahl $\frac{m}{n}$ gegeben ist, so kann man allemahl eine andre Zahl angeben, wovon $\frac{m}{n}$ der Logarithme ist, in einem System, wozu die Grundzahl $2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{n-2}{n} + \ldots$ gehört, in diesem System nemlich ist $\frac{m}{n} = \log. \left(1 + \frac{1}{n}\right)^m$. Ist überdem eine andre ratio-

rationale Zahl wie $\frac{\mu}{n}$ gegeben, die sich durch ei-

nen Bruch ausdrücken läßt, welcher mit $\frac{m}{n}$ einer-

ley Nenner hat, so erhält man $\frac{\mu}{n} =$

log. $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$, und die Grundzahl bleibt

$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$: auch bleibt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ eine

rationale Zahl, wofern μ noch eine ganze Zahl ist. Können aber beyde Brüche nicht derselben Nenner n behalten, wofern nicht für μ ein gebrochener Zähler genommen wird, so bleibt $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\mu}$ wenigstens nicht allemahl eine rationale Zahl.

3. Umgekehrt also, wenn eine Zahl unter der allgemeinen Form $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}$ enthalten ist, so ist ihr Logarithme $= \frac{m}{n}$ in einem System, wozu die Grundzahl $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$ gehört. Es kann aber nicht jede rationale Zahl unter der Form $\left(1+\frac{1}{n}\right)^{m}$ enthalten seyn, wenn m und n bestimmte ganze Zahlen bleiben: denn sonst müste man aus einer jeden rationalen Zahl eine rationale Wur-

zel ziehen können, die $= 1 + \frac{1}{n}$ wäre. Gesetzt es

sollte $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 10$ seyn, so würde erfodert,

daß $1 + \frac{1}{n} = \sqrt[m]{10}$ sey: aber eine solche rationale

Wurzel aus 10 giebt es nicht; also hat die Zahl 10

keinen rationalen Logarithmen in dem System dessen

Grundzahl $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ ist, man mag unter den

ganzen Zahlen welche man will für n annehmen. Weil

jedoch beyde Werthe $1 + \frac{1}{n}$ und $\sqrt[m]{10}$ sich der

Gränze 1 nähern, je grösser n also auch m angenom-

men werden, so kann man der Gleichung $\left(1 + \frac{1}{n}\right)$

$= \sqrt[m]{10}$, und überhaupt jeder Gleichung wie $1 + \frac{1}{n}$

$= \sqrt[m]{N}$, wenn N eine gegebene rationale Zahl be-

zeichnet, ein Genüge leisten, wenn man für die

Grundzahl des Systems die Gränze der Zahl

$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ annimmt, die gefunden wird, wenn

man $\frac{1}{n} = 0$ setzt: da dann zugleich $\frac{1}{m} = 0$

seyn muß, damit $N^{\frac{1}{m}} = 1$ werde.

4. Man setze nun $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^m = 1 + x$, s

erhäl

erhält man $\frac{1}{n} = (1+x)^{\frac{1}{m}} - 1$, mithin $\frac{m}{n} =$ $m((1+x)^{\frac{1}{m}} - 1)$, also auch log. $(1+x) =$ $m((1+x)^{\frac{1}{m}} - 1)$, und in dieser Gleichung kann $1+x$ jede Zahl bedeuten, wenn $\frac{1}{n} = 0$ gesetzt, und dieser Voraussetzung gemäß die Grundzahl b des Systems gesucht wird. Es war aber $b = 2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{n-1}{n}$ $+ \frac{1}{2.3} \cdot \frac{n-1 \cdot n-2}{n\ \ n} + \frac{1}{2.3.4} \cdot \frac{n-1}{n}$ $\cdot \frac{n-2}{n} \cdot \frac{n-3}{n} + \ldots$. Dieser Werth sey $= \beta$, wenn $\frac{1}{n} = 0$ ist, so erhält man

$\beta = 2 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \ldots$
$+ \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} + \frac{1}{40320} + \ldots\ldots\ldots$
$= 2{,}71828182845904523536028 \ldots$. Ferner ist nach dem 114. §. $(1+x)^{\frac{1}{m}} - 1 = \frac{1}{m}x$ $+ \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)x^2 + \frac{1}{2.3} \cdot \frac{1}{m}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)x^3$ $+ \ldots$. also log. $(1+x) = x + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{m} - 1\right)x^2$ $+ \frac{1}{2.3}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)x^3$ $+ \frac{1}{2.3.4}\left(\frac{1}{m} - 1\right)\left(\frac{1}{m} - 2\right)\left(\frac{1}{m} - 3\right)x^4 + \ldots$, und damit dieser Logarithme mit der Grundzahl β zu-

zusammen gehöre, muß $\frac{1}{m} = 0$ gesetzt werden, da dann log. $(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \ldots$ gefunden wird.

5. In der oben n. 2. gefundenen Gleichung $b^{\frac{m}{n}} = 1 + \frac{m}{n} + \frac{1}{2} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n} + \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{m}{n} \cdot \frac{m-1}{n} \cdot \frac{m-2}{n} + \ldots$ kann nun ebenfalls $\frac{1}{n} = 0$ gesetzt werden, damit sich b in β verwandele. Bey eben dieser Voraussetzung sey die Gränze des Werthes $\frac{m}{n} = z$, so findet man $\beta^z = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{z^3}{1.2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \ldots$ und das ist die Zahl, welche mit dem Logarithmen z zusammen gehört, wenn β die Grundzahl des Systems bleibt.

147. §.

Dasjenige Logarithmensystem nennt man das natürliche System, dessen Grundzahl die Gränze des Werthes $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \beta$ ist, und die dazu gehörigen Logarithmen nennt man die natürlichen Logarithmen: alle übrige Systeme heissen künstliche Logarithmensysteme. Wenn man nun $1 + x = y$ setzt, und l. nat. y oder l. art. y schreibt nachdem der natürliche, oder ein künstlicher zu einer andern Grundzahl b gehöriger Logarithme der Zahl y verstan-

standen werden soll; so hat man $\frac{\text{l. art. } y}{\text{l. nat. } y} = \frac{\text{l. art. } b}{\text{l. nat. } b}$ (142. §.), mithin l. art. $y = \frac{1}{\text{l. nat. } b}$. l. nat. y, weil der Voraussetzung gemäß l. art. $b = 1$ ist. Die Zahl $\frac{1}{\text{l. nat. } b}$ heißt der Modulus des zur Grundzahl b gehörigen Logarithmen-Systems, und diesem Sprachgebrauch gemäß ist der Modulus des natürlichen Systems $= 1$, weil für dieses System β anstatt b gesetzt werden muß, und l. nat. $\beta = 1$ ist.

1. Zusatz. Wenn ein gegebener Logarithme λ zu einem künstlichen System mit der Grundzahl b gehört, und die gesuchte Zahl $= y$ gesetzt wird, so ist $\lambda = \text{l. art. } y = \frac{1}{\text{l. nat. } b}$ l. nat. y. Wenn also Kürze halber ly anstatt l. nat. y gesetzt wird, so ist $l.y = \lambda.lb$. Man setze also $ly = z$, so ist $y = \beta^z$ und $z = \lambda.lb$. Beyde Werthe in die Gleichung des 146. §. n. 5. gesetzt geben $y = 1 + \lambda.lb + \frac{1}{2}\lambda^2.(lb)^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\lambda^3.(lb)^3 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}\lambda^4.(lb)^4 + \ldots\ldots$

2. Zusatz. Wenn man auch vielleicht ein künstliches System zum gewöhnlichen Gebrauch bey Zahlenrechnungen bequemer fände, als das natürliche System, so würde man doch, um die zum künstlichen System gehörigen Logarithmen zu finden, am besten zuerst das natürliche System berechnen, weil aus dem natürlichen Logarithmen einer jeden Zahl der zur Grundzahl b gehörige künstliche Logarithme eben der Zahl leicht gefunden wird, wenn man den schon bekannten natürlichen Logarithmen mit dem

Modulus $\frac{1}{l \text{nat.} b}$ des künstlichen Systems multiplicirt. Uebrigens ist dabey als ein allgemeiner Vortheil zu bemerken, daß man in jedem System nur die Logarithmen der Primzahlen aus der allgemeinen Formul suche, weil man die Logarithmen der daraus durch Multiplication zusammen gesetzten Zahlen durch leichte Addition der Logarithmen ihrer Factoren findet. (136. §. Zus.)

3. Zusatz. Nur die natürlichen Logarithmen, welche mit den kleinern natürlichen Zahlen zusammen gehören, erfordern eine etwas umständliche Rechnung, wenn man sie in vielen Decimalstellen richtig finden will: je grösser die Zahlen werden, desto mehr erleichtert sich die Arbeit. Gesetzt es ist l nat. y schon gefunden, so hat man $y + 1 = y\left(1 + \frac{1}{y}\right)$: wenn also hier Kürze halber das l für sich allein allemahl den natürlichen Logarithmen bezeichnet, so ist $l(y+1) = ly + l\left(1 + \frac{1}{y}\right)$, und man hat

$$l\left(1 + \frac{1}{y}\right) = \frac{1}{y} - \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{y^2} + \tfrac{1}{3} \cdot \frac{1}{y^3} - \tfrac{1}{4} \cdot \frac{1}{y^4} + \ldots$$

Eigentlich ist nun der gesuchte Logarithme die Gränze, welcher diese Summe immer näher kommt, je mehr Glieder der Reihe mitgenommen werden. Wenn aber y wenigstens nicht kleiner als 100 ist, so bedarf es eben so gar vieler Glie-

Glieder der Reihe nicht mehr, um den gesuchten Logarithmen richtig genug zu finden.

4. Zusatz. Weil $l(1+x) = x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 + \ldots\ldots$ gefunden ist, so erhält man auch $l(1-x) = -x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{5}x^5 - \frac{1}{6}x^6 - \ldots\ldots$, weil man nur vor den Potenzen mit ungraden Exponenten das Zeichen + in das entgegengesetzte zu verwandeln hat. (53. §. Zus.). Daraus findet man $l\frac{1+x}{1-x} = l(1+x) - l(1-x)$ $= 2(x + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{7}x^7 + \ldots)$. Man setze ferner $\frac{1+x}{1-x} = \frac{p+q}{p}$, so folgt daraus $p+px = p+q-px-qx$, und $(2p+q)x = q$, mithin $x = \frac{q}{2p+q}$. Wenn nun $p = q = 1$ gesetzt wird, so ist $\frac{1+x}{1-x} = 2$, und $x = \frac{1}{3}$, also log. nat. 2

$$= 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \ldots\right).$$

Ferner sey $p = 2$, $q = 1$, so ist $\frac{1+x}{1-x} = \frac{3}{2}$, und $x = \frac{1}{5}$, mithin l. nat. 3 = l. nat. 2

$$+ 2\left(\frac{1}{5} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{5^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{5^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{5^7} + \ldots\right).$$

Weiter ist $l4 = l2^2 = 2\,l2$ (139. §.) und wenn $p = 4$, $q = 1$ gesetzt wird, so ist $\frac{1+x}{1-x} = \frac{5}{4}$, $x = \frac{1}{9}$, mithin

l. nat. $5 = $ l. nat. 4
$$+2\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{9^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{9^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{9^7}+\ldots\right),$$
so wie $l6 = l2 + l3$.

Setzt man $p = 6$, $q = 1$, so ist $\frac{1+x}{1-x} = \frac{7}{6}$, $x = \frac{1}{13}$, und man findet l. nat. $7 =$ l nat. 6
$$+2\left(\frac{1}{13}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13^3}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{13^5}+\frac{1}{7}\cdot\frac{1}{13^7}+\ldots\right),$$
$l.8 = l2^3 = 3l2$, $l9 = l3^2 = 2l3$, $l10 = l2 + l5$. Weil jede Primzahl eine ungrade Zahl ist, so kann man allemahl $q = 1$, und p der nächstvorhergehenden graden Zahl gleich setzen, wovon man den Logarithmen schon gefunden hat. Wenn alsdenn $l\frac{p+1}{p} = L$ gefunden wird, so ist $l(p+1) = lp + L$.

5. Zusatz. Die Quadratzahl von einer Primzahl ist ebenfalls eine ungrade Zahl: wenn also die um Eins kleinere Zahl sich in solche Factoren zerfällen lässet, wovon die Logarithmen schon gefunden sind, so sucht man noch vortheilhafter zuerst den Logarithmen der Quadratzahl, woraus der Logarithme der Wurzel leicht dem 139. §. 1. Zus. gemäß gefunden wird. Vielleicht hat die um Eins grössere Zahl die erforderliche Eigenschaft: alsdenn setzt man p der Quadratzahl gleich, und findet $lp = l(p+1) - L$.

Nachdem $l2$ schon gefunden ist, hat man $l8 = l2^3 = 3l2$. Um nun $l3$ zu finden, suche man zuerst $l9$, und setze $q = 1$, $p = 8$, so ist $x = \frac{1}{17}$, und man fin-

findet $l9 = l8 + l\frac{9}{8}$, mithin ferner $l3 = \frac{1}{2} l9$. Ferner ist $5^2 = 25$, und $24 = 8 \times 3$, $l24 = l8 + l3$: wird also $q = 1$, $p = 24$ gesetzt, so hat man $x = \frac{1}{49}$, $l25 = l24 + l\frac{25}{24}$, und $l5 = \frac{1}{2} l25$.

Weiter ist $7^2 = 49$, und $l48 = l2 + l24$. Man setze $q = 1$, $p = 48$, so ist $x = \frac{1}{97}$, $l49 = l48 + l\frac{49}{48}$, und $l7 = \frac{1}{2} l49$. In diesem Exempel hat man auch schon $l50 = l2 + l25$, also könnte man $q = 1$, $p = 49$ setzen; das giebt $x = \frac{1}{99}$. Wird alsdenn $l\frac{50}{49} = L$ gefunden, so ist $l49 = l50 - L$, wie die allgemeine Formul $lp = l(p+1) - L$ anzeigt.

6. Zusatz. Die Rechnung selbst kann man auf mehr als eine Art vortheilhaft einleiten, wovon die nachstehende Rechnung eine Probe giebt. Es ist

$$\text{l. nat. } 2 = 2\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^5} + \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^7} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^9} + \ldots\right),$$

und man findet

$\frac{1}{3}$

$$\frac{1}{3} = 0{,}3333333333 = a$$

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3^3} = \frac{1}{3} \cdot \frac{a}{9} = 0{,}0123456790 = b$$

$$\frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3^5} = \frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 5 \cdot 3^5} = \frac{3}{5} \cdot \frac{b}{9} = 0{,}0008230453 = c$$

$$\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{3^7} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 3^7} = \frac{5}{7} \cdot \frac{c}{9} = 0{,}0000653211 = d$$

$$\frac{1}{9} \cdot \frac{1}{3^9} = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 3^9} = \frac{7}{9} \cdot \frac{d}{9} = 0{,}0000056450 = e$$

$$\frac{9}{11} \cdot \frac{e}{9} = 0{,}0000005132 = f$$

$$\frac{11}{13} \cdot \frac{f}{9} = 0{,}0000000482 = g$$

$$\frac{13}{15} \cdot \frac{g}{9} = 0{,}0000000047 = h$$

$$\frac{15}{17} \cdot \frac{h}{9} = 0{,}0000000005 = i$$

$$\frac{17}{19} \cdot \frac{i}{9} = 0{,}0000000000$$

Summe $= 0{,}3465735903$

mult. 2

l. nat. $2 = 0{,}6931471806$

Eine ähnliche Rechnung giebt

l. nat. $5 = 1{,}6094379124$

also l. nat. $10 = 2{,}3025850930$.

Auf ähnliche Art erhält man

l. nat.

l. nat. 3 = 1,0986122887
l. nat. 7 = 1,9459101372
l. nat. 11 = 2,3978952728
und so ferner fort.

148. §.

Der mit einer bekannten Zahl zusammen gehörige Logarithme eines künstlichen Systems ist gegeben, man soll den Modulus m und die Grundzahl des Systems finden.

Aufl. Die gesuchte Grundzahl sey $= b$, so ist

$$\text{l. art. } y = \frac{1}{\text{l. nat. } b} \text{ l. nat. } y;$$ (147. §.) also umgekehrt

$$m = \frac{1}{\text{l. nat. } b} = \frac{\text{l. art. } y}{\text{l. nat. } y}.$$ Daraus findet man ferner

$$\text{l. nat. } b = \frac{1}{m} = \frac{\text{l. nat. } y}{\text{l. art. } y} = z,$$

und die hiezu gehörige Zahl giebt die Gleichung $b =$

$$\mathfrak{B}^z = 1 + z + \tfrac{1}{2}z^2 + \frac{z^3}{2.3} + \frac{z^4}{2.3.4} + \frac{z^5}{2.3.4.5} + \ldots$$

(146. §. n. 5.).

Exempel. In Nepers Tafeln ist $l\frac{1}{2} = 6931469$ (145. §.) und es ist l. nat. $\frac{1}{2} = -$ l. nat. $2 = -0{,}6931471$. Diese Logarithmen sind einander entgegengesetzt, und der Nepersche ist fast grade 10000000 mahl grösser als der natürliche: genauer findet man

$$\frac{\text{l. nat. } 2}{\text{l. Nepp. } 2} = -0{,}000000010000003, = z, \text{ al-}$$

so ferner

$$1 = 1{,}000000000000000$$
$$z = -0{,}000000010000003$$

$$0{,}999999899999997$$
$$\tfrac{1}{2}z^2 = 0{,}000000050000001$$

$$b = 0{,}999999849999998 - \ldots\ldots$$

mithin wäre die Nepersche Grundzahl sehr nah $= 0{,}9999999$, wofern anders alle 7 Ziffern des au Nepers Tafeln genommenen Logarithmen richtig be rechnet sind. Andre Logarithmen aus seiner Tafel ge ben noch näher die letztere Zahl als Grundzahl; denn für die Zahl $\frac{1}{2}\sqrt{2} = 0{,}7071068$ ist der Logarithm 3465735 angegeben, und man findet

$$\text{l. nat. } 2 = 0{,}6931471$$
$$\tfrac{1}{2}\text{ l. nat. } 2 = \text{l.}\sqrt{2} = 0{,}34657355$$
$$\text{l. nat. } \tfrac{1}{2} = -0{,}6931471$$

$$\text{also l. nat. } \tfrac{1}{2}\sqrt{2} = -0{,}34657355$$

wo die ersten 7 Ziffern völlig mit den Nepersch en übe einkommen. Wenn man hiemit die Art vergleicht, wie Neper seine Rechnung einleitet, (Mirifici Canonis Log. *Constructio* pag. 15.) so findet man auch, daß er log. $9999999 = 1$ setze, das heißt nach seinem Sprachgebrauch, log. $\frac{9999999}{10000000} = 1$, wie er selbst hinzusetzt, mit einem unmerklich kleinen Fehler. Die semnach ist auch ohne merklichen Fehler $\frac{1}{\text{l. nat. } b}$

$$= -\frac{1}{0{,}0000001} = -10000000,$$

und wenn y eine gegebene Zahl ist, so findet man l. Nep. $y =$

$$-10000000 \times \text{l. nat. } \frac{x}{10000000}.$$

Neper selbst braucht das Wort basis oder Grundzahl nicht, denn die-

dieser Sprachgebrauch ist später eingeführt. Was man aber nach dem nun eingeführten Sprachgebrauch basis des Neperschen Systems nennen muß, das ist die Zahl 0,9999999, und der Modulus ist = 10000000. Bey ihm sind die Logarithmen der ächten Brüche positiv, und die übrigen Zahlen haben negative Logarithmen.

149. §.

Anmerkung. Ich habe dieses Exempel nicht gewählt, um die Grundzahl des Neperschen Systems durch Rechnung zu suchen, sondern um die allgemeine Auflösung der Aufgabe dadurch zu erläutern; denn wie ich schon angezeiget habe, Neper selbst sagt es zu mehrern mahlen ganz bestimmt und deutlich, daß er $l\,9999999 = 1$ setze, und seine ganze Rechnung hängt von dieser Voraussetzung ab. Diese Voraussetzung ist bey der Art, wie er den Ursprung der Logarithmen vorstellig macht, nicht ganz willkührlich; (Logarithmorum Canonis descriptio, Lib. 1. Cap. 1. pag. 3. num. 6.) er sucht zwey Zahlen, zwischen welchen der Log. des Verh. 9999999 : 10000000, womit er seine Rechnung anfängt, vermöge der von ihm festgesetzten Erklärung, als zwischen zwoen Gränzen enthalten seyn muß, und findet die Gränzen 1 und 1,00000001. (Mirifici Can. Log. Constructio, n. 29. 30. 31. pag. 15.) Er setzt hinzu, am richtigsten wäre also für den gesuchten Log. die Zahl 1,000000005 anzunehmen, wenn nicht die beyden Gränzen ohnehin schon insensibili fractione verschieden wären. Sonst bleibt er bey dem Grundsatz (a. a. O. n. 31.) Insensibili differentia distantes termini ipsi, sive inter eos quidvis pro numero artificiali vero habetur.

Im

Im 146sten §. 191—194. S. der ersten Auflage dieses meines mathem. Lehrbegriffes habe ich die Art, wie Neper seine Rechnung anfängt, und bis auf die ersten hundert Zahlen mit ihren Logarithmen fortfährt, historisch erzählt, ich habe alle auf der 192 Seite angezeigten Zahlen aus dem Nepersch̃en Werke pag. 9. abgeschrieben, keine einzige berechnet. Eben darum habe ich mir eine Stelle in des H. Hofr. Kästners Astronomischen Abhandlungen, 2te Sammlung 70 — 73. S. anfangs gar nicht erklären können. Es heißt daselbst:

„Ich setzte, Neper habe 1 für den Logarithmen von 9999999 angenommen, und suchte es dadurch zu bestätigen, daß ich die ersten Glieder dieser Progression berechnete, deren Logarithmen 2, 3, 4, 5, 6, sind. — — — Indessen, ob Neper wirklich diese Progression angenommen habe, das liesse sich nur sicher beurtheilen, wenn man Glieder, die von ihrem Anfange etwas entfernt wären, berechnete, und sähe, was Neper für sie für Logarithmen angiebt. — — — Mein Verfahren die Basis, die Neper angenommen hat, aufzusuchen, sey aus folgenden Ursachen unsicher. Man wisse nicht, ob bey irgend einem Sinus, nur den Sinus totus ausgenommen, genau das stehe, was ihm als Logarithme nach Nepers Gedanken zugehöre, oder ob nur Zahlen und Logarithmen wie im Briggischen System so beysammen stehen, wie sie beynahe zusammen gehören. (Ich dächte, man wisse das letztere gewiß, und ich habe es in der 1sten Auflage dieses Buches 146. §. 193. S. ganz bestimmt und deutlich gesagt.) Wenn man also auch die Basis, die Neper angenommen hat, wüßte, und

nach

nach derselben Logarithmen berechnete, so würde man doch vielleicht nicht völlig die herausbringen, die Neper in seine Tafeln gesetzt hat. Nehme man aber eine Basis an, die nur der, die Neper angenommen hatte, ziemlich nahe kommt, so kämen freylich die ersten Logarithmen, die man aus dieser Basis berechnet, den Neperischen auch nahe, aber daraus lasse sich nicht schliessen, daß man die von Nepern angenommene Basis errathen habe. (Man braucht hier nichts zu errathen, auch ich habe hier weder etwas errathen noch berechnen wollen, ich habe das nur abgeschrieben, was Neper selbst in seinem Werke ganz bestimmt und deutlich gesagt hat.) Daß aber Neper seine Logarithmen neben Zahlen gesetzt habe, denen sie nicht in größter Schärfe zugehören, sey daher klar, weil er 1 als Logarithme neben den Cosinus einer Minute setze, und für diesen Cosinus selbst zehn Millionen setze, u. s. w.„

Wie gesagt, ich habe mir diese ganze Stelle anfangs gar nicht erklären können, auch hatte ich, wie leicht zu erachten ist, Nepers Tafeln besonders für Zahlen, die dem Sinus totus, oder der Zahl 10000000, nahe sind, mehrmahls verglichen, und beim Cosinus einer Minute immer 9999999 nicht 10000000 gelesen. Nachdem ich die aus den Astronom. Abhandl. angeführte Stelle gelesen hatte, schlug ich wieder nach, und fand noch beym Cosinus einer Minute die Zahl 9999999, machte aber nun, weil ich genauer als sonst darauf aufmerksam war, die Entdeckung, daß in meinem Exemplar wirklich 10000000 gedruckt gestanden habe, daß aber diese Zahl durch eine saubere Correctur, wie es durch Ver-

wandlung der Nullen in 9 leicht angieng, in 9999999 verändert sey. Hätte ich aber auch beym ehemaligen Lesen die Zahl 10000000 hier gedruckt gefunden, so würde ich es wie der vorige Besitzer des Buchs gemacht, und hier einen Fehler des Schreibers oder Druckers mit Sicherheit vorausgesetzt haben. Das Versehen beym Abschreiben kann vielleicht von Nepern selbst herrühren: allein mit Vorbedacht hat er hier nicht 10000000 schreiben wollen. Denn pag. 16. n. 33. seines Werkes Mirifici Can. Log. Constructio stehet die folgende Stelle.

Vt cum sinus totius artificialis sit o, et *primi post sinum totum*, qui est 9999999 in prima Tabula, artificialis sit inter terminos 1,0000001 et 1, necessario secundi post sinum totum, qui est 9999998,0000001 (er meint nicht den Cosinus von 2′ selbst, sondern die Zahl welche aus seiner Tafel mit ihm so weit die ganze Zahl reicht, übereinkommt) artificialis continebitur inter dupla illorum terminorum — — — Noch weiter unten heißt es: Poteris consimili progressu, si libet, numeros ipsos artificiales (das sind bey ihm die Logarithmen) exiguo et insensibili errore continuare hoc ordine: pro sinus totius artificiali erit o, pro *primi post sinum totum* artificialis erit 1,00000005, pro secundi 2,000000010 pro tertii 3,000000015, Et ita deinceps.

Jetzt kann ich mir, wie ich glaube, das ganze Mißverständniß so erklären. Herr Hofrath Kästner führt a. a. O. 63. S. kein andres Werk von Nepern an, als das ältere: Mirifici Logarithmorum Canonis *descriptio*, Authore et Inventore Ioanne Nepero Barone Merchistonii etc. Scoto, Edinb. 1614. Man weiß aber, daß Nepers Sohn im Jahr 161[illegible]

ei

ein Jahr nach seines Vaters Tode des letztern Buch zum andernmahl herausgegeben habe, wie auch auf der 190 Seite der 1sten Auflage vom 2ten Theil meines Lehrbegriffes ist bemerkt worden, und daß zu dieser Ausgabe Opera posthuma gekommen sind. Unter diesen letztern ist das von mir einigemahl unter dem Titel Mirifici Can. Log. *Constructio* angeführte das erste. Von dieser zweyten Ausgabe findet man angenehme Nachrichten in des H. Prof. Scheibels Einleitung zur Mathematischen Bücherkenntniß, 7 Stück 20 u. f. S. Vom ersten Werk hat man aber auch eine zu Lion veranstaltete Ausgabe von 1719. Der Titel ist: Logarithmorum Canonis *descriptio* seu arithmeticarum supputatiorum mirabilis abbreviatio, ejusque usus in utroque Trigonometria — — Authore et Inv. Io. Nepero — — Lugduni apud Barthol. Vincentium 1619. Hiebey befinden sich am Ende des Buches die Sinustafeln mit den Logarithmen. Die Opera Posthuma sind zu Lion im folgenden Jahr 1720 unter dem besondern Titel herausgegeben worden: Mirifici Logarithmorum Canonis *Constructio*, et eorum ad naturales ipsorum numeros habitudines; una cum Appendice, de alia eaque praestantiore Logarithmorum specie condenda. Quibus accessere Propositiones ad triangula sphaerica faciliore calculo resolvenda: vna cum Annotationibus aliquot doctissimi D. Henrici Briggii in eas et memoratam appendicem, Authore et Inv. Io. Nepero — — Lugduni apud Barthol. Vincentium 1720. Ich besitze von beyden diese Lioner Ausgabe, und die Seitenzahlen sind oben daraus angeführt. Ohne Zweifel hat H. Hofr. Kästner nur die erste Edenburger Ausgabe von 1614 vor Augen

gehabt, und sich an die neuere Ausgabe von 1619. mit den Opp. Posthumis nicht erinnert, oder sie grade damahls nicht zur Hand gehabt, als er die oben angeführte Stelle in der 2ten Samml. der Astron. Abhandl. geschrieben hat: sonst wären gewiß keine Erinnerungen gegen meinen Vortrag gemacht worden. Damit diese Anmerkung nicht zu lang gerathe, beziehe ich mich auf die erste in meiner **Sammlung kleiner Schriften** befindliche Abhandlung: **Vom Mathematisch-Unendlichen**, woselbst ich in den letztern §§. noch verschiedenes zur Erläuterung des sehr sinnreichen Neperschen Vortrages beygebracht habe.

Der VII. Abschnitt.

Von den Briggischen Logarithmen.

150. §.

Henrich **Brigg**, der Geometrie Professor zu Oxford, war der erste, der auf **Nepers** Rath (Mirifici Can. Log. Constructio, pag. 36. sqq.) ein andres System berechnete, welches jetzt unter dem Nahmen des **Briggischen** oder **gemeinen Logarithmen-Systems** gewöhnlich gebraucht wird: er hat es in seiner zu Oxford im Jahr 1624 herausgegebenen Arithmetica Logarithmica zuerst bekannt gemacht. In diesem Briggischen System ist das Verhältniß 10:1 für das **Grundverhältniß**, oder die Zahl 10 als die **Grundzahl** des Systems angenom-

nommen: also gehören mit den Zahlen 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000, ... die Logarithmen 1, 2, 3, 4, 5, 6, ... zusammen. Nur die Logarithmen der Zahlen, die in dieser Hauptreihe vorkommen, sind ganze Zahlen; die mit den Zahlen, welche zwischen 1 und 10 fallen, zusammen gehörigen Logarithmen sind ächte Brüche, die übrigen welche mit noch grössern in der Hauptreihe nicht vorkommenden Zahlen zusammen gehören, sind unächte Brüche. Am besten werden diese Logarithmen durch eine ganze Zahl mit einer Reihe daran hängender Decimalstellen ausgedrückt, da dann die Logarithmen für solche Zahlen, die zwischen 1 und 10 fallen, in der Stelle der Einer eine 0 haben.

1. Zusatz. Es sey l. Brigg, $y = \frac{m}{n}$, so wird erfordert, daß $y = 10^{m:n}$, oder $y = \sqrt[n]{10^m}$ sey. Wenn nun diese Wurzel nicht die Zahl 10 selbst, oder eine Potenz von 10 ist, so ist sie irrational. Wenn man aber für m und n rationale ganze Zahlen annimmt, so kann man die irrationale Zahl $\sqrt[n]{10^m}$ angeben, womit die Zahl $\frac{m}{n}$ als Logarithme zusammen gehört. Weil $\sqrt[2]{10^3} = \sqrt{1000} = 31{,}622776625$ gefunden wird, (88. §.) so ist $\frac{3}{2}$ der Logarithme dieser Zahl. Es sey y eine solche Irrationalzahl, $y + u$ eine andre, so ist auch $y + u = y\left(1 + \frac{u}{y}\right)$, also $l(y + u) = ly + l\left(1 + \frac{u}{y}\right)$. Wenn nun

u in Vergleichung mit y sehr klein, also $\frac{u}{y}$ ein sehr kleiner Bruch ist; so kommt $l\left(1+\frac{u}{y}\right)$ der Gränze o sehr nahe, und ist ebenfalls ein sehr kleiner Bruch, denn es kann $l\left(1+\frac{u}{y}\right)$ alsdenn allererst $= 1$ werden, wenn $u = 9y$ ist. Daraus folgt, daß ly und $l(y+u)$ in desto mehrern Decimaltheilen übereinstimmen müssen, je kleiner der Bruch $\frac{u}{y}$ ist. Wenn alsdenn zwischen $y+u$ und y eine Rationalzahl N fällt, so müssen die Logarithmen der drey Zahlen $y+u$, N, y, in gleich vielen Decimalstellen übereinstimmen: mithin ist zugleich der log. N bis auf eben soviele Decimalstellen richtig gefunden.

2. Zusatz. Auf diesen Gründen beruhet die freylich etwas mühsame Art, wie vormahls Brigge und andre die Rechnung einleiteten, um den mit einer vorgelegten Zahl zusammengehörigen Logarithmen zu finden, wenn es keine aus bekannten Factoren zusammengesetzte Zahl war, wovon man die Logarithmen vorher schon gefunden hatte. Neper selbst a. a. O. schlägt in solcher Absicht zweyerley Verfahrungsarten vor. Eine davon beruhet darauf, daß man sich der Zahl, deren Logarithme gesucht wird, durch mittlere geometrische Proportionalzahlen zwischen einer nächstgrössern und nächstkleinern Zahl, wovon die Logarithmen schon bekannt sind, immer mehr zu nähern sucht. Um log. 5 zu finden, suche man

$\sqrt{10} = 3{,}1622776625 = C$ | $l C = 0{,}5$
$\sqrt{10.C} = 5{,}6234132540 = D$ | $l D = 0{,}75$
$\sqrt{C.D} = 4{,}2169650366 = E$ | $l E = 0{,}625$
$\sqrt{D.E} = 4{,}8696752538 = F$ | $l F = 0{,}6875$
$\sqrt{D.F} = 5{,}2329911489 = G$ | $l G = 0{,}71875$
$\sqrt{F.G} = 5{,}0480657187 = H$ | $l H = 0{,}703125$
$\sqrt{F.H} = 4{,}9580682447 = I$ | $l I = 0{,}6953125$
$\sqrt{H.I} = 5{,}0028646130 = K$ | $l K = 0{,}69921875.$

Setzt man diese Rechnung auf eben dem Wege fort, so findet man

$l\,5{,}0000000145 = 0{,}6989700049$
$l\,4{,}9999999691 = 0{,}6989700012,$

also ist log. $5 = 0{,}69897000$ bis auf die achte Decimalstelle richtig gefunden. Dieses Verfahren ist am meisten gebraucht, und in den mehresten Lehrbüchern, welche die Anfangsgründe vortragen beybehalten worden. Ich habe die oben stehende Rechnung in meinen **Anfangsgründen der Mathem. Wissenschaften** im 231. §. der Rechenkunst, 282. S. bis auf das angezeigte Resultat fortgeführt.

3. Zusatz. Nach der andern von Nepern vorgeschlagenen Art soll man die Zahl 1,0000000000 zehnmahl nach einander mit 5 dividiren, auch eben so vielmahl nach einander aus 10 die Wurzel der fünften Ordnung suchen; so sind jene Quotienten die mit diesen Wurzeln zusammengehörigen Logarithmen. Der letzte Logarithme ist 0,0000001024, und er gehört mit der Zahl $10^{\frac{1}{9765625}}$ zusammen. Den zuletzt gefundenen Logarithmen soll man aufs neue zehnmahl nach einander halbiren, auch eben so vielmahl nach einander aus der zuletzt gefundenen Zahl die Quadratwurzel suchen: so wird der letzte Logarithme

0,0000000001, und die zugehörige Zahl = $10^{\frac{1}{1000000000}}$. Aus diesen Wurzeln und den dazu gehörigen Logarithmen soll man die Potenzen mit ihren Logarithmen, jene durch Multiplication, diese durch Addition wieder zusammen setzen. Neper selbst erklärt dieses Verfahren wegen der dabey nöthigen Wurzeln der fünften Ordnung für sehr mühsam: indessen hätte man auch allein durch wiederhohlte Ausziehung der Quadratwurzel aus 10 eben das erhalten können, wie ich es in meinem Auszuge aus den Anfangsgründen und dem Lehrbegriffe der Math. Wissenschaften, 2te Ausg. 1. Band, 29. §. Trigon. 193. S. gewiesen, und durch eine Proberechnung erläutert habe, woselbst

$l\,1{,}9999969 = 0{,}30102992$

$l\,2{,}00000024 = 0{,}30103004$

gefunden ist, da dann log. 2 zwischen beyden enthalten seyn muß.

151. §.

Es ist um der Geschichte der Wissenschaft willen merkwürdig, daß man diese ehemahligen Arten die Rechnung einzuleiten kenne, sonst ist aus dem 146. §. und 147. §. schon bekannt, wie man nach den allgemeinen Formuln, welche spätere Erfindungen sind, viel kürzer und leichter rechnen könne. Wenn man die Rechnung im 147. §. 5. Zus. bis auf mehr Decimalstellen fortführet; so findet man

log.nat. 10 = 2,30258509399404568401799 14...

und daraus ferner den Modulus des Briggischen Logarithmensystems

$$\frac{1}{\text{l. nat. } 10} = 0{,}43429448190325182765 11289...$$

Nach-

Nachdem mehr oder weniger Schärfe der Rechnung nöthig ist, nimmt man mehr oder weniger Decimalstellen, und findet

l. nat. 2 = 0,6ϕβx4ηx8ϕ5ϕ ....
× 0,4β4ηϕ448xϕo ....

0,27725887 2224
2079441541 5
277258872 2
13862943 6
6238324 6
277258 8
27725 8
5545 1
693
623

also l. Brigg. 2 = 0,3010299956
ferner ist l. Br. 10 = 1,0000000000

also l. Brigg. 5 = 0,6989700043.

Wenn man nicht nöthig findet, mehr als 7 Ziffern beyzubehalten, so setzt man

l 2 = 0,3010300, und erhält zugleich
l 4 = 0,6020600
l 8 = 0,9030900

Ferner ist l. Brigg. 3 = 0,43429448 × 1,0986123
= 0,4771212,
also *l* 16 = 0,7781512,
l 9 = 0,9542424,

l. Brigg. 7 = 0,43429448 × 1,94591013
= 0,8450980, und aus diesen 10 Logarithmen giebt sich leicht eine grosse Menge anderer durch die blosse Addition. So erhält man

$l12 = l6 + l2 = 1,0791812$
$l14 = l7 + l2 = 1,1461280$
$l15 = l5 + l3 = 1,1760913$
$l16 = 2l4 = 1,2041200$
$l18 = l9 + l2 = 1,2552725$
$l20 = l10 + l2 = 1,3010300$

Aber für die Zahlen 11, 13, 17, 19 müssen die Logarithmen besonders gesucht werden, und man findet

$l11 = 1,0413927$
$l13 = 1,1139433$
$l17 = 1,2304489$
$l19 = 1,2787536$

Unter den Zahlen zwischen 20 und 30 kommen nur die beyden Primzahlen 23 und 29 vor, der übrigen ihre Logarithmen alle erhält man durch die Addition der Logarithmen ihrer Factoren. Aus diesem allen ergiebt sich, wie es möglich gewesen sey, auf eine oder die andre Art diese Rechnung, für die folgenden Zahlen fortzusetzen, und die Zahlen, wie sie in natürlicher Ordnung folgen, mit ihren Logarithmen in Tafeln zu bringen, wovon nun mehrere verschiedene Sammlungen auch mit andern zum Gebrauch bey mathematischen Rechnungen dienlichen Tafeln sind veranstaltet worden.

152. §.

Im Jahr 1624 gab Briggs zu London sein Arithmeticam Logarithmicam heraus. Dieses Werk enthält Logarithmen-Tafeln für alle Zahlen von 1 bis 20000, und von 90000 bis 101000: Adrian Vlacq, ein Holländischer Mathematiker, füllte die Lücke aus, welche Briggs gelassen hatte, berechnete

die übrigen Logarithmen der Zahlen, die zwischen 20000 und 90000 fallen, und machte seine Arbeit in einem Werke bekannt, das den Titel hat: Henr. Briggii Arithmetica Logarithmica cura Adriani Vlacquii, Goudae 1628. Nach der Zeit sind verschiedene kleinere Ausgaben der Briggischen Logarithmen-Tafeln besorget worden, worin man die Logarithmen der Zahlen nur von 1 bis 10000 antrift. Dahin gehören verschiedene Holländische, die zu Haag gedruckt sind; ferner eine Auflage, die der Herr von Wolf im Jahr 1711 zu Halle besorgt hat, und verschiedenemal ist neu aufgelegt worden. Von andern hieher gehörigen Werken werden weiter unten Nachrichten vorkommen, sie enthalten insgesammt ausser den Logarithmentafeln für die natürlichen Zahlen auch andre, wovon die Einrichtung hier noch nicht beschrieben werden kann. Die ältern und grössern Ausgaben der Logarithmentafeln gehören zum Theil schon zu den Büchern, die man selten mehr findet, zum Theil sind sie auch wegen des Foliosormats zum Nachschlagen etwas unbequem: dagegen sind die kleinern Ausgaben zu genauen und ins Grosse gehenden Rechnungen nicht vollständig genug. Eine englische Ausgabe unter Gardiners und Sherwins Nahmen wird von *Montucla* Histoire des Mathematiques Tome II. pag. 14 gerühmt, und eine unter des ersten Nahmen in 4., ohne Jahrzahl, eine andre unter des zweyten Nahmen in 8. vom Jahr 1705 angeführt. Ich besitze eine Ausgabe in groß 8. mit beyden Nahmen auf dem nachstehenden Titel: Sherwins Mathematical Tables, Contrio'd after a most comprehensive Method: containig Dr. Wallis's Account of Logarithms, Dr. Halley's and

Mr.

Mr. Sharp's Ways of constructing them; with Dr. Newton's contraction of Briggs's Logarithms, viz. A table rc (Verzeichniß der im Buch anzutreffenden Tafeln) with the Explication and Use prefix'd. The third Edition, carefully revised and corrected, by William Gardiner. London 1742. Nach dem Muster dieser Ausgaben, die man sonst in Deutschland selten und nur um einen ziemlich hohen Preis haben konnte, sind nun mehrere, und ganz neulich zwey verschiedene für deutsche Mathematiker sehr angenehme Ausgaben veranstaltet worden, die man um einen sehr leidlichen Preis haben kann. Johann Carl Schulze, wirkl. Mitgliedes der Kön. Preuss. Acad. der Wiss. (jetzigen Königl. Oberbauraths) Neue und erweiterte Sammlung Logarithmischer, Trigonometrischer und andrer zum Gebrauch der Mathematik unentbehrlicher Tafeln, 1. und 2. Band, Berlin 1778. gr. 8. Logarithmische, Trigonometrische und andre zum Gebrauch der Mathematik eingerichtete Tafeln und Formuln, herausgegeben von Georg Vega, Unterlieutenannt und Lehrer der Mathem. bey dem K. K. zweyten Feld-Artillerie-Regiment. Wien 1783. Beyde Sammlungen von Tafeln haben jede in ihrer Art noch eigene Vorzüge vor der englischen. Man kann mit Nutzen ein kleines Werk des H. Lambert damit verbinden, das den Titel hat: Zusätze zu den logarithmischen und trigonometrischen Tabellen, ausgefertiget von J. H. Lambert, Berlin 1770.

153. §.

Jeder Briggische Logarithme bestehet aus einer ganzen Zahl mit einer Reihe daran hängender Decimal-

mal-Brüche, die Logarithmen der ersten 9 Zahlen ausgenommen, welche in der Stelle der Einer eine Null haben. Die ganze Zahl heißt die Characteristik oder Kennziffer des Logarithmen: sie führt diesen Nahmen deswegen, weil man an derselben sogleich erkennen kann, aus wie vielen Ziffern die Zahl bestehen müsse, welche diesem Logarithmen zugehört. Die Zahl bestehet nemlich aus einer Ziffer mehr, als die Kennziffer ihres Logarithmen Einheiten enthält. Für die Zahlen von 1 bis 9 ist 0 diese Kennziffer, von 10 bis 99 ist sie 1, von 100 bis 999 ist sie 2, von 1000 bis 9999 ist sie 3, und so ferner (150. §.): also ergiebt sich die Kennziffer des Logarithmen einer jeden ganzen Zahl sehr leicht von selbst. Das ist die Ursache, weswegen in den Sherwinschen und andern ähnlichen Tafeln die Kennziffer bey den Logarithmen weggelassen ist, indem man sie jedesmahl leicht hinzusetzen kann, wenn man bey vorkommenden Rechnungen die Logarithmen brauchen will. Unter dem Nahmen Mantisse des Logarithmen, welchen einige Schriftsteller gebrauchen, werden die dazu gehörigen Decimalstellen verstanden.

154. §.

Die ersten 7 Decimalstellen vom Logarithmen eines Bruchs, es sey ein gemeiner Bruch, oder er sey in Decimaltheilen ausgedrückt, mit Hülfe der Tafeln zu finden.

Aufl. 1. In jedem Fall muß man den Logarithmen des Nenners vom Logarithmen des Zählers subtrahiren, da dann für den ächten Bruch der Logarithmen negativ gefunden wird. (138. 140. §.) Demnach beruhet die Auflösung bloß darauf, daß

man

man beyde Logarithmen des Zählers und des Nen
ners in den Tafeln aufsuchen und daraus abschreiben
könne. Am leichtesten wird die Sache, wenn di
vorgelegte Zahl ein unächter Decimalbruch, ode
eine ganze Zahl mit anhängenden Decimalstellen ist
denn nun weiß man den Logarithmen des Nenners
von selbst, man schreibt also nur die Decimalstelle
vom Logarithmen des Zählers aus den Tafeln ab
vermindert aber die Kennziffer um so vielmahl Eins
als nach der Stelle der Einer Decimalstellen folgen
Allemahl wird die so verminderte Kennziffer um Ein
kleiner seyn müssen, als die Zahl der Ziffern vor den
Zeichen der Einer.

Es ist nemlich $l4{,}738 = l4\frac{738}{1000} = l4738 - l1000$
(138. §.), und $l4738 = 3{,}6755951$: also
$l4{,}738 = 0{,}6755951$. Eben so ist $l47{,}38 =$
$1{,}6755951$, und $l473{,}8 = 2{,}6755951$.

2. Diese Zahl 4738 und überhaupt alle Zahlen
die nicht über vier Ziffern haben, findet man noch in
den kleinern Tafeln, aber keine grössere Zahlen: e
wäre denn, daß man grössere Tafeln zur Hand hätte
In allen Fällen, auch wenn die grössern Tafeln nich
mehr zureichten, zeigt die allgemeine Gleichung in
147. §. 4. Zusatz, wie man sich helfen könne.

$$\text{ist } l\frac{p+q}{p} = 2\left(\frac{q}{2p+q} + \tfrac{1}{3}\cdot\frac{q^3}{(2p+q)^3}\right.$$

$$\left. + \tfrac{1}{5}\,\frac{q^5}{(2p+q)^5} + \ldots\ldots\right), \text{ also auch } l(p+$$

$$= lp + \frac{q}{p+\frac{1}{2}q} + \tfrac{2}{3}\cdot\left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 + \tfrac{2}{5}\cdot\left(\frac{q}{2p+q}\right)$$

$+ \ldots\ldots$ Wenn nun p nicht kleiner als 1000, u
q nicht grösser, als 1 ist, so ist gewiß die Za

$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{q}{2p+q}\right)^3$ schon kleiner als $\frac{1}{1000000000}$,

und dieser Theil, (also noch um so weniger die folgenden Theile) kann, wenn man ihn auch mit in Rechnung ziehen wollte, die ersten sieben Decimalstellen des Logarithmen, die man doch nur sucht, nicht mehr ändern. Demnach ist alsdenn $l(p+q) = lp + \frac{q}{p+\frac{1}{2}q}$. Das l bedeutet hier den natürlichen Logarithmen, und es ist Brigg. $l.(p+q) = mlp + m \cdot \frac{q}{p+\frac{1}{2}q} + \ldots$ wenn $m = 0{,}4342945$ gesetzt wird: (151. §.) also auch Brigg. $l(p+q) =$ Brigg. $lp + m \cdot \frac{q}{p+\frac{1}{2}q}$. Setzt man für q ächte Brüche, wie $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$, $\frac{2}{3}$, so ist $m \cdot \frac{q}{p+\frac{1}{2}q}$ diesen Brüchen sehr nahe proportional. Es ist nemlich $\frac{1}{p+\frac{1}{2}q} = \frac{1}{p} - \frac{\frac{1}{2}q}{p(p+\frac{1}{2}q)}$, also $m \cdot \frac{q}{p+\frac{1}{2}q} = \frac{mq}{p} - m \cdot \frac{\frac{1}{2}qq}{p(p+\frac{1}{2}q)}$, und der negative Theil ist der Voraussetzung gemäß kleiner als $\frac{1}{4}$ Millionentheilchen, weil $m < \frac{1}{2}$ ist: mithin ändert sich $m \cdot \frac{q}{p+\frac{1}{2}q}$, soweit als die 7 ersten Decimalstellen reichen, in einerley Verhältniß mit q, so lange q nicht > 1 wird.

3. Hätte nun die vorgelegte Zahl auch 7 Ziffern, die Decimalstellen mitgezählt, wie 473,8425, so

kann

kann man sie allemahl so ansehen, als wenn bey de vierten von den höhern Ziffern das Zeichen der Eine stünde, und man kann sich das etwa auf die Art be merken 473,8|425. Wenn nun in der allgemeine Formul n. 2. die Werthe $p = 4738$, und $q = 0{,}42$ gebraucht werden, so findet man den Brigg. Log. de Zahl 4738,425, dessen Kennziffer 3 ist. Weil nun aus dieser Zahl mit 10 dividirt die gegebene 473,42 wird; so bleiben alle Decimalstellen des gefundene Logarithmen und 2 wird die Kennziffer.

4. Die Tafeln geben

$l\,4739 = 3{,}6756867$
$l\,4738 = 3{,}6755951$

die Differenz ist 916

und man weiß, daß es Zehnmillionentheilchen sind Wird also nach n. 2. $p = 4738$ gesetzt, so ist

$\frac{mq}{p + \frac{1}{2}q} = 916$ für $q = 1$. Man sucht aber die sen Werth für $q = 0{,}425$, und der gesuchte Werth ändert sich mit q in einerley Verhältniß: also kann man ihn nach einer leichten Regel Detri finden, und die ganze Rechnung, wie folget, einleiten.

$l\,4739 = 3{,}6756867$
$l\,4738 = 3{,}6755951$

Differenz 916

Ansatz a. d. Reg. Detri
1 : 0,425 = 916 : viert. Zah

916
× 0,425
4580
1832
3664
389,300

$l\,4738 = 3{,}6755951$
$+389$
$l\,4738{,}425 = 3{,}6756340$
Also $l\,473{,}8425 = 2{,}6756340$

De

Der Kürze wegen rechnet man so, als wenn 916 eine ganze Zahl wäre, man weiß aber, daß es Zehnmilliontheile sind: also versteht es sich von selbst, daß man beym Addiren des gefundenen Products darauf wieder Rücksicht nehmen müsse.

5. Wenn ein ächter Bruch in Decimaltheilen gegeben wäre, wie 0,04738425; so wäre sein Logarithme = 6,6756340 — 8, oder = 0,6756340 — 2. Bey solchen Rechnungen, wo man anstatt der Zahlen mit den Logarithmen rechnet, ist es gewöhnlich am vortheilhaftesten, wenn man den negativen Theil wie oben dem positiven nur beyfügt, ohne die Subtraction des kleinern vom grössern vorzunehmen, damit man den negativen Rest erhalte, der in jenem Fall = — 1,3243660 wäre. Die Kennziffer eines solchen negativen Logarithmen enthält so vielmahl Eins, als in der dazu gehörigen Zahl nach dem Zeichen der Einer Nullen folgen, bevor die Ziffern anfangen, nur in dem einzigen Fall, wenn nach den Nullen nur 1 und sonst keine Ziffer weiter folgt, ist die negative Kennziffer um Eins grösser. Es ist nemlich l 0,1 = — 1, l.0,01 = — 2, l.0,0001 = — 3, und so ferner. Die Logarithmen der Zahlen zwischen 1 und 0,1 fallen zwischen 0 und — 1, und ihre Kennziffer ist 0. Mit der Zahl 0,1 fängt die Kennziffer — 1 an, und bleibt, bis sie — 2 für 0,01 wird. Das geht so fort, wie man am deutlichsten übersiehet, wenn man die Grundreihe rückwärts wie folget fortsetzt.

—3	—2	—1	0	1	2	3
0,0001	0,01	0,1	1	10	100	1000

Wer in diesen Rechnungen schon geübt ist, hat nie nöthig auf die Kennziffer des Logarithmen bey der ganzen Rechnung Rücksicht zu nehmen, bevor sie völ-

lig geendiget ist. Man kann sie gleich von Anfang an weglassen; nachdem man die Decimaltheile des gesuchten Logarithmen herausgebracht hat, weis man von selbst, daß die Kennziffer um 1 kleiner seyn müsse, als die Anzahl der Ziffern, welche vor dem Zeichen der Einer stehen. Wenn aber o bey dem Zeichen der Einer und sonst nichts weiter voran stehet, so behält man die Kennziffer o, setzt aber einen negativen Theil hinzu, der so vielmahl Eins enthält, als vor der höchsten Ziffer der gegebenen Zahl Nullen stehen, die o in der Stelle der Einer mitgezählt.

6. Den Logarithmen eines ächten gemeinen Bruches kann man auf eine ganz ähnliche Art ausdrücken: denn es ist $\frac{3}{27} = \frac{300}{27} : 100$, also $l\frac{3}{27} = l\frac{300}{27} - 2$, und eben so $l\frac{97}{53797} = l\frac{9700000}{53797} - 3$, $l\frac{117}{49361700} = l\frac{11700000}{49361700} - 4$. Man setzt nur so lange im Zähler Nullen zu, bis derselbe anfängt grösser, als der Nenner zu werden, mehrere sind nicht nöthig.

7. Aus grössern Tafeln, wie die Sherwinschen und andre ähnliche sind, kann man die Logarithmen für Zahlen, die aus 5 Ziffern bestehen, unmittelbar abschreiben. Demnach verhält man sich in allen Fällen, auch wenn die Zahl mehr Ziffern enthielte, so als wenn die 5te Ziffer mit dem Zeichen der Einer bemerkt wäre. Die Rechnung wird alsdenn noch kürzer, die man übrigens völlig so, wie vorhin führen kann. Es ist nemlich nach Sherwins Tafeln

$l\,47385 = 4{,}6756409$
$l\,47384 = 4{,}6756317$

Diff. 92
$\frac{1}{4}$ davon 23
also $l\,47384{,}25 = 4{,}6756340$

wie

wie oben num. 4. Wenn die Logarithmen in den Tafeln noch schärfer als bis auf die 7te Decimalstelle berechnet sind, so kann man nach den hier vorgetragenen Rechnungsregeln den gesuchten Logarithmen ebenfalls in mehrern Decimalstellen finden.

155. §.

Die ersten sieben oder wenn man vollständigere Tafeln zur Hand hat, auch mehr Decimalstellen des Logarithmen einer Zahl, welche die grösste in den Tafeln noch aufgeführte Zahl übertrift, zu finden.

Aufl. 1. Wenn man bey einer jeden vorkommenden ganzen Zahl wissen könnte, ob sie eine Primzahl, oder eine zusammengesetzte Zahl sey, und wenn man im letzten Fall die Factoren der Zahl zu finden wüste; so könnte man ihren Logarithmen sogleich durch die Addition der Logarithmen ihrer Factoren suchen. So ist die Zahl $60081075 = 3003 \times 2025$: also $l60081075 = 6{,}78399803$. Hier lassen sich demnach die im XI. Abschnitt der Rechenkunst erwiesenen Kennzeichen der Divisoren zuweilen mit Vortheil gebrauchen: auch leisten solche Tafeln, worin die Zahlen mit ihren Factoren aufgeführt sind, dem Rechner hiebey vorzügliche Dienste. Nachrichten von solchen bereits vorhandenen Tafeln, auch Vorschläge, solche Tafeln noch vollständiger zu liefern, findet man in H. Lamberts Beyträgen zur Mathematik 2. Theil, 42. u. f. S. womit die ersten drey Abhandlungen in seinen Zusätzen zu den Trigonometrischen Tafeln zu vergleichen sind. Die erste hier mitgetheilte Tafel ist eine solche Factorentafel. Ferner gehören hieher des Herrn Prof. Hin-

denburgs Beschreibung einer ganz neuen Art, nach einem bekannten Gesetze fortgehende Zahlen zu finden, nebst Anwendung der Methode — besonders auf eine darnach zu fertigende Factorentafel, Leipzig 1776. Herrn Anton Felkels (jetzt Gräfl. Thunschen Schuldirectors) Tafel aller einfachen Factoren, der durch 2, 3, 5, nicht theilbaren Zahlen von 1 bis 10000000, 1ster Theil, von 1 bis 144000, Wien 1776, 2ter Theil von 144001 bis 408000. Beyde Männer sind bis jetzt noch mit diesen Arbeiten beschäftiget.

2. Wenn die vorgelegte Zahl eine Primzahl ist, oder die Factoren nicht bekannt sind, so kann man die Auflösung der Aufgabe des vorigen §. anwenden. Man sucht den Logarithmen, welcher mit der Zahl zusammen gehören würde, wenn bey der vierten oder fünften von den höhern Ziffern das Zeichen der Einer stünde, und giebt ihm hiernächst die erforderliche Kennziffer. Weil $l\,4738{,}425 = 3{,}6756340$, so ist $l\,4738425 = 6{,}6756340$.

156. §.

Mit Hülfe der Tafeln die Zahl zu finden, welche einem gegebenen Logarithmen zugehöret, wenn die Kennziffer nicht über 6 hinausgeht.

Aufl. 1. Weil die Decimalstellen des Logarithmen einerley bleiben, wenn die dazugehörige Zahl alle Ziffern unverändert behält, man mag übrigens das Zeichen der Einer setzen, bey welcher Ziffer man will; so kann man den gegebenen Logarithmen, ohne seine Kennziffer in Betracht zu ziehen, unter den Logarithmen aufsuchen, die 3 oder 4 zur Kennziffer ha-

haben. Findet man ihn genau darunter, so gehört ihm die dabey stehende Zahl zu, wenn man in derselben das Zeichen der Einer so setzt, wie es die Kennziffer des Logarithmen erfodert. Man schneidet nemlich von den höchsten Ziffern eine mehr ab, als die Kennziffer Einheiten hat, so gehört die niedrigste von den abgeschnittenen Ziffern zu den Einern, und die folgenden sind Decimalstellen. Sollte demnach die Kennziffer grösser, als 3 oder 4 seyn: so muß man bey der in den Tafeln neben dem Logarithmen stehenden Zahl rechter Hand so viel Nullen setzen, bis die Nullen mit den Ziffern zusammen so viele Stellen ausmachen, als die Kennziffer vermöge der Regel verlangt. Hätte man also den Logarithmen 1,8741918: so würde man ihn unter der Kennziffer 3 bey der Zahl 7485 antreffen, und die ihm zugehörige Zahl wäre 74,85. Es ist nemlich $3{,}8741918 = l7485$, und $2 = l100$, also $1{,}8741918 = l74{,}85$ (138. §.). Hätte man aber den Logarithmen 6,8741918: so wäre die zugehörige Zahl 7485000, weil $3 = l1000$, und also $l7485 + 3 = l7485000$ ist (136. §.).

2. Findet man den gegebenen Logarithmen nicht genau in den Tafeln: so wird man doch unter der Kennziffer 3 ein Paar nach einander zunächst folgende Logarithmen finden, zwischen welchen der gegebene als zwoen Gränzen enthalten ist. Man nimmt also die zum nächst kleinern Logarithmen gehörige Zahl, und sucht noch drey dazu gehörige Ziffern, indem man die Regel des 154. §. num. 4 nur umgekehrt anwendet. Es sey 2,5639462 der gegebene Logarithme, so verfährt man wie die nachstehende Rechnung zeiget.

Vom nächst grössern $l\,3664 = 5639555$
subtr. man den nächst kleinern $l\,3663 = 5638369$

so ist die Differenz - - 1186

Vom gegebenen 5639462
subtr. man auch den nächst kleinern 5638369

so ist die Differenz 1093

Bey jener Differenz sind die zugehörigen Zahlen um 1 unterschieden, wenn die Kennziffer 3 wäre, also schließt man

1186 : 1093 = 1 : vierten Zahl,

und die gesuchte Zahl wäre 3663,922, wenn die Kennziffer des Logarithmen 3 wäre. Weil aber 2 die Kennziffer ist, so ist die gesuchte Zahl 366,3922. Wäre 6 die Kennziffer, so wäre 3663922 die gesuchte Zahl. Wenn die Kennziffer grösser als 6 ist, so findet man mit Hülfe solcher Tafeln, worin nur die ersten 7 Decimalstellen der Logarithmen stehen, zwar die ersten 6 bis 7 Ziffern nach dieser Methode richtig aber mehrere nicht. In der allgemeinen Formel

$$\text{Brigg. } l.(p+q) = mlp + m \cdot \frac{q}{p+\frac{1}{2}q} + \ldots$$

(154. §. n. 2) wird nun schon der zweyte Theil kleiner als $\frac{1}{10000000}$, wenn $q = 1$ ist: also sind die Logarithmen zweyer zunächst auf einander folgenden Zahlen in den ersten 7 Decimalstellen nicht mehr verschieden.

3. Wenn der gegebene Logarithme negativ ist; so ist die zugehörige Zahl ein ächter Bruch, dessen Zähler = 1 ist, der Nenner aber die demselben positiv genommenen Logarithmen zugehörige Zahl: (140 §) demnach wäre $\frac{1}{4\,2\,2\,0}$ die zum Logarithmen — 3,6253124 gehörige Zahl. Diesen Bruch findet man auch leicht auf folgende Art in Decimaltheilen. Zu dem gegebenen negativen Logarithmen addire man eine von den Zahlen 1, 2, 3, u. s. f. die so groß ist, daß die Summe positiv wird: so weiß man daß jede dieser Zahlen der Logarithme einer Potenz von 10 ist, deren Exponent mit der addirten Zahl einerley ist. Man suche die der Summe zugehörige Zahl nach den vorhin ausgeführten Regeln, und dividire sie mit der Potenz von 10, deren Logarithmen man addirt hatte, wie im nachstehenden Exempel.

l 10000 = + 4,0000000
= − 3,6253124

Summe 0,3746876

Die zugehörige Zahl ist = 2,369661, und diese mit 10000 dividirt giebt die gesuchte = 0,0002369661.

157. §.

Mit Hülfe solcher Tafeln, welche die Logarithmen in sehr vielen Decimalstellen berechnet enthalten, den zu einer gegebenen Zahl gehörigen Logarithmen schärfer als nach Anleitung des 154 u. 155. §. zu finden.

Aufl. 1. In der Schulzischen Sammlung Logar. und Trigonom. Tafeln 1 Band, 190 u. f. S. findet man eine sehr brauchbare Tafel natürlicher bis auf 48 Decimalstellen berechneter Logarithmen von 1 bis 2200 für alle Zahlen, und von 2200 bis 10000

für die Primzahlen, und etwas stark zusammengesetzten Zahlen. Herr Wolfram (Artillerie-Lieutenant in Holländischen Diensten) hat sie mit der grösten Sorgfalt berechnet und nachgesehen. Sie ist nicht allein darum wichtig, weil daraus die Briggischen Logarithmen durch Multiplication mit dem Modulus bis auf eben soviele Decimalstellen gefunden werden können, sondern auch um deßwillen, weil die natürlichen Logarithmen selbst in der höhern Mathematik häufig gebraucht werden. Eine Tafel der natürlichen Logarithmen steht auch in der Vegaschen Sammlung 198 u. f. S. aber nur bis auf 8 Decimalstellen. In Sherwins Tafeln steht (36 u. f. S. Bog. *b*.) eine Tafel Briggischer bis auf 61 Decimalstellen berechneter Logarithmen von 1 bis 100 für alle Zahlen, und bis 1100 für alle Primzahlen. Eine zweyte Tafel (40 und 64 S.) ist noch beygefüget für die Logarithmen der Zahlen von 999981 bis 1000020.

2. Gesetzt nun, man wollte die ersten 18 Decimalstellen des natürlichen Logarithmen der Zahl 4738425 suchen, so findet man in der Wolframschen Tafel zwar nicht die Zahl 4738: es ist aber $4738 = 2 \times 2369$, und daraus erhält man

$$\text{l. nat. } 2 = 0{,}693147180559945309$$

$$\text{l. nat. } 2369 = 7{,}770223204158785461$$

$$\text{l. nat. } 4738 = 8{,}463370384718730770$$

Man setze nach der Formul des 154. §. n. 2. $p = 4738$, $q = 0{,}425$, so ist $2p = 9476$, und

$$\frac{q}{2p+q} = \frac{0{,}425}{9476{,}425} = 0{,}000044848136296124:$$

also l. nat. $p = 8{,}463370384718730770$

$$\frac{2q}{2p+q} = 0{,}000089696272592248$$

$$\frac{2}{3} \cdot \left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 = 0{,}000000000000060136$$

l. nat. $4738{,}425 = 8{,}463460080991383154$

l. $1000 = 6{,}907755278982137052$

l. nat. $4738425 = 15{,}371215359973520206$

Man kann auch mehr als die vier höhern Ziffern zusammen für die Zahl p annehmen, wofern sie nur zusammen eine Zahl ausmachen, die sich in Factoren zerfällen lässet, wovon keiner grösser, als 10000 ist. Die Zahl 47384 giebt mit 8 den Quotienten 5923, also kann man $p = 47384$, $q = 0{,}25$ setzen. Je mehr Ziffern man solchergestalt in die Zahl p bringen kann, desto vortheilhafter ist es, besonders wenn die gegebene Zahl viel mehr Ziffern hätte, als hier angenommen sind, auch der Logarithme in mehr als 18 Decimalstellen gesucht werden sollte: denn desto kleiner wird $\frac{q}{2p+q}$, und desto schneller nähert sich die Reihe der Gränze ihrer Summe.

3. Um aus einem so gefundenen natürlichen Logarithmen den Briggischen zu erhalten, muß man mit $m = 0{,}43429\ldots$ multipliciren. Diese Arbeit wird durch eine kleine Tafel abgekürzt, worin alle Producte von $2m$ bis $9m$ ein für allemahl verzeichnet sind: man findet sie in der Schulzischen Sammlung S. 188 und in der Vegaschen bis auf 10 Decimalstellen abgekürzt S. 208. Bey Verwandelung eines Briggischen in den natürlichen Logarithmen mul-

tiplicirt man mit $\frac{1}{m} = 2{,}302585\ldots\ldots$, und
dabey dient eine kleine Tafel aller Producte von
$2 \cdot \frac{1}{m}$ bis $9 \cdot \frac{1}{m}$ ebenfalls zur Abkürzung, so
wie sie an beyden angeführten Orten, am letztern aber
nur abgekürzt, mitgetheilt ist. Vorhin n. 2. ward
l. nat. 4738,425 gefunden, und die Multiplication
mit Hülfe der Schulzischen Tafel giebt

$m = 0{,}434294481903251827$
$\times\ 8{,}463460080991383154$

3,474355855226014626
1737177927613007 31
2605766891419510 9
1302883445709755
173717792761300
26057668914195
3474355855 2
390865033
39086503
434294
130288
34743
1303
43
21
2

---

l. Brigg. $4738{,}425 = 3{,}675634010983006498.$

4. Wenn man den Briggischen Logarithmen eben
der Zahl 4738,425 aus Sherwins Tafeln a. a. O.
suchen wollte, so fände man zwar die Zahl 2369
nicht darin, weil die erste Tafel nur bis 1097 reicht.

Aus H. Lamberts Factorentafel (155. §. 1. Aufl.) aber findet man $2369 = 23 \times 103$, also $4738 = 46 \times 103$: also erhält man

l. Brigg. $46 = 1{,}662757831681574074$

log. $103 = 2{,}012837224705172205$

---

l. Brigg. $4738 = 3{,}675595056386746279$.

Weiter erhält man wie vorhin

$$\frac{2q}{2p+q} = 0{,}000089696272592248$$

$$\frac{2}{3}\cdot\left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 = 0{,}000000000000060136$$

Summe $0{,}000089696272652384 = z$

Ferner ist $m = 0{,}434294481903251827$

$z = 0{,}000089696272652384$

0,000034743558552260
390865033729
26057668914 2
3908650337 1
260576689 1
86858896
30400613
868589
260576
21714
868
130
34
1

$mz = 0{,}000038954596260214$

l. Br. $4738 = 3{,}675595056386746279$

---

l. Br. $4738{,}425 = 3{,}675634010983006493$.

5. Der oben num. 2. beygefügten Bemerkung gemäß könnte man auch $p = 47384 = 8 \times 5923$ annehmen, damit sich die Reihe noch schneller der Gränze ihrer Summe nähere: allein man würde mit der I. Sherwinschen Tafel nicht ausreichen, weil 5923 eine Primzahl ist. In einem solchen Fall, wenn man sehr viele Decimaltheile des gesuchten Logarithmen nöthig hat, also auf eine schnellere Näherung bedacht seyn muß, kann man von der II. Tafel (40 und 64 S. a. a. O.) einen vortheilhaften Gebrauch machen. Weil diese nemlich die Logarithmen der Zahlen von 999981 bis 1000020 angiebt, so setze man, um die Sache allgemein zu übersehen, die gegebene Zahl sey $= N$, und suche einen Factor k, der die Eigenschaften hat, daß $k \cdot N >$ 999981 aber zugleich $k \cdot N <$ 1000020 ausfalle, so muß $k >$ 999981 : N, und zugleich $k <$ 1000020 : N seyn. Diese Gränzen kann man vermittelst der Division finden: und wenn $N = 4738{,}425$ bleibt, so erhält man $k >$ 211,0365 zugleich aber $k <$ 211,044. Zwischen diesen beyden Gränzen kann man vielleicht eine solche Zahl wählen, die sich in Factoren zerfällen läßt, wovon keiner grösser als 1100 ist: da dann zugleich der Logarithme der so bestimmten Zahl k aus der 1sten Tafel leicht gefunden wird. Ferner findet man den Logarithmen der Zahl kN vermittelst der II. Tafel, und daraus $\log. N = \log. kN - \log. k$. In dem hier gewählten Exempel könnte man die Vorsetzung $k = 211{,}04$ versuchen. Sie giebt mit 16 den Quotienten 13,19 und 1319 ist schon eine Primzahl: deswegen würde man mit der Sherwinschen I Tafel nicht ausreichen. Die Wolframsche Tafel würde aber dienen, den natürlichen also auch

den

den Brigg. Log. der Zahl $16 \times 13{,}19 = 211{,}04$ zu finden. Die fernere Rechnung giebt $4738{,}425 \times 211{,}04 = 999997{,}212 = kN$. Demnach kann $p = 999997$, und $q = 0{,}212$ gesetzt, und die übrige Rechnung eben so wie oben n. 4 eingeleitet werden: so findet man l. Brigg. kN, und daraus leicht $\log. N = \log. kN - l.k$.

6. Wenn beym Gebrauch der Sherwinschen Tafeln zwischen den nach n. 5. gefundenen Gränzen keine solche Zahl fällt, die sich in Factoren zerfällen läßt, wovon keiner die Zahl 1100 übertrift; oder wenn man auch eine noch grössere Zahl, als nach num. 5 gefunden werden kann, suchen wollte, die man $= p$ setzen könnte, um eine Reihe zu erhalten, die sich ihrer Gränze noch schneller nähert; so könnte dazu eine Tafel der Primzahlen wie die VI. Tafel in H. Lamberts Zusätzen dienen. Zwischen zweyen zunächst auf einander folgenden Primzahlen sind oft 20 und mehr zusammen gesetzte Zahlen enthalten: ein Paar solche Primzahlen kann man anstatt der Zahlen 999981 und 1000020 wählen, übrigens aber eben so wie oben n. 5. für k zwo Gränzen suchen. Findet man alsdenn zwischen diesen beyden Gränzen eine Zahl, die einen aus der ersten Tafel bekannten Logarithmen hat; so finden die übrigen Rechnungsregeln ihre Anwendung.

158. §.

Den Briggischen Logarithmen der Zahl $\pi = 3{,}1415926 \ldots$. (285. §. Geom. Lehrbegr. 1. Th. 415. S.) bis auf 31 Decimalstellen zu finden.

Aufl. 1. Man könnte die ersten 5 Ziffern $31415 = 305 \times 103 = p$ setzen; um aber eine noch schnellere Nä-

Näherung zu erhalten, versuche man die Voraussetzung $k > \frac{999981}{3,14159...}$, und $k < \frac{1000020}{3,1416...}$; so erhält man $k > 318304$, und zugleich $k < 318315$. Zwischen beyden fällt die Zahl $k = 318310 = 229 \times 1390$: also könnte man die Zahl $k\pi$ suchen, welche nun zwischen 999981 und 1000020 fallen muß, hiernächst aber nach §. 157. n. 4. rechnen. Ob nun vielleicht nach §. 157. n. 6. noch vortheilhafter eine grössere Zahl mit den nöthigen Eigenschaften gefunden werden könne, das liesse sich etwa so versuchen.

2. Die verlangte Zahl soll ansehnlich grösser als 1000020 seyn, also muß sie wenigstens der Zahl 10000000 nahe kommen. Wenn sie vielleicht nur aus 7 Ziffern bestehen kann, so müssen ihre ersten 5 Ziffern allein genommen der Zahl 100000 nahe seyn. Die Tafel der Primzahlen ergiebt, daß zwischen 848111 und 848127 keine Primzahlen fallen: also versuche man die Voraussetzung $k > 8481100 : \pi$, und zugleich $k < 8482700 : \pi$. Man nehme vorläufig $\pi = 3,14159$, so findet man $k > 2699620$ und $k < 2700129$: also kann man $k = 2700000$, oder weil es hier gleichviel ist, wo das Zeichen der Einer hinkommt, $k = 27$ nehmen. Werden nun alle von Ludolf von Cölln berechnete 31 Decimalstellen mitgenommen, so wird $27\pi =$

84,82300164692441743849137134854 66

gefunden. Ferner ist $8482300 = 271 \times 313 \times 100$ eine mehr denn 8mahl grössere Zahl als 1000020: also kann man die fernere Rechnung vortheilhaft wie folget einleiten. Man setze in der bekannten Formul

147. §. 4. Zus. $p = 84,82300$ und $q =$
0,000000164692 ...., so findet man $2p + q =$
169,64600164692 ...., und das giebt

$$\frac{q}{2p+q} = 0,000000000970800609180375071687\text{1}$$

$$\frac{1}{3}\left(\frac{q}{2p+q}\right)^3 = 0,\quad 3049782$$

Summe 0,000000000970800609180375102185 53

mult. mit 2

$z = 0,000000001941601218360750204371 06$

Diese Zahl wie oben 157. §. num. 4. mit $m =$
0,4342944.... multiplicirt giebt

$mz = 0,000000000843226695190704529831 98$
$+ l.Br.3,13 = 0,495544337546448484808126504861 2$
$+ \log.27,1 = 1,432969290874405729521180194875 2$
$\log.27.\pi = 1,928513636853121166236351998056 2$
$- \log.27 = 1,431363764158987311885083709765 3$
$l.Br.\pi = 0,497149872694133854351268288290 9$

159. §.

Der Logarithme einer Zahl ist gegeben: man soll die dazu gehörige Zahl mit Hülfe vollständiger Tafeln schärfer als nach Anleitung des 156. §. finden.

Aufl. 1. Wenn λ der gegebene Logarithme aus einem System, wozu die Grundzahl b gehört, und y die dazu gehörige Zahl ist, so hat man $b^\lambda = y = 1 + \lambda . lb + \frac{1}{2}\lambda^2 . (lb)^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}\lambda^3 . (lb)^3 + ...$ und das l bezeichnet den natürlichen Logarithmen.

(147. §. 1. Zus.) Nun sey $\lambda = u + w$, so ist b^λ

=

$= b^{u+w} = b^u . b^w$, und $w =$ l. art. b, also $b^w =$
$1 + w . lb + \frac{1}{2} w^2 . (lb)^2 + \frac{1}{2} . \frac{1}{3} . w^3 (lb)^3 + \ldots$,
und man erhält $y = b^{u+w} =$
$b^u (1 + w . lb + \frac{1}{2} w^2 . (lb)^2 + \frac{1}{2} . \frac{1}{3} w^3 . (lb)^3 + \ldots)$
Fände man nun den gegebenen Logarithmen selbst in den Tafeln, so wäre die dabey stehende Zahl die gesuchte. Gewöhnlich wird aber λ zwischen zweyen zunächst auf einander folgenden Zahlen, die nur um Eins verschieden sind, enthalten seyn: alsdenn setze man u dem nächstkleinern Logarithmen gleich, und nehme $w = \lambda - u$, so kann $y = b^{u+w}$ aus obenstehender Reihe gefunden werden.

2. Hiebey kommt es vornemlich darauf wieder an, die Rechnung so vortheilhaft einzuleiten, daß w ein möglichst kleiner Bruch werde. Es sey im Briggischen System

$\lambda = 8{,}783189573068420364711$

so kann man subtrahiren

l.Br.607000000 = 8,783188691075257580 96 = *u*
und findet $\lambda - u = 0,000000088199316278375 = w$
mult. mit l. nat. *b* = 2,302585092994045

184206807439523
184206807439952
23025850929 99
2072326583 69
2072326583 6
690775527
23025851
1381551 0
460517
161181
18820
690
161
11

$1 + w \cdot lb = 1,000000203086430875247$
$\frac{1}{2} w^2 (lb)^2 = 0,000000000002062204 90$
$\frac{1}{6} w^3 (lb)^3 = 0,\quad 139$
$b^w = 1,000000203086637095876$
× 607

700001421606459671132
600001218519822575256

607,001232735887171967 32

demnach ist die gesuchte Zahl
607001232,735887171967 32.

3. Es war dieses Exempel mit Vorbedacht so gewählt, daß in der Sherwinschen Tafel sich bey der Zahl 607 ein Logarithme zeigte, der mit dem gegebenen die ersten fünf Decimalstellen gemein hatte:

In andern Fällen, wenn etwa nur eine zwey oder drey Decimalstellen übereinstimmen, ist es am besten, daß man zuerst nur die ersten 5 oder 6 höchsten Ziffern der mit dem Logarithmen zusammen gehörigen Zahl mit Hülfe der kleinen Tafeln suche, und hiernächst die Rechnung wie weiter folget einleite. Es sey $\lambda = 5{,}320046504327893907 23$, so kann man zuerst $\lambda = 5{,}3200465$ annehmen, und nach dem 155. §. die ersten 6 oder 7 Ziffern der zugehörigen Zahl suchen. Diese sind hier 2089519, und es ist $20895 = 199 \times 105 = 199 \times 21 \times 5$: also erhält man

log. 199 = 2,29885307640970665010
log. 21 = 1,32221929473391926800
log. 5 = 0,69897000433601880478

log. 208950 = 5,32004237547964472288

Weil dieser Logarithme mit dem gegebenen λ die ersten 5 Decimalstellen gemein hat, so rechnet man übrigens nach der num. 2. gegebenen Anleitung.

160. §.

Um mit Rechnungen dieser Art leicht fertig zu werden, muß man sich die Einrichtung einer solchen Sammlung von Tafeln, die man zum Gebrauch gewählt hat, wohl bekannt machen, damit man beym Nachschlagen das gesuchte ohne vielen Zeitverlust finde, auch beym Abschreiben nicht leicht fehle. Weil die Schulzische und Vegasche Sammlung eine mit der Sherwinschen ganz ähnliche Einrichtung hat, so wird die nachstehende nähere Beschreibung von der Einrichtung der letztern zugleich als eine Anleitung zum Gebrauch der erstern dienen.

1. Auf den ersten vier Seiten stehen die Logarithmen der Zahlen von 1 bis 999, wie in andern Tafeln, bey einander, nur ist bey den Logarithmen der Zahlen, die über 100 hinausgehen, die Kennziffer schon weggelassen: mit der 6ten Seite aber nimmt folgende Einrichtung ihren Anfang. Jede Seite ist in 13 Columnen gespalten, in der ersten Columne stehen die Zahlen von oben herunter in natürlicher Ordnung fort, von 1000 bis auf 10099: hierauf folgen 10 Columnen nach einander, über und unter denselben stehen die Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, und es hat damit diese Bewandniß. In der ersten dieser Columnen, worüber die 0 stehet, findet man die Logarithmen der zur Linken in der vorigen Columne stehenden Zahlen, aber ohne Kennziffer, die sich allemahl von selbst ergiebt. Nun ist der Logarithme einer Zahl, die aus 5 Ziffern bestehet, vom Logarithmen derjenigen Zahl, die aus den vier höchsten dieser Ziffern bestehet, ausser der Kennziffer in den meisten Fällen nur in den letzten vier Decimaltheilen unterschieden, (einige wenige Ausnahmen hievon werden unten berühret werden), wie man aus dem 154. §. num. 2. allgemein übersehen kann. Hätte man also z. E. die Zahl 47384: so wüßte man, daß der log. davon mit dem log. 4738 in den ersten drey Decimalstellen übereinkäme, und man dürfte nur die 4 Ziffern kennen, die man statt der 4 letzten nehmen müßte, um mit gehöriger Veränderung der Kennziffer den l. 47384 zu haben. Diese vier letzten Ziffern nun, welche man bey einer Zahl von 5 Ziffern, statt der vier letzten nehmen muß, die zum log. gehören würden, wenn die Zahl nur die vier ersten Ziffern hätte, stehen in den 9 Columnen, worüber

über die Ziffern von 1 bis 9 gesetzt sind, mit dem log. der Zahl, welche die ersten vier Ziffern hätte, und in der ersten Columne anzutreffen ist, allemahl in grader Linie. Denn es kann die fünfte Ziffer der Zahl nur eine von diesen 9 Ziffern seyn, wofern es nicht die 0 ist.

2. Man sucht also die vier ersten Ziffern in der ersten Columne auf, und schreibt nur die drey ersten Ziffern des dabey stehenden Logarithmen ab. (Diese drey ersten Ziffern haben allemahl verschiedene nach einander folgende Logarithmen gemein, und deswegen sind sie jedesmahl nur bey dem ersten log. der diese Ziffern hat, ausgedrückt, und bey den folgenden weggelassen.) Hierauf geht man in die Columne hinein, über welcher die 5te Ziffer der Zahl stehet, und schreibt aus dieser Columne die 4 letzten Ziffern ab, welche in grader Linie mit der Zahl in der ersten Columne stehen, welche aus den vier ersten Ziffern bestehet. So findet man die drey ersten Ziffern des $l\,47384 = 675\ldots$. unter der Ziffer 4 in der fünften Columne die vier letzten $= = = 6317$, also hat man $l\,47384 = 4{,}6756317$.

3. Nach diesen 10 Columnen folgen noch zwey andre, als die beyden letzten. Ueber und unter der nächstletzten stehet ein D, als der Anfangsbuchstab des Worts Difference (Unterschied), über der letzten Columne stehet Pts als eine Verkürzung des Worts parts (Theile), und unter derselben Pro, oder das Wort proportional abgekürzt. Diese beyden Columnen dienen, wenn die gegebene Zahl aus 7 Ziffern bestehet, zur leichten Anwendung der Regel

des

des 154 §. n. 4, um wegen der beyden letzten Ziffern die Proportionaltheile zu finden, welche man zum Logarithmen der Zahl, die aus den ersten 5 Ziffern bestehet, addiren muß. Um den log. der Zahl 473842 zu finden, würde man ansetzen

$$l\,47385 = 6756409$$
$$l\,47384 = 6756317$$
$$\text{Differenz } 92$$

und man muß $\frac{2}{10} \cdot 92 = 18$ zum $l\,47384$ addiren. Die Differenz 92 stehet schon in der nächstletzten Columne, und man hat nicht nöthig sie erst zu suchen. In der letzten mit der Ueberschrift Pts stehen auch die proportionalen Theile, die man suchet, nachdem die 6te Ziffer eine von den Zahlen 1 bis 9 ist, so wie die im Exempel gefundene Zahl 18 neben der 2 stehet. Deswegen kann man die Zahlen nur aus den Tafeln etwa so ausschreiben

$$l\,47384 == 6756317$$
$$\text{wegen der Ziffer } 2 \ldots\ldots + 18$$
$$l\,473842 = 5,6756335$$

Hätte die Zahl 7 Ziffern, wie 4738425: so müßte man dem 194. §. n. 4 gemäß $\frac{2}{10}\frac{5}{0} \cdot 92$ zum nächstkleinern Logarithmen addiren, und es ist $\frac{2}{10}\frac{5}{0} \cdot 92 = \frac{2}{10} \cdot 92 + \frac{5}{100} \cdot 92$. Der erste Theil dieser Summe ist der proportionale Theil wegen der 6sten Ziffer 2, und der zweyte Theil eben der Summe ist $\frac{1}{10}$ desjenigen, den man wegen der 6sten Ziffer zusetzen müßte, wenn es die Ziffer 5 wäre: also muß für den proportionalen Theil wegen der 7ten Ziffer der 10te Theil desjenigen genommen werden, der bey der 7ten Ziffer stehet; wie die nachstehende Rechnung zeiget.

$l\,47384 = 6756317$

wegen d. 6sten Ziffer 2 18

wegen d. 7ten Ziffer 5 4,6 beynahe 5

Also $l\,4738425 = 6{,}6756340$

161. §.

Die oben num. 1. angenommene Voraussetzung, daß der Logarithme einer Zahl die aus vier Ziffern bestehet vom Logarithmen einer Zahl, welche aus eben den vier Ziffern, nebst noch einer bestehet, ausser der Kennziffer nur in den letzten vier Decimaltheilen unterschieden sey, leidet einige Einschränkung, weil sich die Verschiedenheit bis auf die fünften Decimalstelle vom Ende erstrecken kann. Aus den kleinen Wolfischen, oder andern ähnlichen Tafeln findet man nach dem 154. §. n. 4

z. E. $l\,1648 = 3{,}2169572$

und $l\,1648{,}2 = 3{,}2170099$

und aus den Sherwinschen Tafeln mit Weglassung der Kennziffer

$l\,16481 = 2169836$

Wenn man ferner ganz strenge bey der oben n. 1 gegebenen Regel bliebe; so würde $l\,16482 = 2160099$ gefunden werden: aber man sieht gleich, daß dies falsch sey. Es ist eigentlich $l\,16482 = 2169836 + 263$, und durch Addition des zweyten Theils wird die dritte Ziffer 6 in 7 verwandelt. Es sollte also in der dritten Columne der Tafeln anstatt 0099 eigentlich 10099 stehen: denn es ist

$l\,16482 = 216$

$+\,10099$

oder $l\,16482 = 2170099$.

Wegen Mangel des Platzes aber hat die 1 vor den Nul-

len

len wegbleiben müssen. Wenn demnach die vier letzten Ziffern, welche man nach der Regel aus einer der folgenden Columne nehmen müßte, zusammen eine kleinere Zahl ausmachen, als die vier letzten Ziffern in der ersten Columne; so muß man die niedrigste von den drey ersten Ziffern, welche man aus der ersten Columne nimmt, um 1 vergrössern: auch wird diese dritte Ziffer in der gleich folgenden Zeile um 1 grösser seyn.

162. §.

Hat man umgekehrt einen Logarithmen, dessen Kennziffer nicht grösser, als 6 ist; so kann man aus den Sherwinschen Tafeln die dazu gehörige Zahl eben so leicht ohne weitläuftige Rechnung suchen. Es sey der Logarithme 2,5639462 gegeben: so sucht man ihn ohne Rücksicht auf die Kennziffer unter den Logarithmen auf, die mit drey Zahlen 563 anfangen. Vermöge der Einrichtung der Tafeln unterscheiden sich allemahl die drey ersten Ziffern vorzüglich, daß man also mit dem Nachschlagen leicht fertig wird. Fände man nun in einer der Columnen die letzten vier Ziffern die hier 9462 sind, genau: so dürfte man die dazu gehörige aus fünf Ziffern bestehende Zahl nur abschreiben, und den Ort der Einer so setzen, wie es die Kennziffer erfodert (153. §.). Findet man diese vier letzten Ziffern in den Tafeln nicht genau, wie im Exempel: so nimmt man die vier nächst kleinern mit den drey ersten gehörig zusammen, subtrahirt diesen log. nach dem man die dazu gehörigen 5 Ziffern notirt hat, vom gegebenen log. und sucht den Rest unter den proportionalen Theilen auf. Findet man den Rest hier genau, so ist die dabey stehende Ziffer die 6te in der gesuchten Zahl: wo nicht, so subtrahirt man vom er-

sten Rest den nächst kleinern proportionalen Theil, nachdem man die zu diesem gehörige Ziffer für die sechste angenommen hat. Nun giebt man Acht, ob der zweyte Rest unter den in Gedanken mit 10 dividirten proportionalen Theilen vorkomme, und nimmt die dabey stehende Ziffer für die siebente. Mit dem Logarithmen 2,5639462 würde man demnach so umgehen.

Dem nächstklein. Logar.	2,5639462 gegeb. Logar.
zugehör. Zahl 36639	5639436 nächst kleiner.
weg. d. I. Restes ... 2	26 I. Rest
wegen d. II. Restes ...2	24
gesuchte Zahl 366,3922	2 II. Rest

Den Ort der Einer setzt man leicht in jedem Fall so, wie es die Kennziffer verlangt.

163. §.

Vermittelst der Logarithmen zu drey gegebenen Zahlen die vierte Proportionalzahl zu finden.

Aufl. Nachdem man die Logarithmen dieser drey Zahlen aus den Tafeln gefunden hat, addire man die Logarithmen der beyden letzten, und subtrahire von der Summe den Logarithmen der ersten Zahl: so ist der Rest der Logarithme der gesuchten Zahl, die man nun ebenfalls aus den Tafeln findet (156. 159. §. vergl. mit dem 175. §. R.).

Zusatz. Auf ähnliche Art kann man zwey oder mehr Zahlen mit Hülfe der Logarithmen in einander multipliciren, (137. §.) oder eine gegebene Zahl mit einer kleinern dividiren. Man kann eine Zahl auf eine verlangte Potenz erheben, oder aus derselben eine

Wur-

Wurzel einer gegebenen Ordnung finden. (139. §.) Aus dem bisherigen Vortrage ist indessen leicht die Folge zu ziehen, daß der vortheilhafte Gebrauch der Logarithmen bey solchen Rechnungen vornemlich nur auf die Fälle eingeschränkt sey, bey welchen die ersten 7 Ziffern der mit dem gefundenen Logarithmen zusammen gehörigen Zahl das gesuchte Resultat scharf genug angeben.

Der VIII. Abschnitt.

Von der Auflösung mathematischer Aufgaben durch Gleichungen.

164. §.

Die Methode, arithmetische Aufgaben auf Gleichungen zu bringen, und hiernächst eine oder mehr gesuchte Zahlen aus solchen Gleichungen herzuleiten, ist aus dem XV. und XVI. Abschnitt der Rechenkunst schon bekannt: ihr Gebrauch aber ist keinesweges auf die Rechenkunst allein eingeschränkt. Sie findet vielmehr in der Geometrie und überhaupt in allen Theilen der Mathematik ihre Anwendung. Die Buchstaben sind ganz allgemeine Zeichen für die Grössen, welche bey der Auflösung einer Aufgabe in Betrachtung kommen. Damit man bey diesem Geschäfte die gesuchten Grössen von den gegebenen desto besser unterscheiden könne, ist es eingeführt, jene mit einem von den letzten Buchstaben des Alphaberths *z*, *y*, *x*, u. s. f. diese aber mit den ersten Buchstaben *a*, *b*, *c*,

u. s. w. zu bezeichnen. Ungleiche Grössen, oder solche, von deren Gleichheit man noch nicht versichert ist, werden mit verschiedenen, gleiche Grössen aber mit einerley Buchstaben bezeichnet.

165. §.

Aus einer Gleichung kann man unzählich viele andre herleiten, wenn man nemlich auf beyden Seiten gleiches addirt, oder subtrahirt, oder auf beyden Seiten mit einerley Zahl multiplicirt, oder dividirt. Aus der Gleichung

$$ax + b = fx + g$$

folgt $$ax = fx + g - b$$

oder $$ax - fx = g - b$$

also auch $$x = \frac{g - b}{a - f}.$$

Wenn auf einer Seite des Gleichheits-Zeichens die unbekannte Grösse allein stehet, und auf der andern Seite lauter bekannte Grössen mit einander verbunden sind: so zeigt die Gleichung unmittelbar an, wie man die unbekannte Grösse aus den bekannten suchen müsse. Im vorstehenden Exempel ergiebt die letzte Gleichung, man müsse die Differenzen $g - b$ und $a - f$ suchen, hiernächst aber jene mit dieser dividiren.

166. §.

Die Gleichung, welche unmittelbar aus den Bedingungen einer Aufgabe geschlossen wird, heißt die Fundamental-Gleichung der Aufgabe. Wenn nun vorausgesetzt wird, daß in derselben keine höhere Potenz der unbekannten Grösse als die erste, auch kein Wurzelzeichen vorkomme, unter welchem die unbekannte Grösse befindlich ist; so läßt sich daraus alle-

allemahl eine andre Gleichung herleiten, worin, wie im vor. §. die unbekannte Grösse auf einer Seite des Gleichheitszeichens allein stehet, auf der andern Seite aber lauter bekannte Grössen mit einander verbunden sind. Die Rechnungen, welche man in solcher Absicht anstellen muß, machen das aus, was man die Auflösung der Gleichung nennt.

167. §.

Unter der, im vor. §. vorausgesetzten Bedingung eine Gleichung aufzulösen.

I. Wofern unter den Gliedern der Gleichung Brüche vorkommen, so multiplicire man die ganze Gleichung mit dem Product aller Nenner.

II. Diejenigen ganz bekannten Glieder der Gleichung, welche nun vor dem Gleichheitszeichen stehen, und mit unbekannten Gliedern durch die Addition oder Subtraction verbunden sind, setze man mit dem entgegengesetzten Zeichen hinter dasselbe.

III. Die Glieder hinter dem Gleichheitszeichen, welche die unbekannte Grösse enthalten, setze man mit dem entgegengesetzten Zeichen vor dasselbe.

IV. Nun ist das, was vor dem Gleichheitszeichen stehet, ein Product der unbekannten Grösse in die Summe aller ihrer bekannten Coefficienten: demnach dividire man mit dieser Summe der Coefficienten auf beyden Seiten, so ist die Gleichung aufgelöst. Es sey

$$\frac{ax}{b} - \frac{ef}{g} = \frac{mx}{n} \pm c,$$ so giebt

die 1. Regel $agnx - befn = bgmx + bcgn,$

die 2. und 3. Regel $agnx - bgmx = bcgn + befn,$

oder $(agn - bgm)x = (cg + ef)bn:$

also ist nach der 4 Regel $x = \frac{(cg + ef)bn}{(an - bm)g}$.

168. §.

Wofern nach Anwendung der ersten Regel höhere Potenzen der gesuchten Grösse als die erste mit verschiedenen Exponenten herauskommen: so kann man zwar noch die zweyte und dritte Regel anbringen, aber die vierte Regel läßt sich nicht weiter anwenden, weil die Voraussetzung, worauf sie sich gründet, nicht mehr statt hat. Ein Exempel von dieser Art wäre

$$x + \frac{a}{xx} + f = h.$$

Hieraus wird

nach der 1. Regel $x^3 + a + fx^2 = hx^2$,

nach der 2. und 3. Regel $x^3 + (f - h)x^2 = -a$:

die vierte Regel aber kann man nicht weiter anwenden.

169. §.

Solche Gleichungen, worin die unbekannte Grösse auf höhere Potenzen als die erste steigt, werden höhere, auch zusammengesetzte Gleichungen genannt, da im Gegentheil die übrigen einfache Gleichungen heissen. Jene kann man wiederum in zwey verschiedene Classen theilen. Wenn nemlich in allen unbekannten Gliedern der Gleichung eine und eben dieselbe Potenz der unbekannten Grösse vorkommt; so heißt es eine reine Gleichung, und von der Art wäre $ax^3 + b^4 = fx^3 + c^4$. Kommen aber in der Gleichung verschiedene Potenzen der unbekannten Grösse vor, wie im 168. §. so nennt man sie eine unreine Gleichung. Man giebt der reinen Gleichung den Nahmen einer cubischen, biquadratischen Gleichung,

chung, einer Gleichung der fünften, der sechsten Ordnung, u. s. w. von der darin enthaltenen Potenz der unbekannten Grösse: eben diese Nahmen bekommen auch die unreinen Gleichungen von der höchsten Potenz, worauf in ihnen die unbekannte Grösse steigt.

170. §.

Eine reine höhere Gleichung aufzulösen, vorausgesetzt, daß man aus jeder Zahl die Wurzel einer gegebenen Ordnung ausziehen könne.

Man gehe mit der Gleichung eben so um, wie mit einer einfachen Gleichung nach dem 167. §. indem man die Potenz der unbekannten Grösse als die unbekannte Grösse selbst ansiehet.

Wenn nun diese Potenz von den unbekannten Grössen abgesondert ist, und auf der einen Seite des Gleichheitszeichens allein stehet; so ziehe man auf beyden Seiten die Wurzel derjenigen Ordnung aus, welche der Exponent der Dignität der unbekannten Grösse anzeigt.

Läßt sich diese Wurzel aus dem bekannten Theil der Gleichung nicht würklich ausziehen, so setze man nur das Wurzelzeichen mit dem dazugehörigen Exponenten voran.

Exempel.

Es sey $\frac{1}{2}xx - aa = 2ab - \frac{1}{2}xx + bb$.

Dies giebt $xx = aa + 2ab + bb$.

Also ist $x = a + b$.

Wenn $a^5 + x^5 = \frac{fx^5}{g} - h^4$

so wird $a^5g + gx^5 = fx^5 - gh^4$

$(g - f)x^5 = -gh^4 - a^5g$

$$\text{also } x^5 = \frac{gh^4 + a^5 g}{f - g}$$

$$\text{und } x = \sqrt[5]{\frac{gh^4 + a^5 g}{f - g}}.$$

171. §.

Wenn eine Rechnungs-Aufgabe auf eine einfache oder reine höhere Gleichung gebracht ist, die man nach dem 167. oder 170. §. hat auflösen können; so lassen sich bey würklicher Berechnung der eigentlich gesuchten Zahl die Logarithmen oft mit Vortheil gebrauchen. (163. §. Zus.) Exempel dazu geben die Gleichungen $z = k^n . S$ (239. §. Rech.) und $S = \lambda^n . z$ (241. §. Rech.) aus der Zinsen- und Disconto-Rechnung. Aus den im 240. und 243. §. nur bis auf $n = 6$ berechneten Proben kann man schon abnehmen, daß bey ansehnlichen Summen die Rechnung für mehrere Jahre nicht scharf genug ausfallen könne, wenn man nicht aus vollständigen Logarithmen-Tafeln und weiter, als bis auf die 7te Ziffer rechnet. Dergleichen Tafeln, die ein für allemahl viel genauer aus den Zahlen selbst eben so leicht berechnet werden können, wie sie oben a. a. O. vorgeschlagen sind, leisten bey solchen Rechnungsgeschäften, wenn sie ins Grosse gehen, bessere Dienste, und es werden davon weiter unten mehr Nachrichten vorkommen.

172. §.

Wurzeln aus vorgelegten Zahlen kann man ebenfalls vermittelst der Logarithmen finden: (163. §. Zus.) wenn man sie aber schärfer als bis auf die 7te Ziffer sucht, so dient vornemlich die allgemeine Formul

mul im 114. §. 2. Zusatz. Man setze daselbst $k = \frac{1}{n}$, so ist $(a+b)^{\frac{1}{n}}$ oder $\sqrt[n]{(a+b)} = a^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{b}{a+b} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{b^2}{2(a+b)^2} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n+1}{n} \cdot \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{b^3}{2.3.(a+b)^3} - \ldots\right)$

und diese Reihe dienet Wurzeln aller Ordnungen sehr genau zu finden, wenn man nur die Rechnung geschickt einleitet. Wenn man eine Tafel berechnen wollte, welche die Wurzeln der Zahlen, wie sie in natürlicher Ordnung folgen, enthalten sollte; so könnte man ein für allemahl $n = 2$, $b = 1$ setzen, für a aber nach der Ordnung die Zahlen 1, 2, 3, u. s. w. Man findet nemlich

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2.2} + \frac{1.3}{2.4.2^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.2^3} + \ldots$$

$$\sqrt{3} = \left(1 + \frac{1}{2.3} + \frac{1.3}{2.4.3^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.3^3} + \ldots\right)\sqrt{2}$$

$$\sqrt{5} = 2\left(1 + \frac{1}{2.5} + \frac{1.3}{2.4.5^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.5^3} + \ldots\right).$$

Wollte man die Cubicwurzeln haben, so müßte $n = 3$ gesetzt werden, und man würde folgende Reihen erhalten:

$$\sqrt[3]{2} = 1 + \frac{1}{3.2} + \frac{1.4}{3.6.2^2} + \frac{1.4.7}{3.6.9.2^3} + \ldots$$

$$\sqrt[3]{3} = \left(1 + \frac{1}{3.3} + \frac{1.4}{3.6.3^2} + \frac{1.4.7}{3.6.9.3^3} + \ldots\right)\sqrt[3]{2}$$

$$\sqrt[3]{5} = \left(1 + \frac{1}{3.5} + \frac{1.4}{3.6.5^2} + \frac{1.4.7}{3.6.9.5^3} + \ldots\right)\sqrt[3]{4}.$$

173. §.

Weil jede dieser Formuln voraussetzet, daß man die Wurzeln eben der Ordnung aus allen vorhergehenden Zahlen schon kenne; so ist eine andre Einleitung der Rechnung nöthig, wenn man aus jeder vorgelegten Zahl die verlangte Wurzel unabhängig von den übrigen finden will.

1. Ein Mittel dazu bestehet darin, daß man unter den vollkommenen Potenzen mit eben dem Exponenten, welcher die Ordnung der gesuchten Wurzel anzeigt, diejenige wählt, welche der gegebenen Zahl am nächsten kommt, sie mag übrigens grösser, oder kleiner seyn. Diese Potenz sey R^n und R ihre rationale Wurzel; ferner sey die gegebene Zahl $= N$, so kann man $a = R^n$, also $R^n + b = N$ setzen. Das giebt $b = N - R^n$, und b wird negativ, wenn $R^n > N$ ist: in eben dem Fall erhalten also die Glieder der Reihe das entgegengesetzte Zeichen, welche in Potenzen von b mit ungraden Exponenten multiplicirt sind. Dieses hat zur Folge, daß der Factor $a^{\frac{1}{n}} = R$ rational wird.

2. Damit ferner die Reihe sich möglichst schnell der Gränze ihrer Summe nähere, multiplicire man zuvor die gegebene Zahl N mit einer bekannten vollkommenen Potenz mit demselben Exponenten, der die Ordnung der Wurzel anzeigt. Eine solche Potenz sey k^n, und man setze nach num. 1. nun $R^n + b = k^n N$, so findet man $(R^n + b)^{\frac{1}{n}} = k\sqrt[n]{N}$, mithin $\sqrt[n]{N} = \frac{1}{k}(R^n + b)^{\frac{1}{n}}$. Um $\sqrt{2}$ zu finden, setze man $k = 5$, $n = 2$, $N = 2$, also $k^n N = 50$.

Weil

Weil nun 49 die nächste vollkommene Quadratzahl ist, so nehme man $R^n = 49$, also $R = 7$, $b = 1$.

Das giebt $\sqrt{50} = 5\sqrt{2} = 7\left(1 + \frac{1}{2.50} + \frac{1.3}{2.4.50^2} + \frac{1.3.5}{2.4.6.50^3} + \ldots\right)$ also

$\sqrt{2} = \frac{7}{5}\left(1 + \frac{1}{100} + \frac{1.3}{100.200} + \frac{1.3.5}{100.200.300} + \ldots\right)$,

und man findet

$\frac{7}{5} =$	1,400000000000
$\frac{7}{5} \cdot 1\frac{1}{00} =$	140000000000
$\frac{7}{5} \cdot 1\frac{1}{00} \cdot 2\frac{3}{00} =$	21000000000
$p = \frac{7}{5} \cdot 1\frac{1}{00} \cdot 2\frac{3}{00} \cdot 3\frac{5}{00} =$	3500000000
$p \cdot 4\frac{7}{00} =$	612500
$p \cdot 4\frac{7}{00} \cdot 5\frac{9}{00} =$	11025
$p \cdot 4\frac{7}{00} \cdot 5\frac{9}{00} \cdot 6\frac{11}{00} =$	202
	3

also $\sqrt{2} = 1{,}414213562373$0.

Um auf ähnliche Art $\sqrt[3]{3}$ zu finden, kann man $k = 9$, $n = 3$, $N = 3$, also $k^n N = 729 \cdot 3 = 2187$ setzen. Weil nun $13^3 = 2197$ ist, so sey $R^3 = 2197$, also $b = -10$, $R = 13$, und man erhält

$$\sqrt[3]{(13^3 - 10)} = 9\sqrt[3]{3} = 13\left(1 - \frac{1.10}{3.2187} + \frac{1.4.10^2}{3.6.2187^2} - \frac{1.4.7.10^3}{3.6.9.2187^3} + \ldots\right).$$

174. §.

Wenn die Nahmen der Addition, Subtraction, Multiplication und Division so allgemeine Operationen

nen bezeichnen, wie sie im I. Abschnitt sind erkläret worden; so sind es nicht blos arithmetische sondern auch geometrische Operationen. Sollen die Buchstaben a und b grade Linien bedeuten, so sind auch $a+b$, $a-b$, ab, grade Linien: gewöhnlich aber bedeutet $\frac{a}{b}$ eine Zahl, eigentlich alsdenn nur eine grade Linie, wenn b eine Zahl vorstellet, so wie auch ein Factor des Products ab eigentlich statt der Zahl $\frac{b}{1}$ stehet, wenn ab eine grade Linie vorstellen soll.

(18. §.) Indessen kann auch ab die vierte geometrische Proportionallinie zu einer für Eins angenommenen Linie und beyden Factoren vorstellen, so wie $a:b$ die vierte Proportionallinie zu b zu Eins und a. In diesem Sinne ist jede Potenz wie a^n das letzte Glied einer geometrischen Progression, die aus $n+1$ Gliedern bestehet, und mit 1 anfängt: jede Wurzelgrösse wie $\sqrt[n]{a}$ ist die erste von $n-1$ geometrischen Proportionallinien zwischen 1 und a. Wenn man den bekannten Zeichen der algebraischen Operationen einen so allgemeinen Sinn beylegt, so giebt das der Methode Aufgaben durch Gleichungen aufzulösen ebenfalls eine so grosse Allgemeinheit, daß sie sich nicht allein auf arithmetische sondern auch auf geometrische Aufgaben anwenden lässet. Nach Auflösung einer Gleichung, worin die Buchstaben Linien bedeuten, zeigt der letzte Ausdruck, worin die unbekannte Grösse von den bekannten abgesondert ist, durch welche geometrische Operationen, und in welcher Ordnung die gesuchte Linie aus den gegebenen, und bekann-

kannten Linien gefunden werden könne. Hätte man die Gleichung $x = \frac{ab}{c} + f$; so drückt sie aus, daß die Linie x gefunden werde, wenn man zu c, b, a die vierte Proportional-Linie sucht, und dazu die Linie f addirt: also kann man die Auflösung geometrischer Aufgaben eben so, wie die Auflösung arithmetischer Aufgaben durch Gleichungen suchen. Mit den Gleichungen selbst gehet man bey der Auflösung auf völlig einerley Art um: nur muß man die Fundamentalgleichung einer geometrischen Aufgabe aus geometrischen Gründen herleiten, und deswegen muß derjenige, welcher diese Methode bey geometrischen Aufgaben in Anwendung bringen will, wenigstens mit den ersten Gründen der Geometrie sich bekannt gemacht haben.

175. §.

Die drey Seiten eines Dreyeckes ABC sind gegeben, worin die Seite AC dem Winkel an B gegenüber liegt: man soll in dieser Seite einen Punct D finden, der die Eigenschaft hat, daß eine grade Linie durch ihn und die Seite B des gegenüberstehenden Winkels gezogen die Seite AC senkrecht schneidet. 181 Fig

Aufl. Zuerst suche man die Fundamentalgleichung der Aufgabe auf folgende Art. Es sey BD auf AC senkrecht, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, $AD = x$: so ist $CD = AC - AD = b - x$, und die Auflösung der Aufgabe kommt nur darauf an, daß man eins von beyden Segmenten AD oder CD finde. Vermöge des 111. §. Geom. ist $ABq - ADq = BDq$ und $BCq - CDq = BDq$, folglich wird

$BC_q - CD_q = AB_q - AD_q$. Braucht man nun die festgesetzten Zeichen, so erhält man $aa - (b-x)^2 = cc - xx$ als die Fundamentalgleichung der Aufgabe. Diese scheint zwar quadratisch zu seyn, sie wird aber auf eine einfache Gleichung gebracht, wenn man das Quadrat $(b - x)^2$ gehörig ausdrückt. Es wird nemlich

$$aa - bb + 2bx - xx = cc - xx,$$

also $aa - bb + 2bx = cc$

und $2bx = bb + cc - aa$,

oder $2bx = bb + (c + a)(c - a)$,

$$\text{folglich } x = \tfrac{1}{2}b + \frac{(c+a)(c-a)}{2b}.$$

Diese letzte Gleichung zeigt, daß x auf folgende Art gesucht werden müsse. Zu $2b$, $c + a$, und $c - a$ suche man die vierte geometrische Proportionallinie, und addire sie zu $\frac{1}{2}b$: so ist x gefunden.

1. Zusatz. Wenn die Seiten des Dreyecks durch Zahlen ausgedrückt sind: so zeigt die Gleichung, wie man die Länge von AD durch Rechnung finden könne.

2. Zusatz. Weil $CD = b - x$ war, so findet man $CD = \frac{1}{2}b - \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$. Das giebt ferner $AD + CD = b = AC$, wie der Voraussetzung gemäß ist, und $AD - CD = \frac{(c+a)(c-a)}{b}$, also $b : c + a = c - a : AD - CD$.

176. §.

Weil man alle Verhältnisse gleichartiger Grössen gegen einander durch Zahlen ausdrücken kann, wenn die Irrationalzahlen nicht ausgeschlossen werden, so

ist

ist diese Methode mathematische Aufgaben auf Gleichungen zu bringen, und aus denselben hiernächst die Auflösung herzuleiten, so allgemein, daß man sie allemahl anwenden kann, wenn aus gegebenen Grössen andre unbekannte gesucht werden sollen, wofern man nur die Verhältnisse der bekannten Grössen gegen einander und gegen die gesuchte Grösse kennet. Deswegen findet diese Methode in allen Theilen der Mathematik ihre Anwendung, und der Hauptkunstgriff, worauf es bey dieser Methode ankommt, beruhet auf der folgenden Regel:

Man nimmt an, die gesuchte Grösse sey bereits gefunden, man drückt sie durch ein allgemeines Zeichen aus, verbindet sie hierauf mit den gegebenen Grössen so, wie es den Vorschriften der Aufgabe gemäß ist, und schließt daraus rückwärts auf die Veränderungen, die man mit den gegebenen Grössen vornehmen muß, wenn die gesuchte herauskommen soll.

177. §.

Bey diesem Geschäfte sind eigentlich drey Puncte von einander zu unterscheiden,

1) Die Untersuchung darüber, wie die gegebenen Grössen und das gesuchte von einander abhängen, und darin bestehet eigentlich die Analysis, das Aufsuchen der Mittelbegriffe und der Zwischensätze, welche die Art und Weise, wie das gegebene und gesuchte von einander abhängen, deutlich zu übersehen dienen.

2) Eine geschickte Wahl der Zeichen, und vorläufige Rechnung, um auf eine oder mehr Fundamentalgleichungen zu kommen.

3) Die Auflösung der Gleichungen, und dieses letztere ist eigentlich das Geschäfte der Algebra.

178. §.

Wenn die Aufgabe geometrisch ist, so schließt man den Zusammenhang des gegebenen mit dem gesuchten aus Betrachtung einer Figur, auch wird anstatt dessen, was der 2te und 3te Punct fodert, alles durch Zeichnung bewerkstelliget, wenn nicht allein die Analysis, sondern auch die Art, wie man auf die Auflösung der Aufgabe kommt, völlig geometrisch bleiben soll. Die algebraische Bezeichnung, und die hiernächst anzustellende Rechnung dienen die nöthigen Schlüsse abzukürzen, und nach Auflösung der Gleichung läßt sich das gefundene Resultat aus der algebraischen Zeichensprache in die geometrische Sprache wieder übersetzen. Vermittelst einer solchen Analysis kann man nicht allein die Auflösungen vorgelegter Aufgaben, sondern auch die Beweise vorgelegter Lehrsätze finden. Weil es aber eine viel zu sehr ermüdende Weitläuftigkeit seyn würde, wenn man jedesmahl bis auf die ersten Grundbegriffe, Grundsätze und Folgerungssätze zurück gehen wollte; so dient es zur Erleichterung, wenn man die Auflösungen mehr einfacher Probleme, so wie die Beweise mehr einfacher Lehrsätze schon als bekannt voraussetzen darf.

179. §.

Eine Sammlung solcher bey Auflösung geometrischer Aufgaben dienlicher Elementar-Aufgaben, wenn die Auflösung bloß geometrisch, nicht algebraisch seyn soll, hat man unter dem Titel: Data von Euklides. Simson hatte diese Data ins Engli-

sch

sche übersetzt, und wir haben nun auch eine deutsche Uebersetzung aus dem Englischen unter dem Titel: Euklids Data, verbessert und vermehrt von Simson, und mit einer Sammlung geometrischer nach der analytischen Methode der Alten aufgelößter Probleme, von Joh. Christoph Schwab, Prof. der Phil. in Stuttgart, Stuttgart 1780. Das Buch ist für angehende Geometer sehr brauchbar, um das recht kennen zu lernen, was geometrische Analysis sey. Auch handelt hievon H. Hofr. Kästner in der Vorrede zu H. Hubens Versuch einer analytischen Abhandlung von Kegelschnitten. Göttingen 1759. H. Hubens Vortrag im Buche selbst ist algebraisch-nicht geometrisch-alcalytisch.

180. §.

Die Auflösung der Aufgabe des 175. §. liesse sich durch geometrische Schlüsse so finden. Die Summen beyder Segmente $AD + CD = AC$ ist gegeben, also auch ihre Hälfte $\frac{1}{2} AC$. Man nehme $DH = DC$, so ist AH die Differenz der Segmente, nemlich $AH = AD - DH = AD - DC$. Man suche also AH, so ist auch $CH = AC - AH$, und $CD = DH = \frac{1}{2} CH$, mithin $AD = AH + DH$ gefunden. Ein Kreis aus dem Mittelpunct B mit dem Halbmesser BC beschrieben geht durch H, und schneidet AB in G: alsdenn aber ist $AC : AF = AG : AH$, (215. §. Geom.) oder $AC : AB + BC = AB - BC : AH$, welches mit dem 175. §. 2. Zusatz übereinstimmet. Hiemit ist also zugleich der geometrische Lehrsatz gefunden: die Seite AC des Dreyeckes verhalte sich zur Summe der übrigen beyden Seiten, wie

ihre Differenz zur Differenz der Segmente, worin die Seite AC durch eine grade Linie getheilt wird, die aus der Spitze des gegenüberstehenden Winkels darauf senkrecht fällt.

181. §.

Die Summe zweyer Grössen ist gegeben, und ihre Differenz, man soll beyde Grössen finden.

Aufl. Wenn S die gegebene Summe, D die Differenz beyder Grössen, die eine aber mit x, die andre mit y bezeichnet ist; so hat man zwey Gleichungen

$$x + y = S$$
$$x - y = D,$$

vorausgesetzt, daß $x > y$ sey. Aus einer von diesen Gleichungen allein würde man die Auflösung der Aufgabe nicht herleiten können. Wenn man aber beyde Gleichungen zusammen addirt, so giebt das $2x = S + D$, also $x = \frac{1}{2}S + \frac{1}{2}D$. Wird ferner die zweyte von der ersten subtrahirt, so erhält man $2y = S - D$, mithin $y = \frac{1}{2}S - \frac{1}{2}D$. Die Werthe für x und y, welche man aus diesen beyden Gleichungen findet, leisten beyden Bedingungen der Aufgabe zugleich ein Genüge.

Zusatz. Obgleich diese Aufgabe an sich sehr leicht ist, so ist es doch um deßwillen, weil sie von einem sehr allgemeinen Umfange ist, nützlich, daß man ihre Auflösung ein für allemahl bemerke. Oft kann man die Summe und Differenz beyder Grössen, oder eins von beyden, wenn das andre schon gegeben ist, leichter als die Grössen selbst finden. Bey Auflösung der Aufgabe im 175. §. war die Summe beyder Segmente

mente der Grundlinie des Dreyeckes schon bekannt, und es kam nur darauf an die Differenz zu finden. Beydes die algebraische Auflösung im 175. §. und die geometrische im 180. §. bestimmen auch beyde Segmente aus ihrer Summe und Differenz eben so, wie es der allgemeinen Auflösung dieser Aufgabe gemäß ist.

182. §.

Wenn eine mathematische Aufgabe so viele Bestimmungen enthält, daß daraus eben so viele Gleichungen gefolgert werden können, als unbekannte Grössen gesucht werden, so nennt man sie eine bestimmte, im Gegentheil aber eine unbestimmte Aufgabe. Ein leichtes Beyspiel von der ersten Art, war die Aufgabe im vor. §. und von beyden Arten hat die Rechenkunst, von der letztern Art insbesondre der XV. u. XVI. Abschnitt der Rechenkunst schon Proben gegeben. Eine Gleichung, welche ausser den bekannten Grössen nur eine unbekannte Grösse enthält, heißt eine bestimmte Gleichung: eine solche Gleichung aber, die ausser den bekannten Grössen mehr als eine unbekannte enthält, nennt man eine unbestimmte Gleichung. Eine Gleichung bestimmt nemlich den Werth einer unbekannten Grösse völlig, wenn sie nicht mehr unbekannte Grössen enthält, aber eine Gleichung, die mehr als eine unbekannte Grösse enthält, bestimmt keine davon: sie zeigt nur, wie eine von der andern abhängt, und wie die eine gefunden werden könne, wenn die andre entweder willkührlich angenommen, oder sonst durch andre Gründe bestimmt wird. Aus $x + y = S$ folgt zwar $x = S - y$, aber x ist nicht bestimmt, weil man die Grösse von y nicht

weiß. Eine Gleichung zwischen drey unbekannten Grössen bestimmt eine davon nur unter der Bedingung, wenn die übrigen beyden entweder willkührlich angenommen, oder durch andre Gründe bestimmt werden. Aus $x + y + z = S$ folgt zwar $x = S - y - z$, allein man kann nicht bestimmt angeben, wie groß x sey, bevor y und z bestimmt sind. So bestimmt jede Gleichung, wenn sie auch noch mehr unbekannte Grössen enthält, allemahl nur eine, unter der Bedingung, daß die übrigen durch andre Gründe bestimmt werden.

183. §.

Aus zwey unbestimmten Gleichungen zwischen zwey unbekannten Grössen eine unbekannte Grösse **wegschaffen** (eliminare incognitam) heißt aus beyden Gleichungen eine dritte bestimmte Gleichung herleiten, welche nur die andre unbekannte Grösse allein enthält. Eben dieselbe Redensart ist gewöhnlich, wenn man aus zweyen unbestimmten Gleichungen zwischen drey unbekannten Grössen eine dritte Gleichung herleitet, welche nur zwey von den unbekannten Grössen noch enthält. Eine leicht zu übersehende Probe davon giebt die Auflösung der Aufgabe im 181. §.

184. §.

Aus zwey einfachen Gleichungen zwischen x und y eine unbekannte Grösse x wegzuschaffen.

1. Aufl. Man sehe die andre Grösse y als bekannt an, und suche aus jeder Gleichung den Werth von x nach dem 167. §. Man setze beyde Werthe einander gleich, so hat man eine bestimmte Gleichung, die nur y enthält. Aus den Gleichungen

$x + y = a$, und $fx + gy = b$ folge

$$x = a - y, \text{ und } x = \frac{b - gy}{f}$$

$$\text{Also wird } a - y = \frac{b - gy}{f}$$

oder $fa - fy = b - gy$

2. Aufl. Nachdem der Werth von x aus einer Gleichung gefolgert ist, kann man denselben auch anstatt x in die andre Gleichung setzen, ohne vorher diese letzte Gleichung zu verändern. So kann man im vorigen Exempel den Werth $x = a - y$ sogleich in die andre Gleichung $fx + gy = b$ setzen, und man erhält $f(a - y) + gy = b$, oder $fa - fy + gy = b$, welches $fa - fy = b - gy$, wie vorhin giebt.

Wenn die eine Gleichung verwickelter als die andre ist; so kann man mit Vortheil die letzte Art gebrauchen, wenn zuerst aus derjenigen Gleichung, welche am wenigsten verwickelt ist, der Werth von x gesucht wird.

3. Aufl. Man kann beyde Gleichungen allemahl so verändern, daß sie unter folgenden allgemeinen Ausdrücken begriffen sind

$$ax + by = c$$
$$fx + gy = h$$

wo a, b, c, f, g, h aus den bekannten Grössen, wie man will, zusammengesetzt seyn können. Will man nun x wegschaffen, so multiplicire man jede Gleichung mit dem Coefficienten, worin x in der andern Gleichung multiplicirt ist: auf die Art erhält man

$$afx + bfy = cf$$
$$afx + agy = ah.$$

Nun

Nun subtrahire man eine Gleichung von der andern, so wird

$$(bf - ag)y = cf - ah,$$

oder auch $(ag - bf)y = ah - cf$.

Wäre $by + ax = c$

$gy - fx = h$

so erhielte man

$$-bfy - afx = -cf$$
$$agy - afx = ah$$

und $(ag + bf)y = ah + cf$.

Wollte man im letzten Exempel die erste Gleichung nicht mit $-f$, sondern mit $+f$ multipliciren: so müste man die beyden neuen Gleichungen addiren um x wegzuschaffen.

185. §.

Aus mehr denn zwey einfachen Gleichungen zwischen eben so vielen unbekannten Grössen z, y, x, u. s. f., als man Gleichungen hat, alle übrige bis auf eine x wegzuschaffen.

Aufl. Man setze, es sind die drey Gleichungen

$$x + y = a,\ x + z = b,\ fx + gy = z,$$

zwischen den unbekannten Grössen x, y, z gegeben.

Aus den beyden ersten $x + y = a,\ x + z = b$, schaffe man nach dem vorigen §. die Grösse x weg; so erhält man $a - y = b - z$.

Aus einer der beyden ersten $x + z = b$, und der dritten $fx + gy = z$ schaffe man ebenfalls x weg:

so ergiebt sich $b - z = \frac{z - gy}{f}$.

Aus dieser Gleichung mit der vorigen $a - y = b - z$ verbunden, schaffe man y weg: so erhält man $a + z$

$-b = \frac{(f+1)z - bf}{g}$, oder $(a-b)g + gz = (f+1)z - bf$ und diese Gleichung enthält allein z.

Daß diese Methode sich auch auf mehr Gleichungen, so viel man will, erstrecke, fällt leicht in die Augen.

186. §.

Eine bestimmte Aufgabe aufzulösen.

Aufl. Man leite so viele Gleichungen als unbekannte Grössen z, y, x, u. s. f. gefunden werden sollen, aus den Bedingungen der Aufgabe her: wenn dieses nicht angehet, so ist es keine bestimmte Aufgabe.

Aus diesen Gleichungen schaffe man alle unbekannte Grössen bis auf eine z weg, und leite aus der letzten Gleichung den Werth der darin enthaltenen unbekannten Grösse z her, nach dem 167. §.

Unter den Gleichungen, die auf die letzte geleitet haben, werden solche seyn, die ausser z noch eine von den unbekannten Grössen x oder y enthalten: in dieser setze man den gefundenen Werth anstatt z, so erhält man x oder y nach den Regeln des 167. §.

Man gehe weiter zurück auf die Gleichungen, die ausser einer der beyden vorigen unbekannten Grössen, oder allen beyden noch die dritte enthalten, und verfahre wie vorhin: so erhält man den Werth der dritten. Es ist leicht zu übersehen, daß man auf solche Art noch weiter zurück gehen, und die Werthe aller unbekannten Grössen durch lauter bekannte ausdrücken könne.

Im 185. §. hatte man $x + y = a$, $x + z = b$, $fx + gy = z$, und nachdem x und y weggeschaffet waren, erhielte man

$(a-b)g$

$$(a-b)g+gz=(f+1)z-bf:$$

also wird $z=\frac{(a-b)g+bf}{f+1-g}$,

folglich $x=b-\frac{(a-b)g+bf}{f+1-g}=\frac{b-ag}{f+1-g}$;

Ferner wird $y=a-\frac{b-ag}{f+1-g}$,

oder $y=\frac{(f+1)a-b}{f+1-g}$.

Exempel. Man soll 3 Zahlen finden, wovon die erste um 73 vermehrt doppelt so viel als die Summe der übrigen ausmacht, die zweyte um 73 vermehrt soll dreymahl so viel, und die dritte um 73 vermehrt soll viermahl so viel als die übrigen ausmachen.

Die Fundamentalgleichungen sind 1) $x+73=2(y+z)$, 2) $y+73=3(x+z)$, 3) $z+73=4(x+y)$.

Aus n. 1. und 2. folgt

3) $2(y+z)-73=\frac{1}{3}(y+73)-z$

aus n. 1 und 3 aber

4) $2(y+z)-73=\frac{1}{4}(z+73)-y$. Ferner erhält man aus n. 3. $y=\frac{1}{5}(292-9z)$ und aus n. 4. wird $y=\frac{1}{11\frac{1}{2}}(365-7z)$; also ist $\frac{1}{5}(292-9z)=\frac{1}{11\frac{1}{2}}(365-7z)$, und daraus folgt $z=\frac{161}{7}=23$. Das giebt weiter $y=\frac{1}{5}(292-9\times 23)=17$, und $x=2(y+z)-73=7$.

187. §.

Bey dieser Auflösung mathematischer Aufgaben durch Gleichungen ist noch vorzüglich in Betrachtung

zu

zu ziehen, daß man gewöhnlich nicht allein wissen will, wie groß die gesuchte Grösse sey? sondern auch zugleich darauf mit Rücksicht nehme, ob sie einer andern entgegengesetzt oder nicht entgegengesetzt sey? Wenn bey Auflösung einer geometrischen Aufgabe das gesuchte eine grade Linie ist; so will man nicht allein ihre Grösse, sondern auch ihre Lage kennen. Diese letztere wird durch das Zeichen (+) oder (−) vor dem letzten Resultat nach Auflösung der Gleichung angezeiget, und es ergiebt sich aus der Art, wie man die Rechnung eingeleitet hat, allemahl, was das Zeichen (−) vor dem Ausdruck der gesuchten Grösse für eine Bedeutung habe. Bey Herleitung der Fundamentalgleichung nimmt man gewöhnlich die unbekannte Grösse als positiv an: wenn also nach gehöriger Rechnung das Zeichen (−) voran kommt, so zeigt es an, daß die Aufgabe eine solche Grösse verlange, welche derjenigen entgegengesetzt ist, die anfangs als die gesuchte ist angenommen worden. Eine einfache bestimmte Gleichung giebt jedesmahl einen bestimmten Werth der unbekannten Grösse, und dieser Werth ist nach Beschaffenheit der Umstände entweder positiv oder negativ.

188. §.

Die Aufgabe des 175. §. wird dieses völlig erläutern. Man suchte das Stück AD auf der Seite AC des Dreyecks ABC zwischen A und der lothrechten Linie BD. Man setzte voraus, daß der Durchschnittspunct D rechter Hand des Puncts A falle, und dieses gab für $AD = x$ den Ausdruck 181 Fig.

$$x = \tfrac{1}{2}b + \frac{(c+a)(c-a)}{2b},$$

oder

oder $x = AE + \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$, wenn AE $=$ $\frac{1}{2}b$ ist. Wenn nun $a > c$, oder BC $>$ AB ist; so wird $c-a$, also auch $\frac{(c+a)(c-a)}{2b}$ negativ, und $x = AE - \frac{(c+a)(a-c)}{2b}$: also muß man nun $ED = \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$ nicht nach der rech-

182 ten, sondern der linken Seite von E auftragen, wie
Fig. in der 182. F.

Wäre ferner auch $\frac{(a+c)(a-c)}{2b} > \frac{1}{2}b$ d. i. ED $>$ AE, so würde man $x = AE - ED$ negativ finden: der Punct D würde nemlich nun linker Hand

183 von A fallen, wie in der 183 F., und unter welchen
Fig. Umständen dieses erfolgen müsse, läßt sich so beurtheilen. Es muß $\frac{(a+c)(a-c)}{2b} > \frac{1}{2}b$ seyn, also $(a+c) \times (a-c) > bb$, d. i. $aa - cc > bb$, oder aa muß gröſſer als $bb+cc$, d. i. $BC^2 > AC^2 + AB^2$ seyn. Aber unter dieser Bedingung ist der Winkel BAC stumpf (112. §. G.): also folgt rückwärts, wenn BAC stumpf ist, daß AD nicht auf eben der Seite von A falle, dahin diese Linie fällt, wenn BAC spiß ist. Für BAC $=$ R ist $aa = bb + cc$, also $aa - cc = bb$, oder $(a+c)(a-c) = bb$, und $\frac{(a+c)(a-c)}{2b} = \frac{1}{2}b$. Dies giebt AD $= 0$, und daß dieses alles richtig sey, weiß man aus geometrischen Gründen.

189.

189. §.

Wenn der Unterschied positiver und negativer Grössen in Betrachtung kommt; so hat jedes positive Quadrat zwey unterschiedene Wurzeln, die zwar in Ansehung der Grösse einerley, einander aber entgegen gesetzt sind.

Beweis. Es ist $+a \times +a = +a^2$, also $+a = \sqrt{a^2}$, aber es ist auch $-a \times -a = a^2$, also auch $-a = \sqrt{a^2}$ (44. §.). Es sind nemlich nicht nur $+a$ und $+a$; sondern auch $-a$ und $-a$ gleiche Factoren, die das Product $+a^2$ herstellen (21. §.).

Eben dieses erhellet aus folgenden Gründen. Die Quadratwurzel wird hier als eine mittlere geometrische Proportionalgrösse betrachtet zwischen der Grösse, welche man für Eins annimmt, und derjenigen, welche die algebraische Quadratzahl vorstellet. (174. §.) Aber die Einheit wird allemahl positiv angenommen, und es ist nicht nur $+1 : +a = +a : +a^2$; sondern auch $+1 : -a = -a : +a^2$ (19. §): demnach giebt es zwischen $+1$ und $+a^2$ zwo einander entgegengesetzte mittlere geometrische Proportionalgrössen, d. i. $+a^2$ hat zwey entgegen gesetzte Quadratwurzeln.

190. §.

Wenn eine algebraische Formul solche Operationen bezeichnet, die mit einander nicht bestehen können, so drückt man das so aus: sie bezeichne eine unmögliche Grösse. Die algebraischen Zeichen selbst nennt man Kürze halber auch algebraische Grössen, so wie die bekannten Ziffern auch häufig Zahlen heissen, ob sie gleich nur Zahlzeichen sind. Darum kann ein solches Zeichen, welches eine oder mehr unmögliche

Operationen fodern würde, ebenfalls kurz eine Unmögliche Grösse heissen.

191. §.

Die Quadratwurzel aus einem negativen Quadrat ist eine unmögliche Grösse.

Beweis. Es kann $\sqrt{-a^2}$ weder eine positive, noch eine negative Grösse seyn. Wäre $\sqrt{-a^2} = +a$, so wäre $-a^2 = +a \times +a = +a^2$; und wenn $\sqrt{-a^2} = -a$ wäre, so müßte $-a^2 = -a \times -a = +a^2$ seyn, welches beydes dem 20. §. entgegen ist. Man kann auch nicht $\sqrt{-a^2} = 0$ setzen, es müßte denn $a^2 = 0$ seyn, welches hier aber gegen die Voraussetzung ist. Demnach ist es nicht möglich, aus $-a^2$ eine Quadratwurzel anzugeben, und der Ausdruck $\sqrt{-a^2}$ bezeichnet eine unmögliche Grösse. Eben dasselbe erhellet auch daraus, weil $\sqrt{-a^2}$ zwischen $+1$, und $-a^2$ die mittlere Proportionalgrösse seyn müßte. Aber sowol $+1 : +a = +a : -a^2$, als auch $+1 : -a = -a : -a^2$ sind falsche Proportionen (19. §.).

192. §.

Jede reine quadratische Gleichung giebt zweene Werthe für die unbekannte Grösse, die entweder beyde möglich, oder beyde unmöglich sind.

Beweis. Wenn das Quadrat der unbekannten Grösse von den bekannten Grössen nach den Regeln des 170. §. abgesondert ist; so läßt sich die Gleichung überhaupt so ausdrücken $x^2 = A$, wo A entweder positiv, oder negativ seyn wird.

Es sey zuerst $x^2 = +A$: so ist sowol $x = +\sqrt{A}$, als auch $x = -\sqrt{A}$ (189. §.), und beyde Werthe

sind

sind möglich. Die beyden letzten Gleichungen ziehet man der Kürze wegen in folgenden Ausdruck zusammen $x = \pm \sqrt{A}$.

Es sey $x^2 = -A$: so ist dies so viel, als $x^2 = +A \times -1$, also $x = \pm \sqrt{A} \times \sqrt{-1}$, wo $\pm \sqrt{A}$ die beyden möglichen Wurzeln von $+A$ sind, und $\sqrt{-1}$ ein unmöglicher Factor ist (191. §.). Also ist auch $x = \pm \sqrt{-A}$ (57. §.), oder x hat zwey unmögliche Werthe.

193. §.

Jede reine Gleichung, die zu einer graden Ordnung gehört, giebt entweder zwey einander entgegengesetzte für sich gleiche mögliche Werthe der unbekannten Grösse, oder gar keinen möglichen Werth.

Beweis. Man kann die Gleichung nach dem 170. §. auf diesen Ausdruck bringen $x^{2n} = A$, wo A entweder positiv, oder negativ ist. Es sey zuerst $x^{2n} = +A$, so kann nicht allein $x = +\sqrt[2n]{A}$, sondern auch $x = -\sqrt[2n]{A}$ seyn: denn es ist nicht allein $(+\sqrt[2n]{A})^{2n}$, sondern auch $(-\sqrt[2n]{A})^{2n} = +A$ (53. §. Zus.). Ist aber $x^{2n} = -A$, so ist dies so viel, als $x^{2n} = +A \times -1$, also wird $x = \pm \sqrt[2n]{A} \times \sqrt[2n]{-1}$, wo $\sqrt[2n]{-1}$ ein unmöglicher Factor ist. Denn wäre $\sqrt[2n]{-1} = R$, und R eine mögliche Grösse; so müßte auch $\sqrt[2]{-1} = R^n$ eine mögliche Grösse seyn, welches dem 191. §. entgegen ist: also sind beyde Werthe unmöglich.

194. §.

Jede reine Gleichung einer ungraden Ordnung giebt nur einen möglichen Werth der unbekannten Grösse, nicht mehrere.

Beweis. Eine solche Gleichung läßt sich so ausdrücken $x^{2n+1} = A$, und A ist entweder positiv, oder negativ. Aus $x^{2n+1} = +A$ folgt $x = +\sqrt[2n+1]{A}$, und aus $x^{2n+1} = -A$ folgt $x = -\sqrt[2n+1]{A}$ (53. §. Zus.).

195. §.

Im natürlichen und jedem andern Logarithmen-System welches von jenem nach einem beständigen Modulus ($1 : l.\ nat.\ b$) abhängt, wenn b die Grundzahl desselben ist, giebt es keine mögliche Logarithmen für negative Zahlen.

Beweis. Es bezeichne l den natürlichen Logarithmen, und man nehme an, es sey $l(+a) : l(-a) = 1 : \lambda$, so ist $l(-a) = \lambda . l(+a)$., mithin $l(-a) = l(+a)^{\lambda}$. (139 §. 1. 2. Zus.), und daraus folgt $-a = (+a)^{\lambda}$. (134. §.). Es giebt aber keine Zahl, die man anstatt λ setzen könnte, damit dieser Gleichung ein Genüge geleistet werde: also bezeichnet λ eine unmögliche Zahl: folglich ist auch $l(-a) = \lambda . l(+a)$ unmöglich, weil im natürlichen System $l(+a)$ allemahl möglich ist, was auch für eine positive Zahl anstatt $+a$ gesetzt werden mag. Ferner hat man in jedem andern System, dessen Grundzahl ebenfalls eine positive Zahl b seyn soll, l. art. $(-a)$

=

$= \frac{1}{\text{l. nat. } b}$ l. nat. $(-a)$, (147. §.) mithin ist auch l. art. $(-a)$ unmöglich.

196. §.

Eine Gleichung, worin die unbekannte Grösse unter einem Wurzelzeichen stehet; so zu verändern, daß die unbekannte Grösse unter keinem Wurzelzeichen bleibe.

Aufl. Wenn nur ein Wurzelzeichen vorkommt; so bringe man die Grösse mit dem Wurzelzeichen auf eine Seite des Gleichheitszeichens allein, und die übrigen Theile der Gleichung auf die andere Seite. Ferner erhebe man die an jeder Seite des Gleichheitszeichens nun befindliche Grösse auf eine Potenz, deren Exponent dem Wurzel-Exponenten gleich ist, so fällt das Wurzelzeichen weg. Hätte man die Gleichung $z + \sqrt{(bb + xx)} = fx + g$, so wird $\sqrt{(bb + xx)} = fx + g - a$, und $bb + xx = ffxx + 2fgx - 2fax + (g - a^2)$.

1. Zusatz. Vermittelst einer solchen Verwandelung der Gleichung kann man nicht mehr als ein Wurzelzeichen auf einmal wegschaffen. Wenn sie demnach mehr als ein Wurzelzeichen enthält; so muß man dieselbe Methode wiederholen, damit ein Wurzelzeichen nach dem andern weggeschaffet werde.

2. Zusatz. Wenn in der Fundamental-Gleichung einer Aufgabe die unbekannte Grösse unter einem oder mehrern Wurzelzeichen stehet; so muß man diese Wurzelzeichen vor allen Dingen zuerst wegschaffen, damit man beurtheilen könne, zu welcher Ordnung die Gleichung gehöre. Eben dasselbe wird auch durch die Redensart ausgedrückt: man müsse die

Gleichung auf eine völlig rationale Form bringen.

3. Zusatz. In einer völlig rational gemachten Gleichung kann man ferner alle Theile, welche die unbekannte Grösse enthalten, auf eine Seite, das völlig bekannte aber auf die andre Seite des Gleichheitszeichens bringen. Ordnet man hiernächst alles nach den Potenzen der unbekannten Grösse, und dividirt nun die ganze Gleichung mit dem Coefficienten der höchsten Potenz; so erhält sie die nachstehende allgemeine Form $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots\ldots + Hx = K$, die man auch so ausdrücken kann $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + Cx^{n-3} + \ldots + Hx + K = 0$. Ob unter den Coefficienten vielleicht einige anstatt + das Zeichen − erhalten müssen, ergiebt sich in jedem Falle von selbst.

197. §.

Eine völlig rational gemachte unreine quadratische Gleichung aufzulösen.

Aufl. 1. Aus der Gleichung $bb + xx = ffxx + 2fgx - 2afx + (g-a)^2$ (196. §.) erhält man $ffxx + 2fgx - 2afx - xx = bb - (g-a)^2$ (196. §. 3. Zusatz.) und wenn man sie gehörig nach den Potenzen von x ordnet, so wird

$$(ff-1)\,xx + (2fg - 2af)\,x = bb - (g-a)^2.$$

Die fernere Division mit dem Coefficienten von xx giebt

$$xx + \frac{2f(g-a)}{ff-1}\,x = \frac{bb-(g-a)^2}{ff-1},$$ und

wenn man $\frac{2f(g-a)}{ff-1} = P$, die völlig bekannte

 Grö

Grösse $\frac{bb-(g-a)^2}{ff-1}-=Q$ setzt; so erhält die Gleichung die allgemeine Form $xx+Px=Q$.

2. Nach dieser Vorbereitung addire man das Quadrat des halben Coefficienten von x auf beyden Seiten nemlich $\frac{1}{4}PP$: so wird

$$xx+Px+\tfrac{1}{4}PP=Q+\tfrac{1}{4}PP.$$

Weil nun $xx+Px+\frac{1}{4}PP=(x+\frac{1}{2}P)^2$ ist, so hat man auch $(x+\frac{1}{2}P)^2=Q+\frac{1}{4}PP$, und die Gleichung ist dadurch auf die Form einer reinen quadratischen Gleichung gebracht, woraus $x+\frac{1}{2}P=\pm\sqrt{}$ $(Q+\frac{1}{4}PP)$ folgt, (192. §.) mithin ferner

$$x=-\tfrac{1}{2}P\pm\sqrt{(Q+\tfrac{1}{4}PP)}.$$

3. Nun kann man die obigen Werthe von P und Q wieder herstellen, so erhält man

$$x=\frac{f(a-g)}{ff-1}\pm\sqrt{\left(\frac{bb-(g-a)^2}{ff-1}+\frac{ff(g-a)^2}{(ff-1)^2}\right)}.$$

Was unter dem Wurzelzeichen stehet, läß sich auch so ausdrücken $\frac{(ff-1)bb+(g-a)^2}{(ff-1)^2}$, also findet man auch $x=\frac{f(a-g)\pm\sqrt{((ff-1)b^2+(g-a)^2)}}{ff-1}$.

1. Zusatz. Wenn die Frage wäre, wie groß die Wurzel aus einer Quadratzahl sey, wenn diese von der achtfachen Wurzel abgezogen 15 zum Rest lässet; so hätte man $8x-x^2=15$, also auch $x^2-8x=-15$, und $x^2-8x+16=1$. Demnach ist $x-4=\pm 1$, und $x=4\pm 1$. Sollte aber die Wurzel von der Quadratzahl abgezogen 20 zum Rest lassen, so wäre $x^2-x=20$, also $x^2-x+\frac{1}{4}=\frac{81}{4}$, mithin $x-\frac{1}{2}=\pm\frac{9}{2}$, und $x=\frac{1}{2}\pm\frac{9}{2}$.

In jenem Exempel leisten zwey positive Zahlen 5 und 3, in diesem eine positive 5 und eine negative — 4 der Gleichung ein Genüge.

2. Zusatz. Wenn gleich in diesen besonders ausgesuchten Exempeln die beyden Werthe der gesuchten Grösse in rationalen Zahlen angegeben werden könnten, so siehet man doch wohl, daß solches nicht allemahl angehen werde, sondern nur alsdenn, wenn in der allgemeinen Formul $Q + \frac{1}{4}P^2$ eine vollkommene Quadratzahl ist: in andern Fällen sind beyde so gefundene Werthe der gesuchten Zahl irrational.

3. Zusatz. Beyde Werthe können in besondern Fällen auch gleich groß ausfallen. Aus der Gleichung $x^2 - 12x = -36$ folgt $x^2 - 12x + 36 = 0$, also ferner $x - 6 = \pm 0$, und $x = 6 \pm 0$.

198. §.

Die Werthe der unbekannten Grösse in den reinen höhern Gleichungen werden durch Ausziehung der Wurzeln gefunden (193. 194. §.) und diese Werthe lassen sich selten anders, als durch Wurzelgrössen ausdrücken. Auch die Werthe der unbekannten Grösse, welche aus einer unreinen quadratischen Gleichung gefunden werden, lassen sich nur in einigen besondern Fällen ohne Wurzelzeichen ausdrücken, man kann zum voraus vermuthen, daß es mit den übrigen höhern Gleichungen eben die Bewandniß haben werde. Das ist die Ursache, weswegen die Werthe der unbekannten Grösse, welche man aus einer höhern Gleichung eigentlich sucht, die Wurzeln dieser Gleichung genannt werden.

199. §.

Jede unreine quadratische Gleichung $xx + Px = Q$ hat wenigstens zwey Wurzeln, nemlich

lich $x = -\frac{1}{2}P + \sqrt{(Q + \frac{1}{4}PP)}$ und $x = -\frac{1}{2}P - \sqrt{(Q + \frac{1}{4}PP)}$, die beyde ungleich groß sind: mehrere aber nicht.

Beweis. Wären α, β, Wurzeln dieser Gleichung, und überdem γ eine dritte von den vorigen verschiedene Wurzel; so müßten diese drey Gleichungen richtig seyn

$$\alpha\alpha + P\alpha = Q$$
$$\beta\beta + P\beta = Q$$
$$\gamma\gamma + P\gamma = Q.$$

Aus den beyden ersten folgt $\alpha\alpha + P\alpha = \beta\beta + P\beta$, und aus den beyden letzten $\beta\beta + P\beta = \gamma\gamma + P\gamma$. Jene Gleichung giebt $(\alpha - \beta)P = \beta\beta - \alpha\alpha$, und

$$P = -\frac{\alpha\alpha - \beta\beta}{\alpha - \beta} = -(\alpha + \beta);$$ diese giebt

$(\beta - \gamma)P = \gamma\gamma - \beta\beta$ und $P = -\frac{\beta\beta - \gamma\gamma}{\beta - \gamma}$

$= -(\beta + \gamma)$: also wäre $\alpha + \beta = \beta + \gamma$, und $\alpha = \gamma$, welches der Voraussetzung entgegen ist.

200. §.

Die Wurzeln einer unreinen quadratischen Gleichung sind entweder beyde zugleich möglich, oder beyde zugleich unmöglich: es kann nicht die eine allein möglich, die andre unmöglich seyn.

Beweis. Die Wurzeln einer solchen Gleichung sind beyde möglich, wenn $Q + \frac{1}{4}PP$ eine positive Grösse, also Q entweder selbst positiv, oder doch kleiner, als $\frac{1}{4}PP$ ist: denn $\frac{1}{4}PP$ ist allemahl positiv, wenn gleich P negativ wäre. Beyde Wurzeln sind aber unmöglich, wenn Q negativ und grösser ist als $\frac{1}{4}PP$. Wäre Q

negativ, und $-Q+\frac{1}{4}PP=0$, so wären beyde Wurzeln gleich groß: aber das giebt $\frac{1}{4}PP=Q$ und die Gleichung wäre $xx+Px=-\frac{1}{4}PP$, also $xx+Px+\frac{1}{4}PP=0$. Daraus folgt nicht allein $x+\frac{1}{2}P=0$, sondern auch $-x-\frac{1}{2}P=0$, und beydes giebt $x=-\frac{1}{2}P$: mithin sind die Wurzeln auch in diesem Falle beyde zugleich möglich.

201. §.

In jeder unreinen quadratischen Gleichung $xx+Px=Q$ ist der Coefficient des zweyten Gliedes P die negative Summe, und das dritte völlig bekannte Glied Q das negative Product beyder Wurzeln.

Beweis. Es sey $\alpha=-\frac{1}{2}P+\sqrt{(Q+\frac{1}{4}PP)}$ und $\beta=-\frac{1}{2}P-\sqrt{(Q+\frac{1}{2}PP)}$: so sind α und β die beyden Wurzeln der Gleichung (199. §.). Aber es ist $\alpha+\beta=-P$; also $P=-(\alpha+\beta)$. Ferner findet man $\alpha\beta=\frac{1}{4}PP-Q-\frac{1}{4}PP=-Q$, also $Q=-\alpha\beta$.

Zusatz. Will man der Gleichung $x^2+Px=Q$ nach dem 196. §. 3. Zusatz die Form geben $x^2+Px-Q=0$, so ist das dritte völlig bekannte Glied einerley mit dem Product beyder Wurzeln ohne Veränderung des Zeichens. Wenn übrigens von der Gleichung unter ihrer allgemeinsten Form die Rede ist; so kann man $x^2+Px+Q=0$ dafür annehmen, weil es sich jedesmahl von selbst ergiebt, welches Zeichen den Grössen P und Q vorangesetzt werden müsse.

202. §.

Wenn man alle Glieder der quadratischen Gleichung auf eine Seite des Gleichheitszeichens

chens bringt, und die Gleichung so ausdrückt $xx + Px + Q = 0$: so ist sie ein Product zweener Factoren, wovon jeder $= 0$ gesetzt eine einfache Gleichung giebt, die eine Wurzel der quadratischen bestimmt.

Beweis. Wenn α und β die Wurzeln sind, so ist $P = -(\alpha + \beta)$ und $Q = \alpha\beta$, (201. §. Zus.) also $xx + Px + Q = xx - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$. Vermittelst der Multiplication findet man ebenfalls $(x - \alpha)(x - \beta) = xx - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta$, folglich ist auch $(x - \alpha)(x + \beta) = xx + Px + Q = 0$. Wird nun $x = \alpha = 0$, und $x - \beta = 0$ gesetzt, so erhält man aus der ersten Gleichung $x = \alpha$, aus der zweyten $x = \beta$.

203. §.

Einem Product, wenn die Factoren Linien vorstellen, schreibt man so viele Abmessungen zu, als es Factoren hat: sind es aber Zahlen, so hat das Product keine Abmessungen, und wenn die Factoren zum Theil Zahlen, zum Theil Linien sind, so zählt man nur so viele Abmessungen des Products als Linien unter den Factoren sind. Eine Potenz hat demnach so viele Abmessungen, als der Exponent anzeigt, wenn die Wurzel eine Linie ist, und ein Product wie $27abx^3$ hat 5 Abmessungen.

1. Zusatz. Wenn die Wurzeln α, β, einer quadratischen Gleichung Linien sind, so haben alle Glieder der Gleichung $x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = 0$ gleichviele, nemlich zwey Abmessungen. Wenn eine von diesen Linien für Eins angenommen wird, wie wenn man $\alpha = 1$ setzte; so scheint es, daß nicht alle Glieder gleichviele Abmessungen behalten, weil man $x^2 - (1 + \beta)x + \beta = 0$ erhält: allein Producte, wie

wie $1 . x$, $1 . \beta$, haben auch zwey Abmessungen, wenn 1. eine Linie ist. Es ist nun eben so viel, als wenn man die ganze Gleichung mit α dividirt, und $\frac{x}{\alpha} . x - \frac{\alpha + \beta}{\alpha} . x + \frac{\beta}{\alpha} . \alpha = 0$ erhalten hätte. Wenn überhaupt u die Linie vorstellet, welche man für Eins nimmt, um α, β, x zu messen, oder als Zahlen auszudrücken; so kann man die ganze Gleichung mit u^2 dividiren, und man erhält $\frac{x^2}{u^2} - \frac{\alpha + \beta}{u} . \frac{x}{u} + \frac{\alpha . \beta}{u . u} = 0$. Schreibt man nun z anstatt $\frac{x}{u}$, so ist $z^2 - \frac{\alpha + \beta}{u} . z + \frac{\alpha . \beta}{u . u} = 0$, und alle Glieder der Gleichung sind nun Zahlen; auch wenn man die Gleichung nach Anleitung des 197. §. auflöset, so sind die gesuchten Werthe von z Zahlen, welche das Verhältniß der gesuchten Werthe x gegen die für Eins angenommene Linie u angeben.

2. Zusatz. Aus diesen Schlüssen erhellet, was es mit dem so genannten Gesetze der Homogeneität für eine Bewandniß habe, welches bey algebraischen Gleichungen zu beobachten ist. Wenn die Gleichung einfach ist, so ist ihre allgemeine Form $ax = b$. Wenn nun x eine Linie ist, die aus den Linien a und b gefunden werden soll, so scheint es, daß $x = \frac{b}{a}$ eine solche Linie nicht anzeige, weil $\frac{b}{a}$ eine Zahl

ist

ist. Man weiß aber, daß $\frac{b}{a}$ eine Linie sey, wenn der Divisor $a : 1$, oder $a : u$ ist, u für Eins angenommen: (174. §.) also ist die Gleichung eigentlich diese $\frac{a}{u}x = b$, oder $ax = bu$, und die beyden Theile der Gleichung haben zwey Abmessungen. Sie können aber auch weit mehrere haben; wie wenn $a = \frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} \cdot c$ wäre: das würde $\frac{e}{f} \cdot \frac{g}{h} \cdot \frac{c}{u} x = b$, oder $e \cdot g \cdot c \cdot x = b \cdot f \cdot h \cdot u$ geben. Indessen bleibt die Zahl der Abmessungen auf beyden Seiten gleich.

3. Zusatz. Die quadratische Gleichung ist ein Product zweyer Factoren, wie $x - \alpha = 0$, $x - \beta = 0$, wenn nun x, α, β, eine Abmessung haben, so ergeben die Multiplicationsregeln, daß alle Theile des Products zwey Abmessungen erhalten. In der allgemeinen Form der quadratischen Gleichung $x^2 + Px + Q = 0$ hat P eine und Q zwey Dimensionen, wenn x eine Linie ist, die aus andern gegebenen Linien gefunden werden soll. Weil indessen auch P und Q unter der Form $\frac{a}{b} \cdot \frac{e}{d} \cdot e$, $\frac{f}{g} \cdot \frac{h}{i} \cdot k^2$ vorkommen können, so hätte man $x^2 + \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} \cdot ex + \frac{f}{g} \cdot \frac{h}{i} k^2 = 0$, also auch $b \cdot d \cdot g \cdot i \cdot x^2 + a \cdot c \cdot g \cdot i \cdot ex + b \cdot d \cdot f \cdot h \cdot k^2 = 0$, wo die Zahl der Abmessungen wiederum in allen Gliedern gleich ist.

4. Zu-

4. Zusatz. Die Quadratwurzel aus einem Product hat nur halb so viele Dimensionen als das Product hatte, und die Zahl der Dimensionen einer Cubicwurzel aus einem Product ist dreymahl kleiner, als die Zahl der Dimensionen des Products, auch hat es mit Wurzeln höherer Ordnungen aus solchen Producten eine ähnliche Bewandniß. Diesen Gründen gemäß beurtheilet man leicht in jedem vorkommenden Falle, wie man die Dimensionen einer Gleichung zählen müsse. Es scheint, daß nicht alle Glieder der Gleichung $(ff-1)xx+2f(g-a)x=bb-(g-a)^2$ (197. §.) gleich viele Abmessungen haben: wenn aber f eine Zahl vorstellet, so sind alle Abmessungen gleich, und beyde Wurzeln sind Linien, wenn a, b, g, Linien vorstellen. Wäre auch f eine Linie, so könnte $ff-1^2$ ein Product von zwey Abmessungen vorstellen: alsdenn würden die Coefficienten der Gleichung $xx+\frac{2f(g-a)}{ff-1^2}=\frac{bb-(g-a)^2}{ff-1^2}$ Zahlen vorstellen, auch würde man beyde Wurzeln $x=\frac{f(a-g)\pm\sqrt{((ff-1^2)b^2+(g-a)^2.1^2)}}{ff-1^2}$ in Zahlen finden.

5. Zusatz. Alle hier beygebrachte Bemerkungen für solche Fälle, wenn x eine Linie vorstellet, gelten auch, wenn x einen Winkel, eine Fläche, einen Körper, ein Gewicht, oder was man sonst will, vorstellet, nur verstehet es sich von selbst, daß dasjenige, was man für Eins annimmt, damit gleichartig seyn müsse. Unter den Coefficienten können ebenfalls Buchstaben vorkommen, die Winkel, Flächen, Körper, oder was man sonst will, vorstellen:

wenn

wenn aber die Rechnung gehörig eingeleitet ist, und etwa $abc : x = e . f . gh$, oder $abc . x^2 + efghx = pqrst$ gefunden würde; so ist die eigentliche Form der Gleichungen $x = \frac{efg}{abc} . h$, $x^2 + \frac{efg}{abc} hx = \frac{pqr}{abc} st$. Alsdenn sind $\frac{e}{a}, \frac{f}{b}, \frac{g}{c}, \frac{p}{a}, \frac{q}{b}, \frac{r}{c}$, Zahlen, auch sind Zähler und Nenner eines jeden dieser Brüche in solchen Fällen gleichartige Grössen.

204. §.

Wenn unbestimmte arithmetische Aufgaben auf höhere Gleichungen leiten, und wenn alsdenn verlangt wird, daß die gesuchten Werthe wenigstens in rationalen Zahlen, auch wohl wenn es seyn kann, in ganzen Zahlen angegeben werden sollen; so sind ähnliche Arten zu schliessen nöthig, wie sie oben unter dem Nahmen der Regel Coeci im XVI. Abschnitt der Rechenkunst sind vorgetragen worden. Mit der unbestimmten Fundamentalgleichung der Aufgabe verbindet man noch eine oder wenn es nöthig ist mehrere andre Gleichungen, wodurch neue Zahlen mit in Rechnung gebracht werden, wovon man weiß, daß es ganze Zahlen seyn, oder daß sie vielleicht auch sonst noch mit andern Eigenschaften versehen seyn müssen, um den Bedingungen der Aufgabe ein Genüge zu leisten. Unter den ältern Schriftstellern hat sich vornemlich **Diophantus** von Alexandrien mit der Auflösung hieher gehöriger Aufgaben beschäftiget: daher hat auch die Methode, wie man die Rechnung einleiten muß, damit die Auflösung in ganzen oder we-

nig-

nigstens in rationalen Zahlen gefunden werde, den Nahmen Diophantische Analytic erhalten. Diophantus hat 13 Bücher von arithmetischen Aufgaben geschrieben, es sind aber nur die sechs ersten noch vorhanden. Eine Ausgabe seiner Werke, welche für die beste gehalten wird, hat den Titel: Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex, et de numeris multangulis liber unus, cum commentariis C. G. Bacheti V. C. et observationibus D. P. de Fermat Senatoris Tolosari, Tolosae 1670. Für den jetzigen Zustand der Wissenschaft hat die Auflösung solcher Aufgaben in Zahlen eben keinen erheblichen Nutzen: die Kunstgriffe aber, welche sich dabey anwenden lassen, sind in andrer Absicht merkwürdig, weil man sie allgemeiner auch auf algebraische Formuln, die eine oder mehr Wurzelgrössen enthalten anwenden kann, um ihnen eine solche Form zu geben, die kein Wurzelzeichen mehr enthält. Algebraisch irrationale Formuln sind nemlich solche, die Wurzelgrössen enthalten, und man giebt ihnen eine algebraisch rationale Form, wenn man sie so verändert, daß die verlangte Wurzel angegeben werden kann, ohne daß es nöthig bleibt, das Wurzelzeichen beyzubehalten.

1. Zusatz. Wenn man eine Zahl in zwey andre Zahlen so theilen sollte, daß entweder jeder Theil eine vollkommene Quadratzahl würde, oder auch der eine davon ein Product aus einer Quadratzahl mit einer ganzen Zahl; so würde man die Gleichung $xx + cyy = A$ erhalten. Wenn nun auch A eine vollkommene Quadratzahl ist, so sollen nicht allein x und y, sondern auch $\surd(xx + cyy) = \surd A$ rationale ganze

Zah-

Zahlen seyn. Man setze $\sqrt{(xx+cyy)} = x + \frac{p}{q}.y$, so muß, wenn auf beyden Seiten quadrirt wird, xx wegfallen: es wird nemlich $cyy = \frac{2pxy}{q} + \frac{pp}{qq}yy$, und nun kann auch mit y dividirt werden, welches zwischen x und y eine einfache Gleichung giebt. Daraus folgt alsdenn $qqcy = 2pqx + ppy$, oder $(cqq - pp)y = 2pqx$, mithin $\frac{x}{y} = \frac{cqq-pp}{2pq}$. Hätten nun x und y oder auch vielleicht p und q ein gemeines Maaß, so könnte man damit dividiren, da dann x und y, so wie auch p und q unter sich Primzahlen werden: also muß nun 1) $x = cqq - pp$, und 2) $y = 2pq$ seyn, (91. §. Rechenk.) woraus 3) $(cqq+pp)^2 = A$ gefunden wird.

2. Zusatz. Wenn $c = 1$ ist, so folgt daraus die Auflösung der besondern Aufgabe, wie man eine vollkommene Quadratzahl oder auch die Summe zweyer solcher Quadratzahlen in zwey andre theilen könne. Weil nun im ersten Fall A eine vollkommene Quadratzahl ist, so sey $\sqrt{A} = a$, oder $qq + pp = a$: alsdenn ist $qq = a - pp$, und daraus erhellet, daß $p < \sqrt{a}$ bleiben müsse. Wäre also $aa = 25$ gegeben, so müßte $p < 5$ bleiben. Nimmt man nun $p = 1$, so wird $q = 2$, mithin $y = 4$ und $x = 3$. Für $p = 2$ würde $q = 1$, also wieder $y = 4$, und $x = -3$ werden, welches von der vorigen Auflösung nicht verschieden ist, weil jedes Quadrat zwey gleiche entgegengesetzte Wurzeln hat. Uebrigens kann auch c eine negative Zahl seyn. Wäre $c = -1$, so würde man finden, was man anstatt x und y für

Zahlen nehmen müsse, damit ihre arithmetische Differenz eine Quadratzahl werde.

3. Zusatz. Wenn A eine Summe zweyer Quadratzahlen ist, so setze man $xx + yy = ff + gg$, da dann $y < g$ werden muß, wenn $x > f$ ist. Man setze ferner $x = f + pz$ und $y = g - qz$, so fallen wiederum ff und gg aus der Rechnung weg, denn man erhält $2fpz + ppzz - 2gqz + qqzz = 0$, und man kann auch mit z alles dividiren, da dann ferner

$$(pp + qq)z = 2(gq - fp), \text{ mithin } z = \frac{2(gq - fp)}{pp + qq}$$

gefunden wird. Wenn nun p und q so angenommen werden können, daß z eine ganze Zahl wird, so erhält man auch für x und y ganze Zahlen, im entgegengesetzten Fall doch wenigstens rationale Brüche.

Anmerkung. Man kann ähnliche Untersuchungen darüber anstellen, unter welchen Bedingungen eine Zahl von der Form $xx + cyy$, oder noch allgemeiner $axx + cyy$ eine Cubiczahl, auch vielleicht eine Biquadratzahl werden könne. Ueber diese und mehr andre ähnliche Aufgaben findet man umständliche Untersuchungen in des H. Leonh. Eulers vollständigen Anleitung zur Algebra, St. Petersb. 1771. im II. Theil 2. Abschnitt, im 3. u. f. Cap. 168 u. f. S.

205. §.

Geometrische Aufgaben können eben so wie arithmetische unbestimmt seyn, so daß eine Gleichung, welche aus den Bedingungen der Aufgabe gefolgert wird, allein nicht hinlänglich ist, das gesuchte bestimmt anzugeben: die geometrische Verzeichnung kann in solchen Fällen das gesuchte ebenfalls nicht völlig bestimmt anzeigen.

1. Wenn über der graden Linie AB als Grund- 219 F.
linie ein gradlinichtes Dreyeck verzeichnet werden, litt. b
und die Fläche desselben so groß seyn soll, als die Flä-
che eines Quadrats, dessen Seitenlinie b gegeben ist;
so weiß man zwar, wie groß die Höhe des Dreyeckes
werden muß: allein wenn die Frage wäre, wo die
Spitze des der Grundlinie AB gegenüber stehenden
Winkels ihre Stelle erhalten müsse, so liesse sich das
nicht bestimmt angeben. Wird $AB = a$, die Höhe
des Dreyeckes $= y$ gesetzt, so wird erfodert, daß
$\frac{1}{2}ay = bb$ sey, also $y = \frac{2bb}{a}$. Nun kann man
aus jedem Punct H der Grundlinie $HC = \frac{2bb}{a}$
senkrecht aufrichten, und C wird die Spitze eines
Dreyeckes seyn, das der Aufgabe ein Genüge leistet:
man weiß nur, daß C in einer graden Linie liegen
müsse, die mit AB in der Entfernung $\frac{2bb}{a}$ paral-
lel läuft.

2. Würde dagegen verlangt, daß man über AB
als Hypothenuse ein rechtwinklichtes Dreyeck verzeich-
nen solle; so weiß man, daß die Höhe CH zwischen
den beyden Segmenten AH und BH der Hypothe-
nuse eine mittlere geometrische Proportionallinie seyn
müsse. (214. §. Geom.) Wird also $AH = x$, CH
$= y$ gesetzt, so ist $BH = a - x$, und $yy = ax - xx$
wird eine unbestimmte Gleichung. Auch auf die
Frage, wo die Spitze C ihre Stelle erhalten werde?
kann man nur antworten, daß sie in dem Halbkreise
ACDB liegen müsse, wozu AB als Durchmesser
gehört.

177 Zusatz. Der Ort eines Puncts, wenn derselbe
Fig. bestimmt angegeben werden kann, ist selbst ein Punct, und wenn schon bekannt ist, daß derselbe in einer gewissen graden Linie GE liegt, so ist die Stelle eines solchen Puncts wie B völlig bestimmt, so bald man die Entfernung desselben von einem bekannten Punct A in derselben graden Linie kennet: nur muß man noch wissen, an welcher Seite von A man ihn suchen solle, welches wie bekannt ist, bey algebraischen Rechnungen vermittelst der Zeichen + oder − angezeigt wird. Liegt der Punct M nicht in DE, aber doch mit DE in einerley Ebene, und man weiß, wie weit M von DE entfernt sey, so ist der Ort desselben zwar nicht völlig bestimmt, man weiß aber doch, daß er in einer graden Linie liege, die mit DE in dieser Entfernung entweder an der einen, oder an der andern Seite parallel läuft. Wüßte man nur, daß M in der Ebeue MDE liege, und von dem Punct A um eine bekannte Distanz AM entfernt sey; so ist der Ort wo man ihn suchen muß, eine mit dem Halbmesser AM um A als Mittelpunct beschriebene Kreislinie. Weiß man nur, wie weit ein Punct von einer bekannten Ebene entfernt sey, so kann man ihn überall in der Ebene suchen, die mit jener in der bekannten Entfernung parallel liegt. Weiß man wie weit er von dem bekannten Punct A entfernt sey, und nicht mehr; so ist sein Ort nicht weiter bestimmt, als daß man ihn in der Kugelfläche suchen muß, wozu A als Mittelpunct und AM als Halbmesser gehört.

206. §.

Jede grade oder krumme in einer Ebene verzeichnete Linie kann als der noch unbestimmte Ort e
ne

nes Puncts angesehen werden, wenn man schon weiß, daß derselbe in dieser Linie seine Stelle habe: daraus erklärt sich der Sprachgebrauch vornemlich älterer Schriftsteller, wenn sie von geometrischen Oertern reden. Ob nun gleich der noch unbestimmte Ort eines Puncts auch eine Fläche seyn kann, so wird doch gewöhnlich eine solche in einer Ebene verzeichnete Linie verstanden, weil man voraussetzt, daß man schon wisse, in welcher Ebene der Punct liege. Die grade Linie und die Kreislinie nannte man sonst ebene Oerter: (loca plana) einige andre krumme Linien, wovon die höhere Geometrie mehr Unterricht giebt, besonders die Durchschnittslinien einer Ebene mit einer Kegelfläche, wenn jene mit der Grundfläche des Kegels nicht parallel ist, nannte man körperliche Oerter. (loca solida)

1. Zusatz. Wenn in einer Ebene zwey verschiedene Linien als unbestimmte Oerter eines Puncts bekannt sind; so wird der Ort desselben dadurch in soweit wenigstens völlig bestimmt, daß es entweder nur einen, oder doch nur einige wenige Puncte von bestimmter Anzahl geben kann, wo der Punct sich befinden muß: denn man kann ihn nun an solchen Stellen nur suchen, wo beyde Linien einander schneiden. Wenn beyde Linien grade sind, so giebt es nur einen einzigen Durchschnittspunct, und der Ort desselben ist aufs vollkommenste bestimmt.

2. Zusatz. Wenn bey Auflösung der Aufgabe im 205. §. beyde Bedingungen zugleich erfüllet werden sollen; wenn man nemlich über der gegebenen graden Linie AB als Hypothenuse ein rechtwinklichtes Dreyeck verzeichnen soll, dessen Fläche so groß ist, als die Fläche eines Quadrats, wozu die Seitenlinie 219 F. litt. b

b gehört; so muß die Spitze C des Dreyeckes beydes zugleich in der graden Linie DE liegen, die mit AB in der Entfernung $\frac{2bb}{a}$ parallel läuft, und in der Kreislinie, die zum Durchmesser AB gehört. Weil es nun für beyde Linien nicht mehr als zwey Durchschnittspuncte C und D geben kann, so muß entweder C oder D der Ort der Spitze des Dreyeckes seyn.

3. Zusatz. Beyde Gleichungen $y = \frac{2bb}{a}$, und $yy = ax - xx$ (205. §. n. 1. 2.) bestimmen den Ort der Spitze eben so. Man setze den Werth $y = \frac{2bb}{a}$ in die zweyte Gleichung, so erhält man $\frac{4b^4}{a^2} = ax - xx$, also auch $xx - ax = -\frac{4b^4}{a^2}$, und man findet $x = \frac{1}{2}a \pm \sqrt{\left(\frac{1}{4}a^2 - \frac{4b^4}{a^2}\right)}$. Wenn man also AE $= \frac{1}{2}a = r$ setzet, so hat man $x = r \pm \frac{\sqrt{(r^4 - b^4}}{r}$, mithin sind AH und AK beyde Wurzeln der Gleichung $xx - ax = -\frac{4b^4}{a^2}$, oder $xx - 2rx = -\frac{b^4}{r^2}$. Aus der Gleichung folgt, daß beyde Wurzeln unmöglich seyn würden, wenn $\frac{bb}{r} > r$, oder $b > r$ wäre, und eben das erhellet aus der Natur der Sache. Wenn nemlich EL auf AB

AB senkrecht ist, so wird ALB das größte unter den Dreyecken über AB die ihre Spitze in dem Halbkreise haben können, und dessen Fläche ist $= r^2$. Wird also $b > r$ vorgeschrieben, so ist es unmöglich, der Aufgabe ein Genüge zu leisten. In dem Fall $b = r$, werden beyde Werthe $x = r$, und zugleich $y = r$, wie erfodert wird.

4. Zusatz. Diese Schlüsse ergeben, daß man die Wurzeln einer quadratischen Gleichung auch als grade Linien durch Zeichnung darstellen könne, wenn die Coefficienten durch Linien gegeben sind. Man kann jede quadratische Gleichung $x^2 - Px + Q = o$ so ansehen, als wenn sie mit der Gleichung $xx - 2rx + \frac{b^4}{r^2} = o$ einerley wäre, oder $xx - 2rx + cc = o$, wenn $\frac{bb}{r} = c$ angenommen wird, da dann c die Entfernung ist, in welcher DE mit AB parallel gezogen werden muß. Diese Voraussetzung erfodert, daß $2r = P$, und $Q = cc$ sey, also $r = \frac{1}{2}P$, und $c = \sqrt{Q}$. Wenn also über einer graden Linie $AB = P$ ein Kreis mit dem Halbmesser $\frac{1}{2}P$ verzeichnet, hiernächst aber eine grade Linie in der Entfernung $c = \sqrt{Q}$ mit AB parallel gezogen wird, so müssen sich die Durchschnittspuncte C, D, ergeben, wofern $\frac{1}{4}P^2 > Q$ ist, und die senkrechten Linien CH, DK, schneiden auf AB die Segmente AH, AK, ab, welche die Wurzeln der Gleichung vorstellen.

5. Zusatz. Wenn P das entgegengesetzte Zeichen hätte, so würde man $r = -\frac{1}{2}P$ finden: das hiesse, man müßte den Mittelpunct E an der andern Seite von A nehmen, und beyde Wurzeln AH, AK würden

den die entgegengesetzte Lage erhalten. In dem Fall aber, wenn Q das entgegengesetzte Zeichen hätte, wäre $c = \sqrt{Q}$ unmöglich. Die Gleichung $x^2 - Px - Q = 0$ hat nun eine positive und eine negative Wurzel, welche AH und AK nicht anzeigen können. Man nehme aber in diesem Fall die Entfernung AO $= f$, und setze OK $= z$, so ist $x = f + z$, und dieser Werth in obige Gleichung $x - 2rx + cc = 0$ gesetzt giebt $zz - 2(r - f)z + ff - 2fr + cc = 0$, oder $zz - 2(r - f)z - ((2r - f)f - cc) = 0$. Ferner sey $P = 2(r - f)$ und $Q = (2r - f)f - cc$, so hat man $r = \frac{1}{2}P + f$, und $c = \sqrt{((2r - f)f - Q)}$, oder $c = \sqrt{((P + f)f - Q)}$. Die Grösse unter dem Wurzelzeichen muß positiv bleiben, also kann man

$$f = \frac{Q}{P}$$

nehmen, so wird $c = f$. Sollte vielleicht P das entgegengesetzte Zeichen haben, so werden auch f und r negativ, da dann O und E an der andern Seite von A genommen werden.

Anmerkung. Vormahls suchte man mit Hülfe andrer krummer Linien die Wurzeln höherer Gleichungen ebenfalls durch Zeichnung zu finden: man nannte das, die Gleichung construiren. Allein jetzt hat die Sache keinen erheblichen Nutzen mehr, weil man die Wurzeln höherer Gleichungen, wenn man sie nöthig hat, viel genauer in Zahlen finden kann. Indessen hat das eine Eintheilung geometrischer Aufgaben in ebene und körperliche veranlasset, und diese Nahmen sind von den Nahmen der geometrischen Oerter hergenommen, die man bey der Zeichnung nöthig hat. Kann man mit der graden Linie und Kreislinie allein auskommen, so ist es ein problema planum und

die

ie Auflösung hängt allein von den Foderungssätzen er Elementargeometrie ab. Wenn andre vom Kreise erschiedene krumme Linien, besonders Kegelschnitte nöthig sind; so ist die Aufgabe problema solidum, nd sie gehört alsdenn zur höhern Geometrie.

Der IX. Abschnitt.

Von den Progressionen, mit allgemeinen Lehren von den Summen unbestimmt fortlaufender Reihen.

207. §.

Wenn a das erste Glied einer arithmetischen Progression, (164. §. R.) d der Unterschied und n die Anzahl der Glieder ist; so läßt sie sich allgemein so ausdrücken

1	2	3	4	5	...	n
a,	$a+d$,	$a+2d$,	$a+3d$,	$a+4d$,	...	$a+(n-1)d$.

Wenn nun d positiv ist, so ist es eine wachsende Progression, eine abnehmende aber, wenn d negativ genommen wird. Das letzte Glied sey $= V$, so hat man $V = a + (n - 1)d$, und wenn überhaupt P ein andres Glied der Progression, und r die Zahl ist, welche ausdrückt, wie viele Glieder in der Progression vom ersten bis zu diesem Gliede, beyde mitgerechnet, vorkommen; so ist $P = a + (r - 1)d$.

1. Zusatz. Man schreibe die Glieder derselben Progreßion in umgekehrter Ordnung, und zähle die Glieder so, daß man mit dem letzten Gliede anfängt,

und das vorige erste Glied nun das letzte wird: so erhält man

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \cdots & n \\ V, & V-d; & V-2d; & V-3d; & V-4d & \ldots & V-(n-1)d. \end{matrix}$$

Wenn nun überhaupt Q ein Glied der Progression ist, und r die Anzahl der Glieder von V bis Q bezeichnet, beyde mitgerechnet; so ist $Q = V-(r-1)d$.

2. Zusatz. Es sey r die Anzahl der Glieder von a bis P, und von V bis Q rückwärts gerechnet: so hat man $P = a+(r-1)d$

und $Q = V-(r-1)d$ (203. 204. §.)

also ist $P+Q = a+V$, oder jedes Paar solcher Glieder die vom ersten Gliede und vom letzten rückwärts gezählt gleichweit entfernt sind, giebt eine Summe, die eben so groß ist, als die Summe des ersten und letzten Gliedes.

3. Zusatz. Wenn die Anzahl aller Glieder der Progression eine ungrade Zahl ist, so giebt es ein mittelstes Glied, welches vom ersten und letzten um gleich viele Glieder entfernt ist. Nun ist dieses mittelste Glied doppelt genommen so groß, als die Summe des ersten und letzten Gliedes. Wenn nemlich $n = 2k+1$ gesetzt wird, so ist der Index des mittelsten Gliedes sowohl vorwärts als auch rückwärts gezählt $= k+1$. Man setze $r = k+1$, so ist $r-1 = k$, und man erhält

$$P = a+kd,$$
$$Q = P = V-kd,$$
$$\text{also } 2P = 2Q = a+V.$$

208. §.

Die Summe aller Glieder einer arithmetischen Progression zu finden, wenn das erste

und

und letzte Glied nebst der Anzahl der Glieder gegeben sind.

Aufl. Das halbe Product aus der Summe des ersten und letzten Gliedes in die Anzahl aller Glieder giebt die gesuchte Summe.

Beweis. Wenn die Anzahl der Glieder grade ist; so giebt es halb so viel Paar Glieder, die vom ersten und letzten um eine gleiche Anzahl Glieder abstehen, und jedes Paar ist $= a + V$, wenn a das erste und V das letzte Glied bedeutet. Nun sey $n = 2k$ die Anzahl der Glieder: so ist die Summe aller dieser Paare, folglich die Summe aller Glieder $= (a + V)k = (a + V) \times \frac{1}{2}n$.

Ist aber die Anzahl der Glieder n ungrade, so sey $n = 2k + 1$. Zählt man nun die Paare der Glieder, die vom ersten und letzten gleichweit abstehen; so ist die Anzahl dieser Paare $= k$, und das mittelste bleibt übrig, ihre Summe ist $= (a + V)k$. Um nun die Summe aller Glieder zu haben, muß man hiezu das mittelste addiren, und dieses mittelste ist $= \frac{1}{2}(a + V)$ (207. §. 3. Zus.): also wird die gesuchte Summe $= (a + V)k + \frac{1}{2}(a + V) = (a + V)(k + \frac{1}{2}) = (a + V) \times \frac{1}{2}n$, wie vorhin.

1. Zusatz. Wenn diese Summe $= S$ gesetzt wird, so hat man $S = \frac{1}{2}n(a + V)$, und vermöge des 207. §. hat man $V = a + (n - 1)d$. In diesen beyden Gleichungen, die als Fundamentalgleichungen in der Lehre von der arithmetischen Progression anzusehen sind, hat man 5 Grössen a, V, S, d, n: wenn 3 davon gegeben sind, so kann man die übrigen beyden aus diesen Gleichungen finden (186. §.).

2. Zusatz. Wenn aus dem ersten Gliede, der Differenz und der Anzahl der Glieder die Summe S gefun-

funden werden soll, so kann man in der ersten Gleichung $a + (n-1)d$ anstatt V setzen: das giebt $S = \frac{1}{2}n(2a + (n-1)d)$, oder $S = na + \frac{1}{2}n(n-1)d$.

209. §.

Die Summe aller Glieder ist gegeben, nebst ihrer Differenz und dem ersten Gliede: man soll die Anzahl aller Glieder finden.

Aufl. Es sind S, d und a gegeben, man sucht n. Zu dem Ende schaffe man aus beyden Fundamentalgleichungen V weg, und man erhält

$$\frac{2S}{n} - a = a + nd - d$$

oder $2S = 2an + d.nn - dn$.

Wenn man diese Gleichung gehörig ordnet, und mit d dividirt, so wird

$$nn + \frac{(2a-d)n}{d} = \frac{2S}{d},$$

und $n = -\frac{(2a-d)}{2d} \pm \sqrt{\left(\frac{2S}{d} + \frac{(2a-d)^2}{4dd}\right)}$.

Zusatz. Man erhält einen zur würklichen Berechnung bequemern Ausdruck, wenn man die Gleichung $dnn + (2a-d)n = 2S$ mit d multiplicirt, und das Product nd sucht, welches man hierauf mit d dividiren kann. Es wird nemlich $n^2.dd + (2a-d)nd = 2Sd$. Setzt man nun $n.d = z$, so wird

$$zz + (2a-d)z = 2Sd,$$

also $z = -(a - \frac{1}{2}d) \pm \sqrt{(2Sd + (a - \frac{1}{2}d)^2)}$,

oder $z = (\frac{1}{2}d - a) \pm \sqrt{(2Sd + (\frac{1}{2}d - a)^2)}$.

Hat man z gefunden, so erhält man $n = \frac{z}{d}$.

Exem-

Exempel.

1. Es sey $S = 235$, $d = 5$, $a = 1$: so wird
$\frac{1}{2}d - a = 1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, $(\frac{1}{2}d - a)^2 = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$,
$2Sd = 2 \times 235 \times 5 = 2350$, folglich
$2Sd + (\frac{1}{2}d - a)^2 = 2352\frac{1}{4} = 2352,25$
und $\sqrt{(2Sd + (\frac{1}{2}d - a)^2)} = 48,5$. Daher ist der positive Werth von $z = 50$, und $n = \frac{50}{5} = 10$: der negative Werth von z ist 47, also auch $n = -9\frac{2}{5}$.

2. Es sey $S = 714$, $d = 3$, $a = 4$:
so hat man $a - \frac{1}{2}d = 2,5$; $(a - \frac{1}{2}d)^2 = 6,25$;
$2Sd = 2 \times 714 \times 3 = 4284$, mithin
$2Sd + (a - \frac{1}{2}d)^2 = 4290,25$, und
$\sqrt{(2Sd + (a - \frac{1}{2}d)^2)} = 65,5$. Demnach ist entweder $z = 63$ oder $n = \frac{z}{d} = 21$, oder $z = -68$, und $n = -22\frac{2}{3}$.

Zusatz. Man sucht hier zwar gewöhnlich nur den positiven Werth von n, indessen giebt der negative Werth ebenfalls eine richtige Auflösung, wie die hier zur Seite stehende Rechnung zeiget, wobey die Zahlen aus dem 1sten Exempel hergenommen sind. Anstatt n kann man gebrochene auch negative Zahlen setzen, und im letztern Fall die Reihe so weit man will rückwärts fortsetzen.

n	V
1	+ 1
0	− 4
− 1	− 9
− 2	− 14
− 3	− 19
− 4	− 24
− 5	− 29
− 6	− 34
− 7	− 39
− 8	− 44
− 9	− 49
$-9\frac{2}{5}$	− 51

$a = +1$

$a + V = -50$

$\frac{1}{2}n = -4,7$

$S = +235$

210. §.

Wenn eben die Stücke wie im vor. §. gegeben sind, das letzte Glied zu finden.

Aufl. Aus den beyden Fundamental-Gleichungen (208. §. Zus.) schaffe man n weg, so erhält man

$$\frac{2S}{a+V} = \frac{V-(a-d)}{d}, \text{ und}$$

das giebt $2Sd = (V-(a-d))(a+V)$,
also $2Sd = (V-(a-d))V + (V-(a-d))a$,
oder $VV + dV = 2Sd + a(a-d)$.
Daraus folgt $V = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{(2Sd + a(a-d) + \frac{1}{4}dd)}$,
oder auch $V = -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{((2S + \frac{1}{4}d)d - a(d-a))}$.

Exempel.

Man behalte die Zahlen des ersten Exempels im vorigen §: so wird $2Sd + \frac{1}{4}dd = 2356{,}25$, und $a(d-a) = 4$, also der Ausdruck unter dem Wurzelzeichen $= 2352{,}25$, und die positive Wurzel $= 48{,}5$, also $V = 46$.

Im zweyten Exempel wird $2Sd + \frac{1}{4}dd = 4286{,}25$, und $a(a-d) = 4$, also $V = -1{,}5 + \sqrt{4290{,}25} = 64$.

211. §.

Jede vollkommne Quadratzahl ist die Summe so vieler ungraden Zahlen, als die Wurzel Einheiten enthält.

Beweis. Die ungraden Zahlen machen eine arithmetische Reihe aus, wie

1 2 3 4 5 6 - - - n
1 3 5 7 9 11 - - $2n-1$.

Wenn man die allgemeinen Formuln anwendet, so hat man $a = 1$, und $V = 2n - 1$, also nach dem 208. §. $S = \frac{1}{2}n(1 + 2n - 1) = n^2$.

Zu-

Zusatz. Dieser Satz ist sehr bequem, wenn man zu dem im 107. §. angezeigten Gebrauch Quadrat-Tafeln verfertigen will. Man setze alle vollkommene Quadrat-Zahlen in ihrer Ordnung nach einander hin, und subtrahire jedes Glied dieser Reihe vom folgenden, so machen die Differenzen die Reihe der ungraden Zahlen aus. Wenn man nun aufs neue die Differenzen dieser Reihe nimmt, so wird jede = 2, und man erhält folgende Reihen:

Quadrate.

1. 4. 9. 16. 25. 36. 49. 64. 81. 100 u. s. w.

I. Differenzreihe.

3. 5. 7. 9. 11. 13. 15. 17. 19.

II. Differenzreihe.

2. 2. 2. 2. 2. 2. 2. 2.

Aus dem dritten Quadrat 9 wird also das vierte, wenn man die darunter stehenden Glieder der Differenz-Reihen dazu addirt, man erhält nemlich $9+5+2=16$. Die folgenden Quadratzahlen $16+7+2=25$, $25+9+2=36$, u. s. f. werden eben so gefunden.

212. §.

Wenn man die Reihe der Würfelzahlen, wie sie in ihrer Ordnung folgen, niederschreibt, und die Differenz-Reihen wie vorhin sucht; so wird die zweyte Differenz-Reihe eine arithmetische Progression, und alle Glieder der dritten Differenzreihe werden $= 6$.

Beweis. Wenn die Zahlen $0, 1, 2, 3, \ldots m$, $m+1$, in natürlicher Ordnung folgen, so sind die

Würfel,

1. 8. 27. 64. ..... m^3, m^3+3m^2+3m+1

I. Differenz-Reihe.

7. 19. 37. ..... $3m^2+3m+1$. $3(m+1)^2+3(m+1)+1$

II. Differenz-Reihe.

12. 18. ..... $6m+6$. $6(m+1)+6$

III. Differenz-Reihe.

6. 6. ..... 6.

In der Reihe der Würfel gehört m^3 mit dem Index m zusammen, und das nächstfolgende $(m+1)$te Glied ist $(m+1)^3 = m^3 + 3m^2 + 3m + 1$ (92. §.); die Differenz beyder Glieder wird also $= 3m^2 + 3m + 1$. Dieser Ausdruck giebt demnach ein jedes Glied der ersten Differenz-Reihe, nachdem man $m = 1$, oder $= 2$, oder $= 3$ u. s. f. setzt; er bezeichnet überhaupt das $m$te Glied der ersten Differenz-Reihe, und man erhält ihr $(m+1)$tes Glied, wenn man $m+1$ statt m schreibt. Es wird also in der 1. Differenzreihe

das $(m+1)$te Glied $= 3m^2 + 6m + 3 + 3m + 3 + 1$,
das $m$te Glied $= 3m^2 \qquad + 3m \quad + 1$

Differenz $= \qquad 6m + 6$

Dieser letzte Ausdruck giebt jedes Glied der zweyten Differenz-Reihe, wenn man die Zahlen 1, 2, 3 u. s. f. nach der Ordnung statt m setzt. Nun sieht man leicht, daß die zweyte Differenzreihe eine arithmetische Progression werde, wovon das erste Glied 12, und die Differenz der Glieder 6 ist: denn für $m = 1$ wird $6m + 6 = 12$. Der allgemeine Ausdruck $6m + 6$ giebt jedes $m$te Glied, und man hat das $(m+1)$te, wenn man $m+1$ statt m schreibt. Demnach ist

das $(m+1)$te Glied $= 6m + 6 + 6$,
das $m$te Glied $= 6m + 6$,

die Differenz $= \qquad 6$

Zu-

Zusatz. Um also eine Cubictafel zu berechnen, ist nur nöthig, daß man die ersten 4 Würfel vermittelst der Multiplication suche; daraus erhält man die ersten drey Glieder der ersten Differenz-Reihe, und hieraus ferner die ersten zwey Glieder der zweyten Differenz-Reihe, die nun um 6 verschieden sind. Schreibt man also die Differenz allemal unter dem grösten Gliede der vorhergehenden Reihe; so darf man nur zu dem vierten Würfel die drey darunter stehenden Differenzen addiren, und die Summe giebt den fünften Würfel $64+37+18+6=125$. Nun kann man in jeder Differenz-Reihe das folgende Glied suchen, und wie vorhin den sechsten Würfel, auch auf eben die Art jeden folgenden Würfel finden.

213. §.

Die Lehren von den Progressionen haben nicht allein in der Mathematik ihren mannigfaltigen Nutzen, sondern auch bey manchen Rechnungsfragen, welche durch Geschäfte im gemeinen Leben veranlasset werden. Wenn eine Arbeit desto mehr Schwierigkeit hat, je länger sie fortgesetzt wird; so werden die Arbeitskosten desto grösser, und es kann, nach Beschaffenheit der Arbeit, diese Vermehrung der Arbeitskosten in arithmetischer Progression fortgehen. Bey hohen Gebäuden verursachen die obersten Stockwerke mehr Kosten, als die untern. Bey Ausgrabung eines Brunnens wird die Arbeit desto beschwerlicher, je tiefer man kommt; denn die Erde muß desto höher gebracht werden, und es werden immer mehr Neben-Arbeiten, an steifen, aussetzen und unterfahren erfordert, damit nicht alles nachfalle. Bey Berechnung solcher Arbeitskosten kommt es zwar auf den jedesmaligen Accord an: in-

dessen können doch Fälle vorkommen, wobey die bisherige Theorie ihre Anwendung findet, zumal wenn der Accord so geschlossen wäre, daß man für einen bestimmten Theil der Arbeit einen gewissen Lohn, und für einen jeden folgenden Theil eine bestimmte Zulage festgesetzet hätte, wenn man etwa gleich Anfangs nicht voraus wissen konnte, wie weit die Arbeit würde fortzusetzen seyn.

1. Wäre bey Ausgrabung eines Brunnens der erste Fuß zu 4 Groschen, und jeder folgende zu 3 Gr. mehr als der vorhergehende bedungen: so läßt sich leicht berechnen, wie viel man zu zahlen habe, wenn der Brunnen die Tiefe von 20 Fuß erhalten hat. Man sucht nemlich die Summe einer arithmetischen Progression, deren erstes Glied $a = 4$, die Differenz $d = 3$, die Anzahl der Glieder $n = 20$ ist, und man erhält aus dem 208. §. $S = 10\,(8 + 19 \times 3) = 650$ Gr $= 27$ Rthl 2 Gr.

2. Sollte jeder folgende Fuß 4 Gr. mehr kosten: so wäre $a = d$, und im 208. §. 2 Zusatz. $S = \frac{1}{2}an + \frac{1}{2}ann = \frac{1}{2}an\,(n + 1) = 40 \times 21 = 840$ Gr $= 35$ Rthl.

214. §.

Ein Brunnen ist auf 12 Fuß Tiefe mit einem Arbeiter auf 13 Thlr. verdungen: allein dieser Arbeiter stirbt, oder wird sonst gehindert, nachdem er nur bis auf 8 Fuß Tiefe gekommen ist. Ein andrer übernimmt auf eben den Accord die letzten 4 Fuß zu Stande zu bringen: also ist die Frage, wie die bedungenen 13 Rthl. oder 312 Gr. unter beyde Arbeiter zu vertheilen sind?

Aufl. In diesem Falle ist die Summe der Progression $S = 312$, nebst der Anzahl der Glieder $= 12$, gegeben: aber es muß von den im 208. §. 1. Zus. genannten 5 Stücken noch eines bestimmt seyn. Demnach muß man entweder den ersten Fuß taxiren, oder auch die Differenz der Glieder, wieviel nemlich für jeden folgenden Fuß mehr als für den vorhergehenden zu zahlen sey. Nimmt man an, daß der zweyte Fuß zweymahl, der dritte, dreymahl so viel Arbeit erfodere, als der erste, u. s. f.; so hat man $a = d$, und man kann aus der Gleichung $S = \frac{1}{2} an (n + 1)$ (213. §. n. 2.) nun $a = d$ finden. Es wird nemlich

$$a = \frac{2S}{n(n+1)} = \frac{624}{12 \times 13} = \frac{52}{13} = 4 \text{ Gr.}$$

Nun setze man $n = 8$: so wird $S = \frac{1}{2} \times 4 \times 8 \times 9 = 16 \times 9$ Gr. $= 6$ Thl., und soviel bekömmt der erste Arbeiter, der andre aber 7 Thl.

215. §.

Wenn a das erste Glied einer geometrischen Progression ist, und e der Exponent des Verhältnisses des zweyten Gliedes zum ersten; so kann man sie auf folgende Art allgemein ausdrücken:

1	2	3	4	5	6	n
a	ae	ae^2	ae^3	ae^4	ae^5	- - - ae^{n-1}

(179. §. R.)

Ist nun V das letzte Glied, und n die Anzahl der Glieder: so hat man $V = ae^{n-1}$, und wenn P ein jedes Glied der Progression, r aber die Zahl der Glieder von a bis P ist: so hat man $P = ae^{r-1}$.

Zusatz. Man schreibe, wie im 207. §. 1. Zus. die Glieder der Progression in umgekehrter Ordnung, und zähle sie rückwärts: so erhält man

$$\sqrt[1]{\sqrt[2]{\frac{}{e}}\ \sqrt[3]{\frac{}{e^2}}\ \sqrt[4]{\frac{}{e^3}}\ \sqrt[5]{\frac{}{e^4}}\ \ldots\ \sqrt[n]{\frac{}{e^{n-1}}}}$$

Ferner bezeichne Q ein jedes Glied der Progression, und r sey die Anzahl der Glieder von V bis Q; so ist

$$Q = \frac{V}{e^{r-1}}.$$

216. §.

Die Glieder aller Differenz-Reihen einer geometrischen Progression geben ebenfalls in einer geometrischen Progression fort, die mit der Haupt-Reihe einerley Exponenten hat. Die ersten Glieder der Differenzreihen aber, und alle, welche davon um eine gleiche Anzahl Glieder entfernt sind, machen unter sich eine geometrische Progression aus, wovon der Exponent um Eins kleiner ist.

Beweis. Es sey

die Haupt-Reihe

$$a\ ae, ae^2\ ae^3\ ae^4\ \ldots\ldots\ldots ae^{n-1}\ ae^n\ ae^{n+1},$$

und $e - 1 = f$, so wird die

1. Differenz-Reihe

$$af\ afe\ afe^2\ afe^3\ \ldots\ldots\ldots afe^{n-1}\ afe^n\ afe^{n+1}$$

2. Differenz-Reihe

$$af^2\ afe^2\ af^2e^2\ \ldots\ldots\ldots af^2e^{n-1}\ af^2e^n$$

3. Differenz-Reihe

$$af^3\ af^3e\ af^3e^2\ \ldots\ldots\ldots af^3e^{n-1}\ \ldots\ldots$$

Jede dieser Reihen ist eine geometrische Progression, die den Exponenten e hat: aber alle erste Glieder, womit die Differenzreihen anfangen, so wie auch alle diejenigen, die von den ersten um eine gleiche Anzahl Glie-

Glieder abstehen, sind in geometrischer Progression, wovon $e - 1$ der Exponent ist.

217. §.

Das Product des ersten und letzten Gliedes der geometrischen Progression ist so groß, als das Product zweyer andern Glieder P und Q, wovon das eine P vom ersten a um so viele Glieder abstehet, als das zweyte Q vom letzten V rückwärts gerechnet.

Beweis. Wenn r die Anzahl der Glieder von a bis P, und von V bis Q ist; so hat man

$$P = ae^{r-1} \text{ und}$$

$$Q = \frac{V}{e^{r-1}}, \text{ (215. §. und dess. Zus.)}$$

also ist $P \times Q = a \times V$.

Wenn die Anzahl aller Glieder der Progression ungrade ist; so giebt es auch hier ein mittelstes Glied, und das Quadrat desselben ist so groß, als das Product des ersten und letzten Gliedes. Ist nemlich $2k + 1$ die Anzahl der Glieder, so ist das $(k + 1)$te das mittelste Glied, und dies ist $= ae^k$. Aber V $= ae^{2k}$, und $a \times V = a^2 e^{2k} = (ae^k)^2$.

218. §.

In jeder geometrischen Progression verhält sich die Summe aller Glieder, weniger das letzte, zur Summe aller Glieder, weniger das erst, wie das erste zum zweyten Gliede.

Beweis. Es sey S die Summe aller Glieder, von a angerechnet bis $V = ae^{n-1}$: so wird

$$S - V = a + ae + ae^2 - - - + ae^{n-3} + ae^{n-2},$$

also $(S-V)e = ae + ae^2 + ae^3 \ldots . ae^{n-2} + ae^{n-1}$,
und $S - a = ae + ae^2 + ae^3 \ldots ae^{n-2} + ae^{n-1}$.
Daraus folgt $S - a = (S - V)e$, mithin ferner $= S - V : S - a = 1 : e$, oder $S - V : S - a = a : ae$.

219. §.

Wenn das erste Glied der Progression, der Exponent, und das letzte Glied; oder auch statt des letzten, die Anzahl der Glieder gegeben ist; die Summe aller Glieder zu finden.

Aufl. 1. Aus dem vor. §. hat man die Gleichung $S - a = Se - Ve$, und daraus folgt $S(e - 1) = Ve - a$: also ist $S = \frac{eV - a}{e - 1}$

2. Setzt man ferner $V = ae^{n-1}$;

so wird $S = \frac{a(e^{n-1})}{e - 1}$.

1. Zusatz. Man hat demnach wiederum zwey Fundamentalgleichungen $V = ae^{n-1}$, und $S = \frac{eV-a}{e-1}$; wenn also von den fünf Grössen a, e, n V, S, drey gegeben sind, so kann man die übrigen finden.

2. Zusatz. In dem besondern Fall, wenn $e = 1$ ist, findet man $S = \frac{a(e^n - 1)}{e - 1} = \frac{a.0}{0}$, so daß es scheint, es werde in diesem Falle die Summe von der Formul nicht angegeben. Allein wenn man den 36. §. vergleicht, so erhellet, daß S auch für diesen Fall richtig gefunden werden müssen, wenn man zuerst sucht, was aus der Gleichung werde, wenn man

$e - 1 = z$ setzet. Das giebt $e = 1 + z$, also $e^n =$

$$1 + \frac{n}{1}z + \frac{n.n-1}{1.2}z^2 + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}z^3$$

$+ \ldots .$ (112. §.), und man findet $S =$

$$a\left(n + \frac{n.n-1}{1.2}z + \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}z^2 + \ldots .\right),$$

folglich $S = an$, wenn $z = 0$, oder $e = 1$ ist.

220. §.

Das älteste Beyspiel einer Rechnungsfrage, bey welcher die Aufgabe des vor. §. ihre Anwendung findet, ist vermuthlich diejenige, welche dem Erfinder des Schachspiels vermöge der Erzählung eines arabischen Schriftstellers zugeschrieben wird. Dieser Schriftsteller heißt *Selâhô ddîn Mohammed Alséphahi* und in seinen Commentariis über das Gedicht Lamiato' l Ajam des Poeten Tograii bey Gelegenheit des Verses Enna'l ola hadathatni erzählt er folgendes:

Ein persischer König Ardschir Ebn Babec hatte das Bretwürfel-Spiel erfunden, womit die Perser sich groß machten, weil die Erfindung für sehr sinnreich gehalten ward: allein ein Indianer Sessa Ebn Daher erfand hierauf das Schachspiel, und machte dem Könige Shehram seine Erfindung bekannt, dem sie ungemein viel Vergnügen machte. Man räumte dieser Erfindung bald einen großen Vorzug vor dem Bretwürfel-Spiel ein, und der König befahl dem Sessa, daß er sich zur Belohnung etwas ausbitten mögte, es sey von so grossen Werthe als es wolle. Sessa bat hierauf den König um so viel Waitzen, als die Summe austragen würde, wenn man ihm für das erste Feld im Schachbrett 1 Korn,

für das 2te 2 Körner, für das dritte 4 Körner, u. s. f. für jedes folgende Feld doppelt so viel, als für das vorhergehende reichte. Der König hielte dies für eine ungemeine Kleinigkeit, und ward ungnädig, weil er es als eine Verachtung der Königlichen Gnade aufnohm: allein Sessa bestand auf seiner Bitte, und der König befahl, man solte ihm das verlangte geben. Bald aber ward dem Könige zu seinem Erstaunen hinterbracht, daß dem Sessa so viele Körner, als er verlangt hätte, nicht gegeben werden könnten, und wenn auch alles Getraide in der ganzen Welt zusammen gesammlet würde. Man legte dem Könige die Berechnung vor, und er bewunderte den Sessa noch mehr wegen seiner sinnreichen Bitte, als wegen der Erfindung des Schachspiels.

Wenn man weiß, daß das Schachbrett 64 Felder hat; so erhellet, daß Sessa eine Anzahl von Waitzen-Körnern verlangt habe, die so groß ist, als die Summe der Progression 1 2 4 8 16 32 u. s. f. bis zum 64sten Gliede.

Setzt man nun $a = 1$, $e = 2$, $n = 64$: so wird nach dem vor. §. diese Summe $= 2^{64} - 1$. Hiernächst findet man

$$l\,2 = 0{,}3010300$$
$$\times 64$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$12041200$$
$$180618$$
$$\overline{\qquad\qquad}$$
$$l\,2^{64} = 19{,}2659200,$$

also sind die ersten 7 Ziffern der gesuchten Zahl folgende 1844674, und es müßten noch 13 Ziffern folgen, welche mit Hülfe grösserer Logarithmen-Tafeln

seln dem 159. §. gefunden werden könnten. Man kann diese Summe aber ohne grosse Schwürigkeit durch die Multiplication finden. Es wird nemlich

$$4 = 2^2$$
$$16 = 2^4$$
$$256 = 2^8$$
$$65536 = 2^{16}$$
$$4294'967296 = 2^{32}$$
$$18'''446744''073709'551615 = 2^{64} - 1,$$

und diese letzte Zahl ist die Summe aller Körner, welche Sessa verlangt hat.

Um einen Ueberschlag zu machen, wie viel Waitzen diese Menge Körner nach dem jetzt üblichen Maaß oder Gewicht austragen würde, muß man folgendes wissen. Ein Sterling (Englisch Geld), soll nach einem im Jahr 1302 unter Eduard I. Regierung abgefaßten Gesetz, so schwer seyn, als 32 wohl ausgetrocknete und aus der Mitte der Aehre genommene Waitzenkörner. Weiter sollen 20 Sterling eine Unze, und 12 Unzen ein Pfund wägen; 64 Pf. aber auf einen Englischen Scheffel gehen. Demnach wägen 7680 Körner 1 Pf. (Troy Gewicht) und ein Scheffel fasset 491520 Körner. Dividirt man hiemit die gefundene Zahl, so findet man 37''529996'894754 Scheffel. Ein Englischer Scheffel fasset 1848 Cubikzoll, und eine Englische Meile ist 5280 Fuß lang: daher hält eine Cubikmeile 147197952000 Cubik-Fuß, oder 137639'643428 Scheffel. Hiemit dividire man die gefundene Anzahl der Scheffel, so kommt ein Raum von mehr als 272 Cubik-Meilen, den die gefundene Menge Körner einnehmen würde. Man vergleiche hiemit Wallisii Operum Mathem. P. I. Cap. 31. p. 271 seq.

221. §.

Die Summe der Glieder S und ihre Anzahl n, nebst dem Exponenten e sind gegeben; man sucht das erste Glied, oder auch jedes andre dessen Index r gegeben ist.

Aufl. 1. Aus $S = \frac{eV - a}{e - 1} = \frac{ae^n - a}{e - 1}$

folgt $a = \frac{S(e - 1)}{e^n - 1}$.

2. Hieraus ergiebt sich jedes andre Glied P der Progression, wenn von a bis P die Anzahl der Glieder $= r$ seyn soll, weil alsdenn $P = ae^{r-1}$ ist. Bey der würklichen Berechnung braucht man mit Vortheil die Logarithmen, wenn e und r nicht sehr groß sind: es wird nemlich $lP = la + (r - 1)le$.

222. §.

Das erste und letzte Glied, oder auch das erste Glied, und die Summe aller Glieder sind nebst dem Exponenten gegeben; man sucht die Anzahl aller Glieder.

Aufl. 1. Aus $V = ae^{n-1}$ ergiebt sich n vermittelst der Logarithmen. Weil nemlich $lV = la + nle - le$ ist, so wird $nle = lV - la + le$, und $n = \frac{lV - la}{le} + 1$.

2. Aus $S = \frac{ae^n - a}{e - 1}$ folgt $(e - 1)S = a(e^n - 1)$ und $\frac{(e - 1)S}{a} = e^n - 1$; also $\frac{(e - 1)S + a}{a} =$

$= e^n$, und $l((e-1)S+a) - la = nle$, folglich $n = \frac{l((e-1)S+a) - la}{le}$.

223. §.

Wenn vermöge des Gesetzes nach welchem jedes folgende Glied einer Reihe aus einem oder mehrern vorhergehenden entstehet, allemahl noch ein folgendes Glied zugesetzt werden kann, ohne daß eigentlich ein letztes Glied der Reihe angegeben werden kann; so nennt man sie am beßten eine unbestimmt fortlaufende Reihe, obgleich auch der Nahme unendliche Reihe, gewöhnlich ist. In andern Fällen braucht man den Ausdruck, endliche Reihe, wenn die Reihe vermöge des Gesetzes, wie jedes folgende Glied aus den vorhergehenden entstehet, nur eine bestimmte Anzahl von Gliedern zu der Reihe gehört, also auch ein letztes Glied bestimmt angegeben werden kann.

1. Zusatz. Die Reihe, welche die Potenz $(a+b)^n$ ausdrückt (112. §.) ist eine endliche Reihe, wenn n eine positive ganze Zahl ist: in andern Fällen aber, wenn n ein Bruch oder eine negative Zahl ist, wird es eine unendliche Reihe. (114. §.).

2. Zusatz. Wenn es nicht vorgeschrieben ist, aus wie vielen Gliedern eine arithmetische, oder eine geometrische Progression bestehen soll; so kann sowohl die eine als die andre unbestimmt fortlaufen, die Summe aller Glieder ist alsdenn ebenfalls unbestimmt. Wenn d positiv ist, so wird im 208. §. 2. Zus. $S = na + \frac{1}{2}n(n-1)d$ mit n immer grösser, und des Verhältnisses $\frac{S}{nn}$ Gränze ist $= \frac{1}{2}d$. Wä-

re

re d negativ; so würde $S = na - \frac{1}{2}n(n-1)d$ zwar anfangs mit n wachsen, aber nur so lange bis $n = \frac{a + \frac{1}{2}d}{d}$ würde. Das mit dem Index n zusammengehörige Glied ist $a - (n-1)d$, wenn d negativ ist: also müssen die Glieder der Reihe negativ werden, wenn $n - 1 > \frac{a}{d}$, also $n > \frac{a+d}{d}$ wird, da dann die hinzukommenden negativen Glieder die Summe der positiven wieder vermindern.

224. §.

Was man Summe einer unendlichen Reihe nennt, ist eigentlich die Gränze, der sich die Summe der nach einander folgenden Glieder immer mehr nähert, je mehr Glieder man in die Summe bringt. Wenn jedes folgende Glied kleiner, als das vorhergehende ist, so kann es eine Gränze geben, welcher die Summe der Glieder zwar immer näher kommt, die sie aber doch nie erreicht. Daß die Summe der geometrischen Progression $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ nie $= 2$ werden könne, ist für sich einleuchtend.

1. Zusatz. Wenn e ein ächter Bruch ist, so nähert sich das letzte Glied der geometrischen Progression $V = ae^{n-1}$ der Gränze 0 und die Summe $S = \frac{a}{1-e} - \frac{ae^n}{1-e}$ (219. §.) der Gränze $\frac{a}{1-e}$ (112. §. 6. 7. Zus.).

2. Zusatz. Um also in dem hier festgesetzten Sinne die Summe der unendlichen Reihe

$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} \ldots$ zu finden,

setze

setze man $a = \frac{1}{2}$, und $e = \frac{1}{2}$, so wird $S = 1$. Auf eben die Art findet man

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \frac{1}{81} \ldots = \frac{1}{2}$$
$$\frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} \ldots = \frac{1}{3}$$

und überhaupt

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} \ldots = \frac{1}{x-1}.$$

Setzt man nemlich $a = \frac{1}{x}$, und $e = \frac{1}{x}$,

so wird $S = \frac{1}{x-1}$.

3. Zusatz. Wenn man den Zähler des Bruchs $\frac{1}{x-1}$ mit seinem Nenner dividirt, so ergiebt sich eben die Reihe: (26. §. 1. 2. Zus.) zugleich ergiebt sich aus dieser Vergleichung, in welchem Sinne die Reihen, welche man vermittelst einer solchen Division findet, als unendliche Reihen angesehen werden können, die dem gesuchten Quotienten gleich sind. Ohne Zweifel kommt es auf die nöthige Ergänzung der Reihe an, ob diese verschwinden könne, wenn man voraussetzt, die Zahl der Glieder solle die Gränze ∞ erreichen. Oben im 26. §. 1 Zus. war

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{b} + \frac{a}{b} \cdot \frac{c^2}{b^2} - \ldots.$$

$\pm \frac{ac^n}{b^n(b+c)}$, und die Ergänzung kann nur verschwinden, wenn $c < b$ ist. (112. §. 7. Zus.)

4. Zusatz. Wäre $c = b$, also $\frac{a}{b+c} =$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{a}{b}$, so würde sich die Reihe des 3. Zus. in folgende verwandeln $\frac{a}{b}(1-1+1-1\ldots\pm\frac{1}{2})$. Nach jeder graden Anzahl vorhergehender Glieder fehlt also die Ergänzung $+\frac{1}{2}$ und nach jeder ungraden Anzahl die Ergänzung $-\frac{1}{2}$. Die Reihe nähert sich also eigentlich keiner Gränze, die man als ihre Summe ansehen könnte.

5. Zusatz. Noch weniger würde sich die Reihe einer solchen Gränze nähern, wenn $c > b$ wäre, weil in dem Fall die nöthige Ergänzung der Reihe immer grösser wird, je mehr Glieder vermittelst der Division gesucht werden. Weil der Divisor einerley bleibt, so kommt alles auf den Rest an, der nach den Divisionsregeln jedesmahl übrig bleibt. Wenn dieser bey jedesmahliger Wiederhohlung der Division kleiner wird, als er vorher war; so nähert sich die Reihe dem gesuchten Quotienten, widrigenfalls nicht. Nimmt man im Exempel des 4. Zusatzes c negativ, so erhält man $\frac{a}{b-c} = \frac{a}{b}\left(1+\frac{c}{b}+\frac{c^2}{b^2}+\frac{c^3}{b^3}\ldots+\frac{a}{b}\cdot\frac{c^n}{b^{n-1}(b-c)}\right)$, und wenn $b=c$ ist, so giebt das $\frac{a:b}{1-1} = \frac{a}{b}\left(1+1+1+1+1\ldots+\frac{1}{1-1}\right)$. Der Rest ist immer dem ganzen Dividendus gleich, also muß das was noch fehlt, allemahl dem ganzen Quotienten gleich bleiben, der auch, wie man sonst weiß, unendlich groß seyn muß.

Will

Will man die Reihe als die Summe einer geometrischen Progression ansehen, so hat man auch nach der Formul des 219. §. im dortigen 2. Zusatz $S = na$, also unendlich groß, wenn $n = \infty$ seyn soll.

6. Zusatz. Wenn man $c = a$ und $\frac{b}{c} = \frac{b}{a} = x$ setzt, so findet man $\frac{1}{x+1} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} \ldots . \pm \frac{1}{x^n(x+1)}$, aus der Reihe im

3. Zusatz. Nimmt man c oder a also auch x negativ, so hat man die Reihe $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^4} + \ldots . = \frac{1}{x-1}$, wie im 2. Zusatz. Diese Reihen nähern sich dem Quotienten, wenn $b > c$, also $x > 1$ ist. Jene Reihe mit den abwechselnden Zeichen + und − ist auch $= \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} \ldots .\right) - \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^6} + \ldots\right)$, und der positive Theil $= \frac{x}{x^2-1}$, der negative $= \frac{1}{x^2-1}$ (1. Zus.) weil $x > 1$ seyn soll: also die algebraische Summe $= \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{x+1}$, wie es die Division giebt.

7. Zusatz. Diese Methode, abnehmende Reihen zu summiren, kann man mit dem Herrn von Leib-

Leibnitz auf die Berechnung des Interusurii anwenden. Wenn man jährlich 5 pro cent Zinsen bezahlt, so betragen die Zinsen am Ende des Jahrs $\frac{1}{20}$ des Capitals. Nun sey mir Cajus nach Verlauf eines Jahres ein gewisses Capital schuldig, welches hier $= 1$ gesetzt werden kann: bezahlt er mir dies Capital gleich jetzo baar, so bin ich ihm am Ende des Jahrs $\frac{1}{20}$ an Zinsen schuldig, weil er diese damit hätte gewinnen können. Rechnet nun Cajus gleich $\frac{1}{20}$ ab, und bezahlt mir $1 - \frac{1}{20}$; so ist es so viel, als ob ich gleich jetzt ein Capital bezahle, das ich erst am Ende des Jahres schuldig bin: daher muß mir Cajus am Ende des Jahrs $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{400}$ bezahlen. Giebt er mir dies gleich jetzo, so daß ich $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$ erhalte: so anticipirt er die Bezahlung von $\frac{1}{400}$, und ich bin gehalten, am Ende des Jahrs ihm $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{400} = \frac{1}{8000}$ an Zinsen zu bezahlen. Rechnet Cajus diese gleich jetzt ab, und giebt mir $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$: so anticipire ich die Bezahlung. Dies geht so ohne Aufhören fort: also ist das, was ich gleich jetzt mit Recht fordern kann, die Summe der unendlichen Reihe

$$1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000}$$

u. s. w. weil Cajus von dem, was er mir giebt, allemahl wieder $\frac{1}{20}$ abrechnen, und ich dagegen von dem abgerechneten wieder $\frac{1}{20}$ fordern kann.

Man setze in der Reihe des 223. §. 2. Zus. $x = 20$: so wird $\frac{1}{20} - \frac{1}{400} + \frac{1}{8000} \ldots = \frac{1}{21}$, und dies ist der Rabatt: das wirklich zu zahlende Capital aber $1 - \frac{1}{21} = \frac{20}{21}$, wie im 232. §. der Rechenkunst. Man sehe die Acta Erudit. A. 1683. Mens. Octob. p. 425.

Der

Der X. Abschnitt.

Von Annuitäten und andern Renten-Rechnungen.

225. §.

Eine jährliche oder halbjährige, auch wenn man will, eine vierteljährige monathliche oder wöchentliche Hebung, die einer Person jedesmahl in einer unveränderlichen Geldsumme bezahlt wird, nenne ich hier überhaupt eine Rente. Es können auch veränderliche von Zeit zu Zeit wachsende Renten verabredet werden: hier aber, wo nur die ersten Gründe solcher Rechnungen vorgetragen werden können, wird nur von unveränderlichen Renten die Rede seyn. Wenn es festgesetzt ist, wieviele Jahre oder halbe Jahre damit fortgefahren, wie vielmahl also die Rente bezahlt werden soll, so ist es eine Zeitrente, Jahrrente oder Annuität. Die Zinse eines Capitals ist eine immerwährende Zeitrente, so lange das Capital nicht wieder bezahlt ist. Eine solche Rente, die einer Person auf zeitlebens bezahlt werden soll, es mag diese Person bald sterben, oder sehr alt werden, nennt man eine Leibrente oder Lebensrente.

1. Zusatz. Die Jahrrente kann als die Zinse eines Capitals angesehen werden, und wer dafür ein baares Capital erlegte, dessen jährliche Zinse eben so viel betrüge, als die Rente jedesmahl betragen soll, der würde nach Ablauf der Rentenjahre auch das Capital zurück erhalten müssen. Anstatt dessen kann er

auch gleich jetzt den auf eben soviele Jahre discontirten Werth des Capitals davon abziehen: was übrig bleibt, ist der gegenwärtige baare Werth der Rente.

2. Zusatz. Wer die Rente zieht, genießt während der Rentenjahre das ganze Interusurium eines Capitals, wovon die Zinse mit dem Renten-Quantum einerley ist: demnach wird der Werth der Rente auch gefunden, wenn man den ganzen Werth vom Interusurium dieses Capitals auf eben so viele ganze oder vielleicht halbe Jahre zurück discontirt, als ganze oder halbe Rentenjahre sind verabredet worden.

3. Zusatz. Um auf die eine oder die andre Art den baaren Werth einer Jahrrente zu finden, muß festgesetzt seyn, wie hoch die Zinse u von 100 jährlich, oder halbjährlich gerechnet werden soll: mithin muß die Zahl $\frac{100+u}{100} = k$ (239. §. Rech.) gegeben seyn. Wenn man diese Zahl kurz den Zinsenfuß nennt, so ist $k-1$ die Zinse in Procenten ausgedrückt, oder $k-1 = \frac{u}{100}$ ist die Zahl, womit jedes andre gegebene Capital P multiplicirt werden muß, um die einjährige, oder vielleicht halbjährige Zinse davon zu finden.

4. Zusatz. Wenn demnach V die einjährige Zinse des Capitals P ist; so hat man $V = (k-1)P$, mithin umgekehrt für die gegebene jährliche Zinse V das Capital $P = \frac{V}{k-1}$. Drückt man die Geldsummen in Thalern aus; so ist $k-1$ die Zinse von 1 thlr.

thlr., und $\frac{1}{k-1}$ ein Capital, das jährlich 1 thlr. Zinse trägt. Ferner ist k^n der Werth von 1 thlr. nach n Jahren, $k^n - 1$ das Interusurium davon nach n Jahren, und $\frac{1}{k^n}(k^n - 1) = 1 - \frac{1}{k^n}$ das discontirte Interusurium von n Jahren, oder der gegenwärtige baare Werth eines jeden nach n Jahren zahlbaren Thalers. Man siehet leicht, daß anstatt eines Thalers jede andre für Eins angenommene Münze, auch anstatt ganzer Jahre jede andre gleiche Zeiten zwischen den Zahlterminen verstanden werden können, wovon die Zahl k alsdenn abhängt.

5. Zusatz. Hiebey ist noch zu bemerken, daß es nicht einerley sey, ob 5 Procent jährlich, oder $2\frac{1}{2}$ Procent halbjährig, 4 Procent jährlich, oder 2 Procent halbjährig an Zinse gerechnet werden. Bey einfachen Zinsen ist das richtig, nicht bey zusammengesetzten Zinsen. Wenn nach einem halben Jahre P den Werth kP hat, so ist er nach 2 halben Jahren P, also die jährige Zinse $(k^2 - 1)P$. Umgekehrt, wenn P nach 1 Jahr den Werth kP hat, so ist er nach einem halben Jahre $k^{\frac{1}{2}}P$, also die halbjährige Zinse $= (k^{\frac{1}{2}} - 1)P$.

226. §.

Die Grösse der jedesmahligen Rentensumme ist mit der Anzahl der Rentenjahre festgesetzt: man soll den gegenwärtigen baaren Werth der Rente finden.

Aufl. 1. Der Zinsenfuß k wird als bekannt angenommen: (225. §. 3. Zus.) wenn also das jedesmahlige Renten-Quantum $= a$ seyn soll, und wenn P ein Capital ist, das jährlich die Zinse a trägt, so ist $P = \frac{a}{k-1}$ (225. §. 4. Zusatz). Ferner sey die festgesetzte Zahl der Rentenjahre $= n$, so ist der auf n Jahre zurück discontirte Werth dieses Capitals $= \frac{1}{k^n} P$. Wird also der gesuchte baare Werth der $n$jährigen Rente $=$ S gesetzt, so findet man $S = P - \frac{1}{k^n} P$ (225. §. 1. Zus.) oder $S = \frac{a}{k-1} - \frac{a}{(k-1)k^n}$.

2. Das Capital P steigt mit seinen Zinsen und Zinseszinsen in n Jahren bis auf den Werth $k^n P$ (2 §. Rech.) und das gesammte Interusurium ist $k^n P - = (k^n - 1)P$. Wenn nun dieses wieder auf n Jahre zurück discontirt wird, so giebt es an Disconto den Werth $\frac{1}{k^n}(k^n P - P) = P - \frac{1}{k^n} P$, und da ist der baare Werth der Rente nach dem 225. §. 2 Zus. eben so, wie er vorhin gefunden ward, wenn man $\frac{a}{k-1}$ anstatt P setzet.

1. Zusatz. Der Werth einer Halbjahrsrente wird eben so berechnet, wenn u die halbjährige Zinse von 100 ist, $\frac{100+u}{100} = k$ gesetzt, und für n die

Anzahl aller halben Rentenjahre oder die Zahl angenommen wird, welche angiebt, wievielmahl die Rente a bezahlt werden soll. Hiebey ist also auf die Bemerkung im 225. §. 5. Zus. Rücksicht zu nehmen. Auch Vierteljahrsrenten würde man auf ähnliche Art berechnen, da dann wiederum allererst festzusetzen ist, das u in der Gleichung $\frac{100+u}{100} = k$ für einen Werth haben soll, wenn die Zahlung in Vierteljahrsterminen verabredet wird. Wenn für Jahrstermine $k = 104$ seyn soll, so ist $k^{\frac{1}{4}}$ der Werth von 1 Thaler nach 1 Vierteljahr, also $k^{\frac{1}{4}} - 1$ die Vierteljahrszinse von 1 Thaler.

2. Zusatz. Mit Hülfe einer Disconto-Tabelle, wie sie für die ersten 10 Jahre im 240. §. der Rechenkunst mitgetheilt ist, wird die Rechnung sehr erleichtert. Wenn der Zinsenfuß 5 Procent ist, und der Werth einer zehnjährigen Rente von 500 thlr. gesucht wird, also $a = 500$ ist; so erhält man

$\frac{a}{k-1} = 10000$, also ferner nach der Disconto-

tafel $\frac{a}{k^n(k-1)} = 6139{,}1325$. Wird nun

von 10000,0000 thlr.

abgezogen 6139,1325 —

so ist der Rest 3860,8675 thlr.

der gesuchte Werth der Rente.

3. Zusatz. Wenn $a = 1$ ist, so hat man $S = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k^n(k-1)}$ als den Werth einer $n$jährigen

rigen Annuität, die jedesmahl mit 1 thlr. bezahlt wird: also kann man leicht eine Rententafel für mehrere nach einander folgende Jahre entwerfen, die den Werth eines jeden Rententhalers für die gegebene Zahl von Jahren angiebt, woraus der Werth für jedes andre Renten-Quantum leicht gefunden wird, wenn man mit der Zahl der Thaler multiplicirt, die das Renten-Quantum ausmachen sollen. Es ist nemlich $\frac{1}{h-1}$ ein Capital, das jährlich 1 thlr. Zinse trägt, (225. §. 4. Zus.) und $\frac{1}{k^n(k-1)}$ das $n$jährige Disconto desselben, welches man aus der Discontotafel nehmen kann. Um also den Werth von 1 thlr. Rente zu 5 Procent Zinsen auf 10 Jahre zu finden, nimmt man aus der Discontotafel

$$\frac{1}{k^{10}} = 0{,}6139132532$$

$$\frac{1}{k-1} = \times\ 20$$

$$12{,}2782265064$$

von $20{,}0000000000$

subtr. $12{,}2782265064$

läßt $7{,}7217734936$

als den Werth eines Thalers Rente auf 10 Jahr. Diese Zahl nun mit 500 multiplicirt, giebt wie im 1. Zusatz 3860,8675 thlr.

227. §.

Es will jemand für ein festgesetztes baares Capital nach einem bekannten Zinsenfuß eine Ren-

Rente auf gewisse Jahre kaufen: die Frage ist, wie hoch das Renten-Quantum bezahlt werden müsse.

Aufl. In der Gleichung $S = \frac{a}{k-1} - \frac{a}{k^n(k-1)}$ (226. §.) oder $S = \frac{(k^n-1)a}{k^n(k-1)}$ ist nun S gegeben, man soll a finden: also erhält man $a = \frac{k^n(k-1)S}{k^n-1}$, oder auch $a = \frac{(k-1)S}{1-\lambda^n}$, wenn man $\frac{1}{k} = \lambda$ setzt.

Zusatz. Wenn man $\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k^n(k-1)} = K$ setzt, so hat man $S = K.a$, und umgekehrt $= \frac{S}{K}$. Es ist aber K der baare Werth eines Thalers Rente auf n Jahre: wenn also nach dem 26. §. 3. Zus. eine solche Rententafel ein für allemahl zum voraus ist berechnet worden, so können die Werthe K daraus abgeschrieben, und hiernächst dann a leicht vermittelst der Division gefunden werden. Als eine Probe dient nachstehende auf 20 Jahre berechnete Tafel.

Werth einer Jahrrente 1 auf

Jahre	4 Procent	5 Procent
1	0,9615384615	0,9523809524
2	1,8860946745	1,8594104309
3	2,7750910332	2,7232480294
4	3,6298952242	3,5459405042
5	4,4518223310	4,3294766707
6	5,2421368567	5,0756920073
7	6,0020546699	5,7863733974
8	6,7327448749	6,4632127594
9	7,4353316105	7,1078216756
10	8,1108957793	7,7217349291
11	8,7604767109	8,3064142182
12	9,3850737605	8,8632516364
13	9,9856478466	9,3935729870
14	10,5631229294	9,8986409400
15	11,1183874321	10,3796580381
16	11,6522956078	10,8377695601
17	12,1656688536	11,2740662477
18	12,6592969746	11,6895869026
19	13,1339393986	12,0853208596
20	13,5903263448	12,4622103425

228. §.

Wenn man zum voraus wissen könnte, in welchem Jahre oder halben Jahre eine Person, welche für sich eine Leibrente kaufen will, sterben werde, so würde der baare Werth der Rente eben so wie der Werth einer jeden andern Zeitrente gefunden werden können, weil man die Anzahl der Zahltermine mit den Zwi-

schen-

schenzeiten bey der Rechnung als bekannt zum Grunde legen könnte. Nun weiß man zwar nicht, zu welchem Alter dieser oder jener einzelne Mensch gelangen werde: allein vermöge solcher Erfahrungen, die seit vielen Jahren her sehr sorgfältig sind gesammlet worden, kann man ziemlich richtig zum voraus wissen, wieviele Personen aus einer etwas zahlreichen Gesellschaft solcher Mitglieder, die anfangs alle in einerley Alter zusammen treten, von Jahr zu Jahr mit Tode abgehen werden. Die Resultate aus diesen Erfahrungen hat man aus Geburts und Sterberegistern gezogen, und in Tabellen gebracht, welche von den Schriftstellern, die sich mit der im besondern Sinn so genannten politischen Rechenkunst beschäftigen, unter dem Nahmen der Sterblichkeitstafeln mitgetheilt werden. H. Halley hat die erste Veranlassung zu Untersuchungen dieser Art gegeben, er legte die von dem H. Caspar Neumann zu Breslau verfertigten Sterberegister von den Jahren 1678 — 1691 zum Grunde, um eine Ordnung der Sterblichkeit daraus herzuleiten. (Phil. Transact. No. 196. pag. 596.) Nach der Zeit sind in mehrern Ländern hieher gehörige Erfahrungen gesammlet worden, welche nun einer eigenen Wissenschaft von Renten und Anwartschaften zur Grundlage dienen. Zu den neuesten hieher gehörigen Werken, welche von dem allen ausführliche Nachrichten enthalten, gehören die Abhandlungen aus der juristischen und politischen Rechenkunst vom H. de Florencourt, Altenburg, 1781, Einleitung zur Berechnung der Leibrenten und Anwartschaften, die vom Leben und Tode einer oder mehrerer Personen abhangen vom H. Prof. Tetens,

tens, Leipzig 1785. Die Gründe, worauf Untersuchungen über Sterblichkeitsordnungen beruhen, sind nicht bloß mathematisch, die Tabellen als die Resultate davon nimmt der Rechner als gegeben an, und es ist leicht zu erachten, daß dergleichen Resultate, die aus Vergleichung einer grossen Menge von Sterberegistern mit vieler nöthigen Beurtheilung gezogen werden müssen, von Zeit zu Zeit Verbesserungen leiden. Ich setze also aus H. Süßmilchs Göttlicher Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, eine solche Tabelle hieher, so wie sie H. Baumann in der Ausgabe von 1775, im 2. Theil 319. S. verbessert geliefert hat, damit sie beym folgenden Vortrage der mathematischen Theorie von Leibrenten und andern ähnlichen Renten-Rechnungen als Grundtabelle diene.

Verflossene Jahre	lebende Personen	Verflossene Jahre	lebende Personen	Verflossene Jahre	lebende Personen	Verflossene Jahre	lebende Personen
0	1000						
1	750	26	461	51	291	76	62
2	661	27	456	52	282	77	55
3	618	28	451	53	273	78	49
4	593	29	445	54	264	79	43
5	579	30	439	55	255	80	37
6	567	31	433	56	246	81	32
7	556	32	427	57	237	82	28
8	547	33	421	58	228	83	24
9	539	34	415	59	219	84	20
10	532	35	409	60	210	85	17
11	527	36	402	61	201	86	14
12	523	37	395	62	192	87	12
13	519	38	388	63	182	88	10
14	515	39	381	64	172	89	8
15	511	40	374	65	162	90	6
16	507	41	367	66	152	91	5
17	503	42	360	67	142	92	4
18	499	43	353	68	132	93	3
19	495	44	346	69	122	94	2
20	491	45	339	70	112	95	1
21	486	46	332	71	103	96	0
22	481	47	324	72	94		
23	476	48	316	73	85		
24	471	49	308	74	77		
25	466	50	300	75	69		

1. Zusatz. Die Tabelle zeigt an, wieviele von 1000 zu gleicher Zeit gebornen Personen nach Verlauf

lauf eines jeden der folgenden Jahre noch am Leben sind: zugleich dient eben die Tabelle, wenn eine etwas ansehnliche Anzahl gleichalter Personen jetzt zusammen lebt, zu finden, wieviele davon nach Verlauf so und so vieler Jahre noch am Leben seyn werden. Gesetzt es machen 300 Personen, die alle 36 Jahr alt sind, jetzt eine Gesellschaft aus, die Frage ist: wieviele werden nach 10 Jahren noch leben? Man setze nach der Regel Detri

Von 402	werden 332	wie viele also von	
36 jährigen	46 Jahr alt,	300	36 jährigen

Fac. $\frac{3}{4}\frac{3}{0}\frac{2}{2} \cdot 300 = 203$.

Demnach kann man auch eben so von Jahr zu Jahr fortrechnen, und solchergestalt finden, wieviele von der anfänglichen Anzahl gleichalter Personen nach Verlauf eines jeden der folgenden Jahre noch am Leben sind.

2. Zusatz. Nach dieser Süßmilchschen Tafel ist der Schluß des 96sten, oder der Anfang des 97sten Lebensjahres für das höchste Ziel des menschlichen Alters angenommen. Wenn also das jetzige Alter einer Gesellschaft zusammen lebender gleichalter Personen von 96 subtrahirt wird, so zeigt der Rest, wie viele Jahre noch verfliessen werden, bis der letzte aus der Gesellschaft mit Tode abgehet. Die so gefundene Zahl von Jahren, welche anzeigt, wie lange die Gesellschaft bestehen wird, kann man die **Ergänzung des Alters** der Gesellschaft bis zum höchsten Lebensziel oder kurz die **Ergänzung des Alters der Gesellschaft** nennen.

229. §.

Es lebt eine etwas ansehnliche Gesellschaft von Ehepaaren jetzt beysammen, alle Ehemän-

männer für sich, und eben so auch alle Ehefrauen für sich sind gleich alt: man soll finden, wie viele stehende noch ungetrennte Ehen, und wie viele Wittwen aus den getrennten Ehen nach Verlauf eines jeden der folgenden Jahre übrig seyn werden.

Aufl. 1. Die Sterblichkeitstafel (228. §.) zeigt, wie viele von 28 Personen, die insgesammt jetzt 82 Jahr alt sind, nach Verlauf eines jeden folgenden Jahres noch am Leben sind. Wenn nun diese 28 Personen Ehefrauen, und ihre Ehemänner insgesammt 86 Jahr alt wären; so zeiget die nachstehende Tafel in welcher Ordnung man die Rechnung führen müsse.

I. Verflossene Jahre	II. Alter der Frauen	III. lebende Frauen	IV. Alter der Männer	V. lebende Männer	VI. stehende Ehen	VII. lebende Wittw.
0	82	28	86	28	28	0
1	83	24	87	24	20	4
2	84	20	88	20	14	6
3	85	17	89	16	10	7
4	86	14	90	12	6	8
5	87	12	91	10	4	8
6	88	10	92	8	3	7
7	89	8	93	6	2	6
8	90	6	94	4	1	5
9	91	5	95	2	0	5
10	92	4	96	0		4
11	93	3				3
12	94	2				2
13	95	1				1
14	96	0				0

Die

Die Zahlen in der dritten Columne sind aus der Sterblichkeitstafel abgeschrieben: wenn ich mehr oder weniger als 28 Ehepaare für die anfängliche Zahl angenommen hätte, so hätten die Zahlen in dieser Columne mit Hülfe der Regel Detri nach dem 1 Zusatz gesucht werden müssen. Mit den Zahlen in der V Columne hat es eine ähnliche Bewandniß. Weil die Zahl 28 grade doppelt so groß als 14 ist, so bleiben die Zahlen für die folgenden Jahre, wenn man sie auch nach dem 1 Zusatz suchen wollte, alle doppelt so groß, als die Zahlen sind, welche die Tabelle angiebt. Die Hauptursache kommt also nur auf die Zahlen in der VI und VII Columne an.

2. Unter den in der V. Columne nach dem ersten verflossenen Jahre aufgeführten noch lebenden Männern sind Ehemänner in stehenden Ehen und Wittwer: auch sind aus eben dem Grunde die in der III Columne aufgeführten lebenden Frauen zum Theil Ehefrauen in stehenden Ehen, zum Theil Wittwen. Die 24 nach Verlauf des ersten Jahres noch lebende Frauen hatten anfangs, als die Gesellschaft zusammen trat, insgesammt ihre Ehemänner an der Zahl 28 am Leben. Man suche also, dem 1 Zusatz gemäß, wieviele von diesen 24 anfangs 86 Jahr alten Ehemännern nach Verlauf eines Jahres in einem Alter von 87 Jahren noch leben? der Ansatz ist

Von 14	werden 12	wieviele also von 24
86 jährigen	87 Jahr alt	86 jährigen?

Die Antwort ist 20$\frac{4}{7}$.

Es scheint zwar unnatürlich, den Bruch mit in Rechnung zu bringen, der Sinn der Antwort aber, wäre eigentlich dieser: von 7mahl 24 oder 168 jetzt 86 Jahr alten Personen erreichen 144 das Alter von 87 Jahren.

ren. Will man sich eben nicht in so genaue Wahr-
scheinlichkeitsrechnungen einlassen, wie bey den hier
zu gebenden Proben nicht nöthig ist; so läßt man Brü-
che, die kleiner als $\frac{1}{2}$ sind, ganz weg, und Brüche
die mehr als $\frac{1}{2}$ ausmachen, nimmt man für Eins an.
Das Facit zeiget zugleich, daß noch 20 stehende Ehen
vorhanden sind, wie es die VI Columne anzeigt.
Weil nun zusammen noch 24 Ehefrauen leben, so
müssen 4 von ihnen jetzt Wittwen seyn, wie es die
VII Columne bemerkt.

Die folgenden Zahlen der VI und VII Columne
werden eben so gefunden. Man setzt nach Verlauf
des 2ten Jahres

Von 14	werden 10	wieviele also von
6jährigen	88 Jahr alt	20 86jährigen?

Die Antwort ist 14, und so viele stehende Ehen
sind noch vorhanden, mithin nunmehr 6 Wittwen.

Anmerkung. Ich nehme hier und im folgenden
die Exempel zur Erläuterung aus dem höhern Alter
her, weil die Rechnungen für jüngere Alter weitläuf-
iger ausfallen, und hier die Absicht nicht seyn kann,
weitläuftige Rechnungen dieser Art durchzuführen.

230. §.

Eine etwas ansehnliche Anzahl gleichalter
Personen verbindet sich zu einer Leibrenten-
Gesellschaft; der Zinsenfuß ist bekannt, nach
welchem das zusammengebrachte Geld, und
was davon nach jedem Zahltermin noch übrig
ist, von Termin zu Termin benutzt werden
kann: man soll den Werth eines jeden Leibren-
enthalers finden.

Auflösung. 1. Die Sterblichkeitstafel zeiget, wieviele von diesen anfänglich zusammen getretenen Mitgliedern der Gesellschaft nach Verlauf eines jeden Jahres noch leben, wieviele Rententhaler also in jedem Termin ausgezahlet werden müssen.

2. Alle diese verschiedenen Rententhaler-Summen discontire man auf den Anfang des ersten Jahres, und bringe diese discontirten Summen insgesammt in eine Hauptsumme; so hat man den gegenwärtigen baaren Werth aller Rententhaler, die nach und nach in jedem Zahltermin an die alsdenn noch lebenden Mitglieder ausgezahlet werden müssen.

3. Weil nun vorausgesetzt wird, daß alle Mitglieder gleich alt, und übrigens bey guter Gesundheit sind; (denn kränkliche Personen, die einen nahen Tod befürchten, werden ohnehin nicht in eine solche Gesellschaft treten,) so hat jeder soviele Hofnung zu einem ansehnlichen Alter zu gelangen, als die übrigen alle; darum müssen alle gleichviel zu der nach n. 2. gefundenen Hauptsumme beytragen. Wenn diese also mit der Anzahl aller anfangs zusammentretenden Personen dividirt wird, so giebt der Quotient den gesuchten Werth eines jeden Thalers der Leibrente.

4. Wenn nun A die anfängliche Anzahl aller Mitglieder der Gesellschaft ist; so kann man die Anzahl aller nach 1, 2, 3 .... oder überhaupt nach n Jahren noch lebenden Personen durch die Zeichen ^{1}A, ^{2}A, ^{3}A, oder überhaupt durch ^{n}A, ausdrücken. Wenn ferner die Buchstaben k und $\lambda = \frac{1}{k}$ die schon bekannten Bedeutungen behalten (225. §. 3. Zus.);

so

so wird der gesuchte Werth eines Thalers Leibrente =

$$(^{1}A.\lambda + {}^{2}A.\lambda^{2} + {}^{3}A.\lambda^{3} + \ldots + {}^{n}A.\lambda^{n} \ldots .) : A.$$

5. Die Coefficienten ${}^{1}A$, ${}^{2}A$, ... dieser Reihe würde man dem 228. §. 1. Zus. gemäß aus der Sterblichkeitstafel finden können, wenn die Zahl A von derjenigen Zahl verschieden wäre, welche in der Tabelle neben dem anfänglichen Alter der Gesellschaft aufgeführt ist. Die so gefundenen Coefficienten aber würden gegen die Zahl A in demselben Verhältnisse bleiben, in welchem sich die bey den folgenden Altern aufgeführten Zahlen in der Tabelle gegen die Zahl befinden, welche bey dem anfänglichen Alter stehet: darum kann man die zum anfänglichen Alter gehörige Zahl aus der Tabelle für A annehmen, so sind ${}^{1}A$, ${}^{2}A$, ... die in der Tabelle bey den folgenden Altern aufgeführten Zahlen. Wenn das anfängliche Alter 0 Jahr ist, so setzt man $A = 300$, ${}^{1}A = 291$, ${}^{2}A = 282$, ... Wenn also in dem allgemeinen Ausdruck ${}^{n}A$ die Zahl n so groß wird, als die Ergänzung des Alters der Gesellschaft, (228. §. 2 Zus.) so hat man ${}^{n}A = 0$. Die num. 4. gefundene Reihe muß demnach so weit fortgesetzt werden, bis n um 1 kleiner ist, als die Ergänzung des anfänglichen Alters der Gesellschaft: alsdenn ist der letzte Coefficient $A = 1$.

Zusatz. Das anfängliche Alter der Gesellschaft sey 82 Jahr, so ist der Werth eines Thalers Leibrente

$$= \tfrac{1}{28}(24.\lambda + 20.\lambda^{2} + 17.\lambda^{3} + 14.\lambda^{4} + 12.\lambda^{5} + 10.\lambda^{6} + 8\lambda^{7} + 6\lambda^{8} + 5\lambda^{9} + 4\lambda^{10} + 3\lambda^{11} + 2\lambda^{12} + \lambda^{13}).$$

Die Potenzen von λ nimmt man aus einer Disconto-Tabelle (243. §. Rech.) und

kann hiernächst die Rechnung wie folget einleiten, wobey der Zinsenfuß zu 4 Procent angenommen ist.

Verflossene Jahre	Alter d. Personen	zu zahl. Rententhaler	Auf den Anfang des 1. Jahres discontirte Rententhaler-Summen.
0	82	28	
1	83	24	24 × 0,9615384 = 23,0769216
2	84	20	20 × 0,9245562 18,4911240
3	85	17	17 × 0,8889964 15,1129388
4	86	14	14 × 0,8548042 11,9672588
5	87	12	12 × 0,8219271 9,8631252
6	88	10	10 × 0,7903145 7,9031452
7	89	8	8 × 0,7599178 6,0793424
8	90	6	6 × 0,7306902 4,3841412
9	91	5	5 × 0,7025867 3,5129335
10	92	4	4 × 0,6755642 2,7022568
11	93	3	3 × 0,6495809 1,9487427
12	94	2	2 × 0,6245970 1,2491940
13	95	1	1 × 0,6005741 0,6005741
			Totalsumme 106,8916983

div. 28)

Der Quotient ist 3,81756, und soviel muß eine 82jährige Person gegen jeden Thaler Leibrente zahlen, gegen 100 thlr. Leibrente also 381,756 Thlr.

231. §.

Der Werth eines Thalers Leibrente für ein gewisses Alter ist schon bekannt: man soll ihn für eine Gesellschaft finden, die um 1 Jahr jünger ist.

Aufl. Der gesuchte Werth sey P, und der schon bekannte Werth für die um 1 Jahr ältere Gesellschaft sey Q, so ist

P

$$P = \frac{1}{A}\left({}^{1}A\lambda + {}^{2}A\lambda^2 + {}^{3}A\lambda^3 + \ldots\ldots {}^{n}A\lambda^n\right)$$

$$Q = \frac{1}{{}^{1}A}\left({}^{2}A\lambda + {}^{3}A\lambda^2 + {}^{4}A\lambda^4 + \ldots\ldots {}^{n}A\lambda^n\right).$$

Daraus folgt

$$A.P = {}^{1}A\lambda + {}^{2}A\lambda^2 + {}^{3}A\lambda^3 + \ldots\ldots + {}^{n}A\lambda^n,$$

$${}^{1}A.Q.\lambda + {}^{1}A\lambda = {}^{1}A\lambda + {}^{2}A\lambda^2 + {}^{3}A\lambda^3 + \ldots + {}^{n}A\lambda^n,$$

mithin $P = \frac{{}^{1}A.Q.\lambda + {}^{1}A\lambda}{A}$, oder

$$P = \frac{({}^{1}A.\lambda Q + 1)}{A}.$$

1. Zusatz. Für das Alter von 82 Jahren ist Q = 3,8175606, (230. §.) also Q + 1 = 4,8175606, und die Multiplication mit $\lambda = 0{,}9615384$ giebt 4,6322694 8. Weil nun ${}^{1}A = 28$, $A = 32$, so muß noch mit $\frac{2}{3}\frac{8}{2} = \frac{7}{8}$ multiplicirt werden, und man erhält 4,0532358 als den Werth eines Thalers Leibrente für das Alter von 81 Jahren.

2. Zusatz. Um eine Leibrententafel für alle Alter nach einem vorgeschriebenen Zinsenfuß zu berechnen, macht man am beßten mit dem höchsten Alter den Anfang, und rechnet nach der Ordnung jedesmahl um 1 Jahr weiter zurück für das um 1 Jahr jüngere Alter.

3. Zusatz. Die Tontine ist eine besondere Art von Leibrentengesellschaft, die sich dadurch von der gewöhnlichen uuterscheidet, daß die Rentensumme, welche die ganze Gesellschaft in jedem Zahltermin empfängt, so lange immer einerley bleibt, bis der letzte mit Tode abgehet. Diese unveränderliche Rentensumme wird jedesmahl unter alle noch lebende gleich vertheilt, und wenn zuletzt nur einer allein noch am

Leben ist, so empfängt er eben dieselbe Rentensumme allein, bis sein Tod ebenfalls erfolgt. Ein Franzose Nahmens Tonty soll dem Könige Ludwig XIV den ersten Plan davon übergeben haben, daher ist der Nahme entstanden. Die Mitglieder einer solchen Gesellschaft müssen gleich alt, oder doch beynahe gleich alt seyn: darum vertheilt man die Gesellschaft in Classen von 5 zu 5 Jahren, und schätzt das Alter der ganzen Classe nach der Mittelzahl. Diejenigen, welche zwischen 20 und 25 Jahr alt sind, werden $22\frac{1}{2}$ Jahr alt angenommen. Der gegenwärtige baare Werth der Rente, welche die Gesellschaft in jedem Zahltermin empfängt, wird leicht als der Werth einer gewöhnlichen Zeitrente für so viele Jahre berechnet, als die Altersergänzung der Gesellschaft ausmachen. Nimmt man den Schluß des 96sten Jahres für das höchste Ziel des menschlichen Alters an, so wird die Classe, deren Alter zwischen 20 und 25 Jahren fällt, höchstens 74 Jahre bestehen, und der Werth eines Thalers Rente auf 74 Jahr bey 4 Procent Zinsen ist 23,627625. Soll also die jährliche Rentensumme 1000 Thlr. betragen, so muß ein Capital von 23627,625 Thlr. zusammen gebracht werden; und wenn die Classe aus 100 Personen besteht, so muß jede davon 236,27625 Thlr. erlegen. Dagegen erhält jede am Ende des ersten Jahres schon etwas mehr als 10 Thlr. Rente, weil nach Verlauf desselben wahrscheinlich schon einer aus der Gesellschaft wird mit Tode abgegangen seyn. Wenn die Gesellschaft 57 Jahr alt ist, also nach 33 bis 34 Jahren; so wird die Hälfte mit Tode abgegangen seyn, und jeder empfängt schon 20 Thlr. Rente, bis endlich der letzte jährlich die ganze Summe von 1000 Thlr. erhält.

232.

232. §.

Eine Gesellschaft mehrerer Ehepaare, wovon die Männer unter sich, und die Ehefrauen unter sich ebenfalls gleich alt sind, wollen eine Rentencasse errichten, woraus jedem Ehepaare jährlich so lange eine Rente gezahlt werden soll, bis durch den Tod des einen, oder des andern Ehegatten die Trennung der Ehe erfolgt: man soll den baaren jetzigen Werth eines Thalers einer solchen Ehezeitrente finden.

Aufl. 1. Man suche dem 229. §. gemäß, wie viele ungetrennte Ehen nach Ablauf eines jeden Jahres noch übrig seyn werden, wieviele Rententhaler also jedesmahl ausgezahlt werden müssen.

2. Alle diese Rententhalersummen discontire man auf den Anfang des ersten Jahres, und dividire die Totalsumme mit der Zahl der anfänglich zusammengetretenen Ehepaare, so erhält man den gesuchten Werth.

3. Es sey A die anfängliche Zahl der stehenden Ehen, so ist sie einerley mit der Zahl der anfänglich lebenden Frauen, und dafür kann man die Zahl aus der Sterblichkeitstafel annehmen, die beym anfänglichen Alter der Frau stehet. Die Zeichen ^{1}A, ^{2}A, ... behalten die vorige Bedeutung. Wenn nun beym anfänglichen Alter der Männer die Zahl B in der Tabelle stehet, und die Zeichen ^{1}B, ^{2}B, ... eine ähnliche Bedeutung, wie die vorigen haben; so ist die Zahl der stehenden Ehen

$$\text{nach dem 1. Jahr} = \frac{^{1}B.\,^{1}A}{B},$$

$$\text{nach dem 2. Jahr} = \frac{{}^{2}B \,.\, {}^{2}A}{B},$$

$$\text{nach dem 3. Jahr} = \frac{{}^{3}B \,.\, {}^{3}A}{B},$$

und so ferner fort: mithin ist der Werth eines Thalers der Ehezeitrente

$$= \frac{1}{A \,.\, B}\left({}^{1}B \,.\, {}^{1}A \,.\, \lambda + {}^{2}B \,.\, {}^{2}A \,.\, \lambda^{2} + {}^{3}B \,.\, {}^{3}A \,.\, \lambda^{3} + \ldots . + {}^{n}B \,.\, {}^{n}A \,.\, \lambda^{n}\right)$$

Wenn beyde Eheleute gleich alt sind, so werden beyde Factoren ${}^{n}B$, ${}^{n}A$, zugleich Null, sobald n ihrer Alters-Ergänzung gleich wird. In dem Fall aber, wenn die Eheleute ungleich alt sind, verschwindet der Factor zuerst, der mit dem ältern Ehegatten zusammen gehört, und alsdenn bricht die Reihe ab.

Zusatz. Wäre das anfängliche Alter der Ehefrauen 82 Jahr, der Ehemänner 86 Jahr; so könnte man die im 229. §. schon angefangene Rechnung wie folget weiter fortsetzen

Verflossene Jahre	stehende Ehen		
0	28		
1	20	0,9615385	19,230770
2	14	0,9245562	12,9437868
3	10	0,8889964	8,889964
4	6	0,8548042	5,1288252
5	4	0,8219271	3,2877084
6	3	0,7903145	2,3709435
7	2	0,7599178	1,5198356
8	1	0,7306902	0,7306902
9	0		
		Totalsumme	54,102524

div. 28)

Der Quotient ist 1,88533, und soviel würde jedes Ehepaar gegen 1 Thaler, mithin 188,533 Thlr. gegen 100 Thlr. Ehezeitrente, zahlen müssen.

233. §.

Mehrere Ehepaare, wovon die Männer für sich, und die Ehefrauen ebenfalls für sich in gleichem Alter sind, verbinden sich unter einander eine gesellschaftliche Casse zu errichten, woraus allen Wittwen, die in der Gesellschaft aus den getrennten Ehen entstehen, bis an ihren Tod eine Rente gezahlet werden soll: die Frage ist, wie der gegenwärtige baare Werth einer solchen Wittwenrente gefunden werden könne?

Aufl. 1. Eine solche Wittwenrente unterscheidet sich von der Leibrente nur darin, daß sie nicht mit dem Termin, in welchem die Gesellschaft errichtet

wird, zu laufen anfangen, sondern allererst nach dem Ableben des Ehemannes zahlbar werden soll. Eine Leibrente würde die Frau sowohl während der Ehezeit als auch während ihres Wittwenstandes ziehen, bis sie mit Tode abgienge; also ist der Werth der Leibrente die Summe des Werths der Ehezeitrente und der Wittwenrente zusammen.

2. Man suche also den Werth der Leibrente für die Frau, (230. §.) und den Werth der Ehezeitrente, (232. §.) subtrahire hiernächst den letztern vom erstern; so ist der Rest der gesuchte Werth der Wittwenrente.

1. Zusatz. Für Ehepaare, wovon die Frauen 82 Jahr, die Männer 86 Jahr alt sind, ist der Werth

der Leibrente f. d. Frau = 3,81756 (230. §. Zus.)
der Ehezeitrente = 1,88533 (232. §. Zus.)

also der Wittwenrente = 1,93223 Thlr.

2. Zusatz. Der Werth einer solchen Wittwenrente kann von den zusammentretenden Ehepaaren entweder sogleich baar in einer Summe, oder auch anstatt dessen vermittelst einer Ehezeitrente, unter dem Nahmen eines jährlichen Beytrages zur Casse erlegt werden. Man weiß, daß 1,88533 der baare Werth von 1 Thlr Ehezeitrente für die 82jährige Frau mit dem 86jährigen Manne sey: also kann man ansetzen

1,88533 thlr. — 1 thlr. Ehezeitrente — 1,93223 thlr?

Das Facit ist 1,02488 thlr.

Gegen 100 thlr. Wittwenrente hätte also dieses Ehepaar bis zur Trennung der Ehe 102,488 thlr. an jährlichen Beytrag zu zahlen. Uebrigens siehet man leicht, daß in allen Fällen der jährliche Beytrag gefunden werde, wenn man den Werth der Wittwenrente mit dem Werth der Ehezeitrente dividirt.

3. Zu-

3. Zusatz. Die Rechnung im 232. §. setzt voraus, daß die Ehezeitrente nach Verlauf des ersten Jahres zum erstenmahl erlegt werde: es ist aber bey den Wittwen-Versorgungs-Gesellschaften gewöhnlich eingeführt, daß der jährliche Beytrag sogleich beym Eintritt in die Gesellschaft zum erstenmahl erlegt werde. Hiedurch wird der gegenwärtige baare Werth des jährlichen Beytrages um 1 Thaler grösser, also muß man in solchen Fällen mit dem um Eins vermehrten Werth der Ehezeitrente, mithin in vorigen Exempel mit 2,88533 dividiren, da dann 0,66968 thlr. Beytrag gefunden wird.

Anmerkung. Die mancherley Arten von Rentenrechnungen, wovon die Gründe bisher sind vorgetragen worden, verdienen alle Aufmerksamkeit. Es werden immer noch Renten-Gesellschaften und Versorgungs-Anstalten von allerley Art errichtet, obgleich viele Unternehmungen dieser Art einen schlimmen Ausgang gehabt haben, weil die Unternehmer aufs Gerathewohl gerechnet hatten. M. s. übrigens hievon meine im Jahr 1784 im Druck erschienene Theorie von Wittwencassen ohne Gebrauch algebraischer Rechnungen. (Diese letztern sind vermieden, weil sonst sehr wenige von den Lesern, für die das Buch eigentlich aufgesetzt war, dem Vortrage hätten folgen können.)

Weitere Ausführung der ebenen Geometrie

Der XVI. Abschnitt.

Von den trigonometrischen Linien und ihren Logarithmen.

397. §.

Wenn die Grösse dreyer Stücke vom Umfange eines Dreyeckes vorgeschrieben, und unter denselben wenigstens eine Seite befindlich ist; so ist es nicht mehr willkührlich, wie groß die übrigen drey Stücke ausfallen sollen: (54. 64. 78. 90. §.) selbst alsdenn, wenn nur die Grösse zweyer Winkel ist festgesetzt worden, so ist zugleich das Verhältniß der Seiten gegen einander festgesetzet. (72. 210. §.) Das hat eine sehr vortheilhafte Anwendung sowohl der gemeinen Zahlen-Rechenkunst, als auch der allgemeinen algebraischen Rechenkunst auf die Lehre von den Dreyecken veranlasset, es ist eine Wissenschaft, die den Nahmen Trigonometrie erhalten hat, daraus entstanden, welche nach ihrem jetzigen Zustande aus einer Sammlung ganz allgemeiner Untersuchungen über die Lage grader Linien und ebener Flächen gegeneinander bestehet, wenn gleich der Nahme nur von dem anfänglichen besondern Gebrauch bey Ausmessung und Berechnung der Seiten und Winkel

einer

eines Dreyeckes in Zahlen hergenommen ist. So lange als die Untersuchungen nur auf die Lage grader Linien in einerley Ebene gegen einander eingeschränkt sind, heißt sie die ebene Trigonometrie, auch schlechthin die Trigonometrie.

398. §.

Bey der gewöhnlichen Art, die Grösse eines Win-
kels in Graden und Theilen eines Grades auszudrücken
(267. §. Geom.) ist der rechte Winkel der eigentliche
Maaßwinkel, womit man alle übrige Winkel ver-
gleicht: wenn die Grösse eines Winkels n Grade be-
trägt, so will das sagen, der Winkel sey $= \frac{n}{90}.R$,
vorausgesetzt, daß R einen rechten Winkel bezeichne.
Weil nun jedes Maaß an sich ganz willkührlich ist,
so kann auch anstatt des rechten Winkels jeder andre
Winkel von bekannter Grösse als Maaßwinkel die-
nen. Bey algebraischen Rechnungen ist derjenige
Winkel hiezu vorzüglich bequem, wozu ein Bogen ge-
hört, der seinem Halbmesser gleich ist, (288. §.)
deßwegen könnte man ihn den algebraischen Maaß-
winkel nennen, so wie der rechte Winkel gewöhnlich
als der arithmetische Maaßwinkel dient.

399. §.

Die Länge des aus der Spitze eines Win-
kels als Mittelpunct zwischen seinen Schenkeln
beschriebenen Bogens ist mit dem dazu gehö-
rigen Halbmesser gegeben: man soll die Zahl
finden, welche die Grösse des Winkels aus-
drückt, wenn der algebraische Maaßwinkel
für Eins angenommen wird.

186 Fig. Aufl. Zwischen den Schenkeln des Winkels ACB sey mit dem Halbmesser $AC = r$ ein Bogen AB beschrieben, und der Bogen AP sey dem Halbmesser AC gleich: so ist ACP der algebraische Maaßwinkel. (398. §.) Ferner hat man $AP : AB = ACP : ACB$, (224. §.) also ist $ACB = \frac{AB}{AP} . ACP$. Man setze $ACP = V$, den Bogen $AB = \alpha$, so ist überdem vermöge der Voraussetzung $AP = AC = r$, und man erhält $ACB = \frac{\alpha}{r} . V$.

400. §.

Wenn der algebraische Maaßwinkel für Eins angenommen wird; so ist die Zahl, welche die Grösse eines jeden andern Winkels ausdrückt, mit derjenigen einerley, welche die Länge eines Bogens angiebt, der mit einem für Eins angenommenen Halbmesser zwischen den Schenkeln desselben Winkels beschrieben werden kann.

Beweis. Mit dem Halbmesser $CK = 1$ sey zwischen den Schenkeln des Winkels ACB der Bogen KL beschrieben, so ist $AB : KL = AC : KC$, (225. §.) also auch $\frac{AB}{AC} = \frac{KL}{KC}$. Wenn ferner, wie im 399. §, $AP = AC$ ist, so hat man auch $\frac{AB}{AP} = \frac{KL}{KC}$, oder $KL = \frac{AB}{AP} . KC$. Setzt man überdem, wie im 399. §, $AB = \alpha$, $AP = AC = r$, so ist $KL = \frac{\alpha}{r} . KC$. Wenn demnach KC dem

dem für Eins angenommenen Längenmaasse gleich ist, so wird die Länge des Bogens KL durch die Zahl $\frac{\alpha}{r}$ ausgedrückt, und eben die Zahl giebt die Grösse des Winkels ACB an, wenn der algebraische Maaßwinkel V (399. §.) für Eins angenommen wird.

1. Zusatz. Es sey AQ ein Quadrant von einer Peripherie, wozu der Bogen AP $= r$ gehört, und π sey die halbe Peripherie, also $\frac{1}{2}\pi$ ein Quadrant für den Halbmesser $= 1$: (285. §.) so ist AQ $= \frac{1}{2}\pi . r$. Ferner ist AQ : AP $=$ R : V, mithin $V = \frac{AP}{AQ} . R$, oder $V = \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} . R$. Wenn nun dem 399. §. gemäß $ACB = \frac{\alpha}{r} V$ gefunden ist, so hat man auch $CB = \frac{\alpha}{r} . \frac{1}{\frac{1}{2}\pi} . R$, oder $ACB = \frac{\alpha}{r} . \frac{1}{\pi} . 2R$. Will man also den Winkel ACB in Graden ausdrücken, so setzt man $2R = 180°$, und findet $ACB = \frac{\alpha}{r} . \frac{1}{\pi} . 180°$. In den meisten Fällen wird diese Zahl scharf genug gefunden, wenn man $\frac{1}{\pi} = 0{,}31831$ setzt. (287. §.)

2. Zusatz. Wenn man weiß, daß der Winkel ACB n Grade fasset, so ist $ACB = \frac{n}{90} R$, und

man

man hat $R = \frac{1}{2}\pi . V$ (1. Zus.), also auch $ACB = \frac{n}{90} . \frac{1}{2}\pi . V = \frac{n}{180} . \pi . V$. Auf diese Art läßt sich die Zahl, welche Größe eines Winkels in Graden angiebt, leicht in eine andre verwandeln, wobey der algebraische Maaßwinkel für Eins angenommen wird. Die Zahl $\frac{n}{180}\pi$ ist nun mit der Zahl $\frac{\alpha}{r}$ (399. §.) völlig einerley: denn es ist $180° : n° = \pi r : \alpha$, also $\alpha = \frac{n}{180}\pi r$, oder $\frac{\alpha}{r} = \frac{n}{180}\pi$

401. §.

Es sey ACF ein rechter Winkel, und ACB ein schiefer Winkel, so groß man will; aus der Spitze C dieser Winkel sey mit einem willkührlichen Halbmesser CA = CB ein Bogen beschrieben, der die Schenkel dieser Winkel in A, B, F, schneidet: ist AF ein Quadrant, und der Winkel $ACB = \frac{AB}{AC}$ wenn der algebraische Maaßwinkel $V = 1$ gesetzt wird (399. §.) Man nehme ferner an, daß die Lage der beyden Schenkel CA, CF des rechten Winkels unveränderlich bleibe, wenn gleich CB in jede andre Lage rücken kann: so kann man kurz CB den veränderlichen Schenkel des Winkels ACB nennen. Wenn nun aus dem Durchschnittspunct B dieses veränderlichen Schenkels mit dem Kreisbogen BD auf den einen Schenkel AC, BD aber auf den andern Schenkel CF des rechten Winkels senkrecht gezogen wird; so heißt BD der Sinus, AD der Sinus ver-

sus

sus oder Quersinus des Bogens AB, oder des Winkels ACB $= \frac{AB}{AC}$: auch ist in eben dem Sine BE der Sinus, FE der Quersinus des Bogens FB, oder des Winkels $FCB = FCA - ACB = \frac{FA - AB}{AC} = \frac{1}{2}\pi - \frac{AB}{AC}$, weil $FA = \frac{1}{2}\pi . AC$

7. Um die Grösse eines solchen Sinus oder Quersinus in Zahlen auszudrücken, wird der Halbmesser als das gegebene Längenmaaß angesehen, welches die Sinus und Quersinus auszumessen dienet: daher heißt auch der Halbmesser der ganze Sinus oder Sinus totus.

402. §.

Weil hier der algebraische Maaßwinkel für Eins angenommen wird, so drückt die Zahl $\frac{1}{2}\pi$ die Grösse des rechten Winkels aus, und wenn ACB, wie die Figur vorstellet, ein spitzer Winkel ist; so ist $CB = \frac{1}{2}\pi - \frac{AB}{AC}$ die Ergänzung des Winkels ACB zum rechten Winkel. (26. §.) Demnach ist BE der Sinus und FE der Sinus versus der Ergänzung des Winkels ACB oder $\frac{AB}{AC}$ zum rechten Winkel: anstatt dessen sagt man kürzer, BE sey der Cosinus, FE der Cosinus versus des Bogens AB oder des Winkels $\frac{AB}{AC}$. Der Sprachgebrauch ist entstanden, als man vornemlich nur spitze Winkel in Betrachtung zu ziehen pflegte. Wenn aber auch ACG ein stumpfer Winkel, also $AG > \frac{1}{2}\pi . AC$

ist;

ist; so könnte man doch eben so GH auf AC, GE auf CF senkrecht ziehen: alsdenn ist GH der Sinus, AH der Sinus versus des Winkels ACG. Ferner ist nun FCG ebenfalls = FCA = ACG = $\frac{FA - AG}{AC} = \frac{1}{2}\pi - \frac{AG}{AC}$, und GE der Sinus, FE der Sinus versus dieses Winkels. Der Winkel FCG, welcher nun negativ gefunden wird, weil eine dem Winkel FCB entgegengesetzte Lage hat, bleibt die algebraische Ergänzung des Winkels ACB zum rechten Winkel: also ist in eben dem Sinne, wie vorhin GE der Cosinus FE der Cosinus versus des Winkels ACB.

1. Zusatz. Der Sinus BD des Bogens AB ist zugleich die halbe Sehne des doppelten Bogens BI = 2AB. Denn BD verlängert trift die Kreislinie in P so, daß BD = DP, und der Bogen AB = AI wird. (61. 117. §.) Daher heißt der Quersinus AD auch bey ältern Schriftstellern die Sagitte des Bogens BAP, wozu die Sehne BP gehört.

2. Zusatz. Weil BECD eben so wie CEGH allemahl ein Rechteck wird, so ist nicht allein BE = CD, sondern auch BD = CE, und eine von den Linien, welche die Nahmen Sinus und Cosinus führen, bestimmt allemahl die andre. Wenn der Sinus BD auf CA senkrecht herab gelassen ist, so ist zugleich CD der Cosinus. Sinus und Cosinus sind die beyden Perpendiculärseiten eines rechtwinklichten Dreyeckes, und der Halbmesser CB ist die Hypothenuse.

3. Zusatz. Wenn zwey Winkel ACB, acb (184. 185. Fig.) gleich groß, und die Halbmesser AC

AC, *ac*, ebenfalls gleich groß sind, so sind auch die Sinus BD, *bd*, so wie die Quersinus AD, *ad*, gleich groß. Mit gleichen Winkeln ACB, *acb*, gehören gleiche Ergänzungen FCB, *fcb*, oder FCG, *fcg*, zusammen: also sind auch die Cosinus CD, *cd*, und Cosinus versus, FE, *fe*, von gleicher Grösse.

4. Zusatz. Diese Sätze sind auch umgekehrt wahr: wenn die Sinus, oder Cosinus, die Sinus versus, oder Cosinus versus zweyer Winkel gleich, und die dazu gehörigen Halbmesser ebenfalls gleich sind; so sind die Winkel gleich groß.

403. §.

Es ist gleichgültig, wie groß man den Halbmesser AC annehmen will, so lange der Winkel ACB einerley bleibt, so lange bleibt auch die Zahl $\frac{AB}{AC}$ einerley: aber die Sinus und Quersinus für eben den Winkel werden zugleich mit verändert, wenn man den Halbmesser verändert. Wenn der Halbmesser AC = 1 ist, so nennt man BD und AD den natürlichen Sinus und Quersinus des Bogens oder Winkels AB. Man weiß, daß in diesem Falle ACB = Bog. AB sey, die Zahl nemlich, welche die Grösse des Winkels ACB gegen den algebraischen Maaßwinkel angiebt, ist einerley mit der Zahl, welche die Länge des Bogens AB durch den für Eins angenommenen Halbmesser ausdrückt. Alle übrige Sinus und Quersinus, die zu einem andern Halbmesser gehören, nenne man künstliche Sinus oder Quersinus. Wenn nun α den Bogen AB also $\frac{\alpha}{r}$

den Winkel ACB bezeichnet, AC = r gesetzt; so lasse man die abgekürzten Ausdrücke sin. nat $\frac{\alpha}{r}$, sinv. nat $\frac{\alpha}{r}$ den natürlichen Sinus und Sinus versus des Winkels $\frac{\alpha}{r}$ bezeichnen: oder man schreibe kürzer sin.$\frac{\alpha}{r}$, sinv.$\frac{\alpha}{r}$, wenn von keinen andern als vom natürlichen Sinus oder Quersinus die Rede. Dagegen lasse man die Ausdrücke sin. art$\frac{\alpha}{r}$, sinv. art.$\frac{\alpha}{r}$ den künstlichen Sinus oder Quersinus des Winkels $\frac{\alpha}{r}$ bezeichnen. Im ähnlichen Sinne brauche man auch die Zeichen cos. nat.$\frac{\alpha}{r}$ cosv. nat$\frac{\alpha}{r}$, oder kürzer cos $\frac{\alpha}{r}$, cosv.$\frac{\alpha}{r}$, und cos. art. $\frac{\alpha}{r}$, cosv. art. $\frac{\alpha}{r}$.

404. §.

Der natürliche Sinus oder Quersinus eines Winkels ist gegeben, man soll den künstlichen Sinus oder Quersinus desselben Winkels für einen andern Halbmesser finden.

Aufl. 1. Wenn ACB, *acb*, gleichgrosse schiefe Winkel, ACF, *acf*, rechte Winkel, und in der

185. Figur für den Halbmesser $ac = bc = 1$ der natürliche Sinus bd und natürliche Quersinus ad gezeichnet sind; so sind BCD, bcd, ähnliche Dreyecke, (210. §.) und es ist $bc : BC = bd : BD$, also $1 : r = \text{sin. nat. ACB} : \text{sin. art. ACB}$, mithin $\text{sin. art. ACB} = r . \text{sin. nat. ACK}$. Diesemnach ist auch $\text{cos. art. ACB} = r . \text{cos. nat. ACB}$ (401. §. 3. Zus.)

2. Weil ferner $AD = CA - CD$, und $ad = a - cd$; so hat man $\text{sinv. art. ACB} = r - \text{cos. art. ACB} = r(1 - \text{cos. nat. ACB})$, und $1 - \text{cos. nat. ACB} = \text{sinv. nat. ACB}$, folglich $\text{sinv. art. ACB} = r\,\text{sinv. nat. ACB}$. Eben darum ist auch $\text{cosv. art. ACB} = r . \text{cosv. nat. ACB}$.

Zusatz. Wenn der natürliche Sinus oder Quersinus eines Winkels gefunden ist, so ist zugleich der künstliche Sinus und Quersinus eben desselben Winkels für jeden andern Halbmesser gefunden. Setzt man $AB = \alpha$, $ab = \varphi$, so ist $\varphi = \frac{\alpha}{r}$. Im folgenden kann also kurz $\text{sin}\frac{\alpha}{r}$ oder $\text{sin}\varphi$, $\text{sinv.}\frac{\alpha}{r}$ der $\text{sinv.}\varphi$ geschrieben werden, da dann allemahl die natürlichen Sinus und Quersinus zu verstehen sind, weil die künstlichen Sinus und Quersinus sich daraus von selbst ergeben. Man kann also auch für- $\text{er schreiben sin. art.}\frac{\alpha}{r} = r\,\text{sin.}\frac{\alpha}{r}$, $\text{sin. art.}\frac{\alpha}{r} = r\,\text{sinv.}\frac{\alpha}{r}$. Die Zeichen $\text{sin}\varphi$, $\text{sinv.}\varphi$, $\text{cos}\varphi$, $\text{cosv.}\varphi$, werden in der Rechnung als ein einziger Buchstab behandelt. Wenn also $\text{sin}\varphi^2$, $\text{sin}\varphi''$, $\text{cos}\varphi^2$

$\cos\varphi^2$, $\cos\varphi^n$ geschrieben wird, so muß man nicht die Potenzen von φ, sondern die Potenzen von $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, verstehen.

405. §.

Der Sinus eines Winkels ist gegeben, man soll den Cosinus, Quersinus und Cosinus versus für eben den Winkel finden.

Aufl. Allemahl ist $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1^2$, (401. §. 2. Zus.) also $\cos\varphi = \sqrt{(1 - \sin\varphi)}$. Ferner erhält man $\sin v.\varphi = 1 - \cos\varphi$, und $\cos v.\varphi = 1 - \sin\varphi$.

1. Zusatz. Wenn *b* nach *f* rückt, so fällt *bd* mit *fc* zusammen, also ist $\sin\frac{1}{2}\pi = 1$, und $\sin.\,art.\frac{1}{2}\pi = r$. Demnach ist in allen Fällen der Sinus eines rechten Winkels dem Halbmesser, oder dem Sinus totus gleich. Allemahl fällt auch in der 184 Figur BD mit FC zusammen, wenn B mit F zusammen fällt. Der künstliche Sinus totus $AC = r$ ist hier das, was in der Lehre von den Logarithmen der Modulus ist. (147. §. Allg. Rech.)

2. Zusatz. Weil allemahl $\cos\varphi = \sqrt{(1 - \sin\varphi^2)}$ ist, so hat man $\cos\frac{1}{2}\pi = \sqrt{(1 - \sin\frac{1}{2}\pi^2)} = 0$, also auch $\cos.\,art\frac{1}{2}\pi = r.\cos\frac{1}{2}\pi = 0$: allemahl fällt D in C, wenn B in F fällt, und das giebt $CD = 0$.

3. Zusatz. Wenn der Winkel *acb* 30 Grade, also *acp* 60 Grade fasset; so ist $ab = \frac{1}{3}.\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{6}\pi$, und $bap = \frac{1}{3}\pi$; mithin $bp = ac = 1$, und $bd = \frac{1}{2}$. Das giebt $\sin\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{6}\pi = \sqrt{(1 - \frac{1}{4})} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, oder $\cos\frac{1}{6}\pi =$ 0,866025403784386467637231707 (88. §. Allg. Rech.)

4. Zusatz. Wenn *acb* 45° fasset, so ist $acb = \frac{1}{4}\pi$, mithin auch $dbc = \frac{1}{4}\pi$, und $bd = cd$, oder

$\sin\frac{1}{4}\pi$

$\sin\frac{1}{4}\pi = \cos\frac{1}{4}\pi$. Weil nun $(\sin\frac{1}{4}\pi)^2 + (\cos\frac{1}{4}\pi)^2 = 1$, so giebt das $2(\sin\frac{1}{4}\pi)^2 = 1$, und $\sin\frac{1}{4}\pi = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2} = \cos\frac{1}{4}\pi$: demnach wird $\sin\frac{1}{4}\pi =$ 0,7071067811865 .... gefunden.

406. §.

Sinus und Quersinus, Cosinus und Cosinus versus eines spitzen Winkels ACB werden bey algebraischen Rechnungen positiv angenommen. Der Winkel ACB bleibt positiv, wenn der veränderliche Schenkel CB nach CF und über CF hinaus rückt. Wenn aber CB gegen CA rückt, so kann ACB nicht allein bis auf o abnehmen, wenn CB mit CA zusammen fällt, sondern negativ werden, wenn CB über CA hinaus nach CG rückt. Eine ähnliche Bewandniß hat es mit FCB. Auch dieser Winkel wird positiv angenommen, und bleibt positiv, wenn CB nach CA und über CA hinaus rückt. Wenn aber CB gegen CF rückt, so kann FCB nicht allein bis auf o abnehmen, wenn CB mit CF zusammen fällt, sondern auch negativ werden, wenn CB über CF hinaus nach CG rückt. Damit man übrigens nicht nöthig habe, immer zwey Figuren zu vergleichen, nehme man in der 184 Figur $AC = 1$, $AB = \varphi$ an. Soll alsdenn AC einen andern Halbmesser r vorstellen, so kann man $AB = \alpha$ setzen, und es bleibt $ACB = \frac{\alpha}{r} = \varphi$.

407. §.

Mit dem wachsenden spitzen Winkel ACB wächst der Sinus BD so lange bis $ACB = \frac{1}{2}\pi$, und der Sinus BD dem Halbmesser FC gleich wird: (404. §.

1. Zus.) wenn aber B über F hinaus nach G rückt, so wird der Sinus GH wieder kleiner, und nimmt bis auf o ab, wenn G in K fällt, und $ACG = \pi$ wird. Der Cosinus des spitzen Winkels ACB nimmt ab, wenn ACB wächst, wird $= o$, wenn $ACB = \frac{1}{2}\pi$ wird, (404. §. 2. Zus.) und verfällt in die entgegengesetzte Lage CH, wenn der Winkel ACG stumpf wird. Eben dieser nun negative Cosinus CH wird dem Halbmesser CK gleich, wenn $ACG = \pi$ wird. Demnach ist $\sin\pi = o$, $\cos\pi = -1$.

408. §.

Mit dem wachsenden spitzen Winkel ACB wächst auch der Sinus versus AD, so lange bis $ACB = \pi$ wird. Wenn B in F fällt, so fällt D in C und es wird AD = AC = dem Sinus totus. Rückt B über F hinaus nach G, so fällt D in H, und es ist AH $= \text{sinv. art. } ACG = r\,\text{sinv.}\frac{AG}{r}$. Rückt G bis K, so fällt auch H in K, und aus AH wird AK: demnach ist $\text{sinv.}\frac{1}{2}\pi = 1$, $\text{sinv.}\pi = 2$. Weil übrigens $\text{sinv.}\varphi = 1 - \cos\varphi$ war, so zeigt die Formul schon eben diese Aenderungen an. Wird $\varphi = \frac{1}{2}\pi$, so ist $\cos\frac{1}{2}\pi = o$, also $\text{sinv.}\frac{1}{2}\pi = 1$. Wenn $\varphi > \frac{1}{2}\pi$ ist, so muß man $+\cos\varphi$ anstatt $-\cos\varphi$ schreiben: wird also $\varphi = \pi$, und $\cos\pi = -1$, so folgt von selbst $\text{sinv.}\pi = 2$.

409. §.

Wenn der spitze Winkel ACB wächst, so wird der Cosinus versus FE kleiner, und verschwindet, wenn B in F fällt: also ist $\text{cosv.}\frac{1}{2}\pi = o$, wie auch die Formul $\text{cosv.}\varphi = 1 - \sin\varphi$ anzeigt, wenn $\varphi = \frac{1}{2}\pi$ ge-

gesetzt wird. Rückt B über F hinaus nach G, so wird FE wieder grösser, weil $\sin\Phi$ wieder kleiner wird, und man findet leicht, daß $\text{cosv.}\pi = 1$ sey, weil $\sin\pi = 0$ ist, und E in C fallen muß, wenn G in K fällt.

410. §.

Der Punct G kann noch über K hinaus nach Y rücken, alsdenn wird aus ACG ein erhabener Winkel $ACY = \frac{AGKY}{AC}$, der Sinus HY wird nun negativ, auch bleibt der Cosinus CH negativ. Ist Y bis L gerückt, so wird der Winkel $= \frac{3}{2}\pi$, sein Sinus $CL = -1$, der Cosinus $= 0$. Ferner kann Y über L hinaus nach P rücken, der Winkel $\frac{AFKLP}{AC}$ ist nun grösser als drey rechte Winkel, sein Sinus DP ist noch negativ, und er wird kleiner wenn der Winkel wächst, bis wieder $\sin 2\pi = 0$ wird. Der Cosinus CD ist wieder positiv, er wächst mit dem Winkel bis $\cos 2\pi = 1$ wird.

411. §.

Ein spitzer und stumpfer Winkel, die einander zu zwey, oder vier rechten Winkeln ergänzen, haben gleiche Sinus und Cosinus; nur sind die Sinus im vierten, die Cosinus im zweyten Quadranten negativ. Auch ein spitzer und stumpfer Winkel, die um zwey rechte Winkel verschieden sind, haben gleiche Sinus und Cosinus; es sind sowohl beyde Sinus als auch beyde Cosinus einander entgegengesetzt.

Beweis. 1. Es sey $ACB = \varphi$, und $ACG = \pi - \varphi$, so ist auch $KCG = \pi - ACG = \varphi$. Weil nun ausserdem in den rechtwinklichten Dreyecken BCD, GCH auch $BC = CG$ ist, so hat man $HG = BD$, $CH = CD$, (90. §.) oder algebraisch ausgedrückt $CH = -CD$. Das heißt $\sin(\pi - \varphi) = \sin\varphi$ $\cos(\pi - \varphi) = -\cos\varphi$.

2. Ferner sey der erhabene Winkel $ACY = \frac{AFKY}{AC} = \pi + \varphi$, so ist $KCY = \frac{AFKY}{AC} - \pi = \varphi = ACB$, mithin ist in den Dreyecken BCD und CHY nicht allein $HY = -DB$, sondern auch $CH = -CD$, das will sagen, es ist $\sin(\pi + \varphi) = -\sin\varphi$, $\cos(\pi + \varphi) = -\cos\varphi$.

3. Wenn Y durch L nach P rückt, und $\frac{AFKLP}{AC} = 2\pi - \varphi$ wird; so ist $ACP = 2\pi - \frac{AFKLP}{AC} = \varphi = ACB$; in den Dreyecken CDB und CDP ist $DP = -DB$, und $DP = \sin(2\pi - \varphi)$, also $\sin(2\pi - \varphi) = -\sin\varphi$. Ferner ist die gemeinschaftliche Seite CD beyder Dreyecke sowohl $= \cos(2\pi - \varphi)$ als auch $= \cos\varphi$, mithin $\cos(2\pi - \varphi) = \cos\varphi$.

Zusatz. Man kann diese Schlüsse auch für Winkel die noch grösser, als vier rechte Winkel sind, fortsetzen; hier werden aber anfangs nur solche Winkel betrachtet werden, welche diese Gränze nicht übertreffen. Was für Aenderungen mit dem Quersinus und Cosinus versus eines Winkels vorgehen, wenn derselbe grösser als $\frac{1}{2}\pi$ wird, das ergeben die Formuln $\sin v. \varphi = 1 - \cos\varphi$, und $\cos v. \varphi = 1 - \sin\varphi$ von selbst. Alle Quersinus und Cosinus versus sind

positiv,

positiv, weil $\sin\varphi$, $\cos\varphi$, nie grösser als 1 sind. Wenn also auch $\sin\varphi$, $\cos\varphi$ negativ werden, so kann doch $\text{sinv.}\varphi$, $\text{cosv.}\varphi$, die Gränze 2 nie übertreffen.

412. §.

Es sey wie bisher ACF ein rechter Winkel, und CB der veränderliche Schenkel eines andern Winkels von unbestimmter Grösse, AC = CB = CF, der mit dem Kreise ABFKLA zusammengehörige Halbmesser. Durch A sey eine Tangente des Kreises gezogen, die also auf AC senkrecht seyn muß, (126. 127. §.) und wenn ACB ein spitzer Winkel ist, den veränderlichen Schenkel CB in T oberhalb A schneidet: so heißt AT die Tangente CT die Secante des Winkels ACB $= \frac{AB}{AC}$. Wenn eben so durch F eine Tangente gezogen wird, welche CB in V schneidet, so ist FV die Tangente CV die Secante des Winkels $FCB = \frac{1}{2}\pi - \frac{AB}{AC}$. Eigentlich wäre also FV die Tangente, CV die Secante der Ergänzung des Winkels ACB zum rechten Winkel. Anstatt dessen nennt man auch kürzer FV die Corangente, CV die Cosecante des Winkels $ACB = \frac{AB}{AC}$. 184 Fig.

413. §.

Wenn gleich der veränderliche Schenkel CB in die Lage CG rückt, und ACG ein stumpfer Winkel, also $FCG = FCA - ACG = \frac{1}{2}\pi - \frac{AFG}{AC}$, als die algebraische Ergänzung des Winkels ACG zum rechten

Winkel negativ wird; so bleibt FW die Cotangente CW die Cosecante des stumpfen Winkels ACG. Eben dieses Winkels Tangente ist nun AS die Secante CS, beyde in Ansehung der Lage den vorigen AT und CT entgegen gesetzt.

1. Zusatz. Tangente und Secante sind die Perpendiculärseiten AT, AC im rechtwinklichten Dreyeck, und die Secante CT ist die Hypothenuse. Eine ähnliche Bewandniß hat es mit der Cotangente FV dem Halbmesser CF und der Cosecante CW.

2. Zusatz. Wenn zwey Winkel ACB, *acb* gleich groß, und die Halbmesser AC, *ac* ebenfalls gleich groß sind, so sind auch die Tangenten AT, *at*, die Secanten CT, *ct*, die Cotangenten FV, *fv*, die Cosecanten CV, *cv*, von gleicher Grösse.

3. Zusatz. Auch umgekehrt: wenn einerley Halbmesser vorausgesetzt wird, und mit zweyen Winkeln gleiche Tangenten oder Cotangenten, gleiche Secanten, oder Cosecanten zusammen gehören; so sind die Winkel gleich groß.

414. §.

Wenn der halbmesser $ac = 1$ ist, so nenne man *at*, *ct*, die natürliche Tangente oder Secante, *fv*, *cv*, natürliche Cotangente oder Cosecante des Winkels *acb*: alle übrige Tangenten und Secanten, also auch Cotangenten und Cosecanten, die mit einem andern Halbmesser zusammen gehören, nenne man künstliche. Ist $acb = \varphi$, so schreibe man in jenem Fall tang. nat.φ, sec. natφ, cot. nat.φ, cosec. nat.φ, oder kürzer tang.φ, secφ, cotφ, cosecφ; in diesem Fall aber tg. art.φ, sec. art.φ, cot. art.φ, cosec. art.φ. Die Sinus, Quersinus, Tangenten,

nd Secanten, also auch die Cosinus, Cosinus ver-
us, Cotangenten und Cosecanten nenne man über-
haupt trigonometrische Linien. Gleichnahmige
rigonometrische Linien sind alsdenn solche, die einer-
y Nahmen führen.

415. §.

Die natürliche Tangente, oder Secante eines Winkels ist gegeben, man soll die künstliche Tangente oder Secante desselben Winkels für einen andern Halbmesser finden.

Aufl. Wenn die Winkel ACB, *acb*, gleich groß, 184
in beyden Figuren aber die Tangenten AT, *at*, und 185
Secanten CT, *ct*, gezeichnet sind, und der Halb- Fig.
messer $ac = 1$ ist; so sind ACT, *act* ähnliche Dreyecke, und es ist $ac : AC = at : AT$, also $1 : r$ = tang. nat. ACB tg. art. ACB; überdem ist $ac : AC = ct : CT$, oder $1 : r$ = sec. nat. ACB : sec. art. ACB. Daraus folgt tg. art. ACB $= r$ tg. nat. ACB, und sec. art. ACB $= r$. sec. nat. ACB.

Zusatz. Wenn demnach AB $= \alpha$ gesetzt wird, so ist auch cot. art. $\frac{\alpha}{r} = r$ cot $\frac{\alpha}{r}$, cosec. art. $\frac{\alpha}{r} = r$. cosec $\frac{\alpha}{r}$ weil man kürzer cot. $\frac{\alpha}{r}$, sec $\frac{\alpha}{r}$, schreiben kann, wenn das natürliche trigonometrische System verstanden wird.

416. §.

Eine Reihe von Zahlen, welche die Grösse der zu einerley Halbmesser gehörigen trigonometrischen Linien, für alle Winkel von 0° bis 90° von Minute zu Minute,

nute, vielleicht von Secunde zu Secunde angeben, nenne man ein trigonometrisches System. Das natürliche trigonometrische System ist alsdenn das für den Halbmesser = 1 berechnete: alle übrige nenne man künstliche trigonometrische Systeme.

Zusatz. Wenn nur ein für allemahl das natürliche trigonometrische System berechnet ist, so kann man leicht die zu jedem künstlichen System gehörigen trigonometrischen Linien finden, weil nur die Multiplication mit dem Halbmesser als Modulus des Systems nöthig ist. Im folgenden wird also nur von den natürlichen trigonometrischen Linien die Rede seyn, wofern nicht ausdrücklich das Gegentheil erinnert wird.

417. §.

Der Sinus eines Winkels ist gegeben, man soll die Tangente, Corangente, Secante und Cosecante desselben Winkels finden.

Aufl. 1. Allemahl ist $\cos\varphi = \sqrt{(1 - \sin\varphi^2}$ (404. §.) wenn $ACB = \frac{\alpha}{r} = \varphi$ gesetzt wird.

Ferner ist das Dreyeck ACT ~ BCD, CD : DB = CA : AT, oder $\cos\varphi : \sin\varphi = 1 : \text{tang}\varphi$, also $\text{tang}\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi}$. Weil überdem $\sec\varphi^2 = 1 + \text{tang}\varphi^2$, (408. §. 1 Zus.) so hat man auch $\sec\varphi = \sqrt{(1 + \text{tg}\varphi^2)}$.

2. Die Dreyecke ACT, FCV, sind einander ebenfalls ähnlich: also ist AT : AC = CF : FV, oder $\text{tg}\varphi : 1 = 1 : \cot\varphi$, mithin allemahl $\text{tg}\varphi \times \cot\varphi = 1^2$,

und

nd $\cot\varphi = \frac{1}{\operatorname{tg}\varphi} = \frac{\operatorname{col}\varphi}{\operatorname{sin}\varphi}$. Daraus wird $\operatorname{colec}\varphi$
$= \sqrt{(1 + \cot\varphi^2)}$ gefunden. (408. §. 1. Zus.)

3. Aus der Aehnlichkeit der Dreyecke ACT, BCD, lgt ferner CD : CB = AC : CT, oder $\operatorname{col}\varphi : 1 = 1 :$
$\operatorname{c}\varphi$, mithin $\operatorname{sec}\varphi = \frac{1}{\operatorname{col}\varphi}$. Weil überdem auch
CE, FCV, ähnliche Dreyecke sind; so hat man
E : CB = CF : CV, oder $\operatorname{sin}\varphi : 1 = 1 : \operatorname{colec}\varphi$,
glich $\operatorname{colec}\varphi = \frac{1}{\operatorname{sin}\varphi}$.

418. §.

Die Gesetze, nach welchen sich Tangente, Cotangente, Secante, Cosecante, eines Winkels ändern, nn der Winkel wächst oder abnimmt, kann man ar leicht aus Betrachtung der Figur herleiten: weil aber insgesammt vom Sinus und Cosinus abngen; (411. §.) so weiß man das alles von selbst, nn man sich aus dem 405. und 406. §. erinnert, ch welchen Gesetzen sich Sinus und Cosinus ändern.

Wenn φ einen spitzen Winkel bezeichnet, so sind
$\operatorname{g}\varphi = \frac{\operatorname{sin}\varphi}{\operatorname{col}\varphi}$, $\cot\varphi = \frac{\operatorname{col}\varphi}{\operatorname{sin}\varphi}$, $\operatorname{sec}\varphi = \frac{1}{\operatorname{col}\varphi}$,
$\operatorname{sec}\varphi = \frac{1}{\operatorname{sin}\varphi}$ positiv: $\operatorname{tang}\varphi$, $\operatorname{sec}\varphi$, wachsen
it φ, weil $\operatorname{sin}\varphi$ wächst und $\operatorname{col}\varphi$ abnimmt. Wird
$= \frac{1}{2}\pi$, so wird $\operatorname{sin}\frac{1}{2}\pi = 1$, $\operatorname{col}\frac{1}{2}\pi = 0$, also
$\operatorname{ng}\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{0} = \infty$, $\operatorname{sec}\frac{1}{2}\pi = \frac{1}{0} = \infty$. (31. §. Allg.
lech.) Weiter ist

$\operatorname{tg}(\pi - \varphi)$

$$\operatorname{tg}(\pi-\varphi)=\frac{\sin(\pi-\varphi)}{\cos(\pi-\varphi)}=\frac{\sin\varphi}{-\cos\varphi}=-\operatorname{tg}\varphi$$

$$\sec(\pi-\varphi)=\frac{1}{\cos(\pi-\varphi)}=\frac{1}{-\cos\varphi}=-\sec\varphi$$

$$\operatorname{tg}(\pi+\varphi)=\frac{\sin(\pi+\varphi)}{\cos(\pi+\varphi)}=\frac{-\sin\varphi}{-\cos\varphi}=\operatorname{tg}\varphi;$$

$$\sec(\pi+\varphi)=\frac{1}{\cos(\pi+\varphi)}=\frac{1}{-\cos\varphi}=-\sec\varphi$$

$$\operatorname{tg}(2\pi-\varphi)=\frac{\sin(2\pi-\varphi)}{\cos(2\pi-\varphi)}=\frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}=-\operatorname{tg}\varphi$$

$$\sec(2\pi-\varphi)=\frac{1}{\cos(2\pi-\varphi)}=\frac{1}{\cos\varphi}=\sec\varphi$$

419. §.

Aus den Formuln für die Cotangente und Cosecante leitet man leicht ähnliche Folgen her. Es ist

$$\cot(\pi-\varphi)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi-\varphi)}=-\cot\varphi;$$

$$\operatorname{cosec}(\pi-\varphi)=\frac{1}{\sin(\pi-\varphi)}=\frac{1}{\sin\varphi}=\operatorname{cosec}\varphi$$

$$\cot(\pi+\varphi)=\frac{1}{\operatorname{tg}(\pi+\varphi)}=\cot\varphi$$

$$\operatorname{cosec}(\pi+\varphi)=\frac{1}{\sin(\pi+\varphi)}=\frac{1}{-\sin\varphi}=-\operatorname{cosec}\varphi$$

$$\cot(2\pi-\varphi)=\frac{1}{\operatorname{tg}(2\pi-\varphi)}=-\cot\varphi$$

$$\operatorname{cosec}(2\pi-\varphi)=\frac{1}{\sin(2\pi-\varphi)}=\frac{1}{-\sin\varphi}=-\operatorname{cosec}\varphi$$

Ta

Tangente und Cotangente können von der Gränze
bis zur Gränze ∞ wachsen, Secante und Cosecante
önnen nie kleiner als 1 werden. Weil sin45°
= cos45°, (405. §. 4 Zus.) so ist tang 45° = 1
= cot 45°. Tangente und Cotangente eines nega-
ven Winkels sind der Tangente oder Cotangente ei-
es eben so grossen positiven Winkels gleich und entge-
n gesetzt.

421. §.

Ein veränderlicher Winkel ACB, wenn derselbe
ich und nach kleiner wird, und bis auf o abnimmt,
m hiernächst in die entgegengesetzte Lage wie ACP
ergehen. Nun ist DP der Sinus, CD der Cosi-
s des negativen Winkels ACP = $\frac{-AP}{AC}$, und
D der Quersinus. Der Sinus dieses Winkels ist
r sich so groß als der Sinus des ihm entgegen gesetz-
1 eben so grossen positiven Winkels ACB, nur mit
tgegen gesetzter Lage. Der Cosinus ist dem Cosi-
s des entgegen gesetzten eben so grossen positiven
inkels ebenfalls gleich mit übereinstimmiger Lage.
emnach ist $\sin. -\varphi = -\sin\varphi$, $\cos -\varphi = \cos\varphi$.
enn dies richtig ist, so lange $-\varphi$ spitz bleibt, so
ibt es auch richtig wenn $-\varphi$ ein stumpfer Winkel
rd, wovon man sich leicht durch Betrachtung der
gur überzeugt. Wenn CP durch CL, CK, CF,
ch CA rückt, so bleiben die Sinus im ersten und
eyten Quadranten negativ, und werden im dritten
d vierten Quadranten positiv; die Cosinus sind,
ie für die positiven Winkel im zweyten und dritten
uadranten negativ, im vierten aber wieder positiv.

Zusatz. Weil die algebraischen Formuln es erge-
n, wie die übrigen trigonometrischen Linien vom

Sinus

Sinus und Cosinus abhängen, so zeigen sie zugleich, wie sich ihre Lage ändert, wenn der dazu gehörige Winkel negativ wird. Es ist $\text{tang.}-\varphi = \frac{-\sin\varphi}{\cos\varphi}$ $= -\text{tang}\varphi$; $\text{sec.}-\varphi = \frac{1}{\cos\varphi} = \text{sec}\varphi$; $\text{cot.}-\varphi$ $= \frac{1}{-\text{tg}\varphi} = -\cot\varphi$; $\text{cosec}\varphi = \frac{1}{-\sin\varphi} =$ $-\text{cosec}\varphi$. Die Quersinus und Cosinus versus der negativen Winkel bleiben positiv, und sind wie für positive Winkel zwischen den Gränzen 0 und 2 enthalten.

422. §.

Wenn der Winkel $ACP = \frac{BAP}{AC} = \gamma$ gesetzt, und die mit dem Halbmesser $= 1$ zusammengehörige Sehne des Bogens γ kurz auf die Art $\text{chord.}\gamma$ bezeichnet wird, so ist $\text{chord}\,\gamma = 2\sin\frac{1}{2}\gamma$, und $\sin$ $= \frac{1}{2}\text{chord.}2\varphi$. (401. §. 1. Zus.) Anstatt $\text{chord}(\pi-$ schreibe man $\text{chord. compl.}\gamma$, so ist chord. compl. $= 2\sin\frac{1}{2}(\pi-\gamma) = 2\sin(\frac{1}{2}\pi - \frac{1}{2}\gamma)$, oder chord $\text{compl.}\gamma = 2\cos\frac{1}{2}\gamma$. Wenn nun $\frac{1}{2}\gamma = \varphi$, also $\gamma = 2\varphi$ gesetzt wird, so ist umgekehrt $\cos\varphi =$ $\frac{1}{2}\text{chord. compl.}2\varphi$.

1. Zusatz. Die Berechnung der Sehnen des Kreises hängt also von der Berechnung der Sinus, und umgekehrt die Berechnung der Sinus von der Berechnung der Sehne ab. Weil ältere Schriftsteller noch die Sehnen anstatt der Sinus brauchen, so ist es nützlich zu bemerken, daß man die Formuln für die Sinus und Cosinus leicht in Formuln für die

Sehnen und Sehnen der Ergänzung verwandeln könne, um dem Vortrage jener Schriftsteller desto leichter zu folgen.

2. Zusatz. Weil $\sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 = 1$, so ist zugleich $\frac{1}{4}(\text{chord}.2\varphi)^2 + \frac{1}{4}(\text{chord. compl.}\,2\varphi)^2 = 1$, also $(\text{chord}.\gamma)^2 + (\text{chord. compl.}\,\gamma)^2 = 4$, da dann 4 das Quadrat des Durchmessers ist. Aus der Figur erhellet die Richtigkeit der Formul ebenfalls leicht nach dem Pythagorischen Lehrsatz. Aus der Sehne für den Halbmesser 1 hat man sie leicht für jeden andern Halbmesser r, wenn man mit r multiplicirt.

3. Zusatz. Wenn man voraussetzt, daß n eine ganze Zahl bezeichne, und φ einen Bogen für den Halbmesser $= 1$; so ist allemahl $\frac{\varphi}{\sin\varphi} > 1$, also auch $\frac{\frac{1}{n}\varphi}{\sin\frac{1}{n}\varphi} > 1$. Nimmt man ferner an, daß sich der Gränze ∞ nähere, so nähert sich $\frac{\frac{1}{n}\varphi}{\sin\frac{1}{n}\varphi}$ der Gränze 1. Denn es ist allemahl $\sin\frac{1}{n}\varphi = \text{chord}\frac{1}{n}.2\varphi$, also auch $\frac{\frac{1}{n}\varphi}{\sin\frac{1}{n}\varphi} = \frac{\frac{1}{n}\,2\varphi}{\text{chord}\frac{1}{n}2\varphi}$, und die Gränze dieses Werthes ist $= 1$. (41. §. Allg. Rech. Zus.)

4. Zusatz. Demnach ist auch die Gränze des veränderlichen Werthes $\frac{\frac{1}{n}\varphi}{\text{tang}\frac{1}{n}\varphi} = 1$, wenn gleich übrigens allemahl $\frac{\frac{1}{n}\varphi}{\text{tang}\frac{1}{n}\varphi} < 1$ bleibt. Denn

es ist allemahl $\frac{\frac{1}{n}\varphi}{\text{tang}\frac{1}{n}\varphi} = \frac{\frac{1}{n}\varphi}{\sin\frac{1}{n}\varphi} \cdot \cos\frac{1}{n}\varphi$, (417. §.) mithin die Gränze $= 1$, weil auch $\cos\frac{1}{n}\varphi = 1$ wird.

5. Zusatz. Jede Secante ist grösser als der Halbmesser. Wenn aber $\frac{1}{m}$ einen gegebenen so kleinen Bruch, wie man will bezeichnet, so kann man einen so kleinen Bogen ψ angeben, daß $\sec\psi < 1 + \frac{1}{m}$ wird. (222. §. Zus.) Weil ferner allemahl $\sec\psi \cos\psi = 1$ bleibt, (417. §. n. 3) so ist alsdenn $\cos\psi > \frac{1}{1+\frac{1}{m}}$, also $\cos\psi > 1 - \frac{1}{m+1}$. Weil auch $1 - \frac{1}{m+1} > 1 - \frac{1}{m}$, so ist alsdenn $\cos\psi > 1 - \frac{1}{m}$.

423. §.

Wenn die Sinus und Cosinus zweyer Winkel $ACB = \alpha$, $BCD = \beta$ gegeben sind, den Sinus und Cosinus der Summe oder auch der Differenz beyder Winkel zu finden.

187 Fig. Aufl. 1. Es sey $AC = CB = 1$, $BE = \sin\alpha$, $CE = \cos\alpha$, $DG = \sin\beta$, $CG = \cos\beta$. Weil ferner $ACD = \alpha + \beta$ ist, so hat man auch $DF = \sin(\alpha+\beta)$, $CF = \cos(\alpha+\beta)$. Durch G ziehe man GH auf AC und GK auf DF senkrecht, so hat man $BC : BE = GC : GH$, oder $1 : \sin\alpha = \cos\beta : GH$, also $GH = \sin\alpha \cdot \cos\beta = KF$. Wenn ferner BC

und

und DF einander in L schneiden, so sind die Winkel GLD, FLC, gleich groß, mithin ist auch ACB = GDK, und das Dreyeck BCE ~ DKG. Daraus folgt BC : CE = DG : DK, oder 1 : cosα = sinβ : DK, also ist DK = cosα . sinβ, und man erhält DF = FK + DK, also sin(α + β) = sinα . cosβ + cosα . sinβ.

2. Ferner ist BC : CE = CG : CH, oder 1 : cosα = cosβ : CH, also CH = cosα . cosβ; auch ist überdem BC : BE = DG : GK, oder 1 : sinα = sinβ : GK, also GK = sinα . sinβ = HF. Weil nun CF = CH — HF ist, so erhält man cos(α + β) = cosα cosβ — sinα sinβ.

Nun sey β negativ, so wird

3. sin(α — β) = sinα cosβ — cosα sinβ, und

4. cos(α — β) = cosα cosβ + sinα sinβ. (421. §.)

Zusatz. Weil $\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos(\alpha + \beta)}$ (417. §.) so ist auch $\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\sin\alpha \cos\beta + \cos\alpha \sin\beta}{\cos\alpha \cos\beta - \sin\alpha \sin\beta}$. Man dividire im Zähler und Nenner mit cosα cosβ, so findet man

$$\text{tang}(\alpha + \beta) = \frac{\text{tang}\alpha + \text{tang}\beta}{1 - \text{tang}\alpha\, \text{tang}\beta}.$$

424. §.

Aus dem Sinus und Cosinus eines Winkels α, den Sinus und Cosinus des doppelten Winkels 2α auch des dreyfachen Winkels 3α zu finden.

Aufl. Wenn man $\alpha = \beta$ setzt, so findet man sin2α = 2 sinα cosα, und cos2α = cosα^2 — sinα^2.

Setzt man $\alpha = 2\beta$, so erhält man $\sin.3\beta = \sin 2\beta . \cos\beta + \cos 2\beta \sin\beta$, und $\cos 3\beta = \cos 2\beta . \cos\beta - \sin 2\beta \sin\beta$. Wenn hier $\sin 2\beta = 2\sin\beta \cos\beta$, und $\cos 2\beta = \cos\beta^2 - \sin\beta^2$ gesetzt wird, so erhält man $\sin 3\beta = 3\sin\beta \cos\beta^2 - \sin\beta^3$, und $\cos 3\beta = \cos\beta^3 - 3\cos\beta . \sin\beta^2$.

425. §.

Aus dem Cosinus eines Winkels den Sinus und Cosinus seiner Hälfte zu finden.

Aufl. 1. Man setze $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$, also $2\alpha = \gamma$, so verwandelt sich die zuletzt gefundene Gleichung in folgende $\cos\gamma = \cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2$. Man setze ferner $1 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2$ anstatt $\cos\frac{1}{2}\gamma^2$, so wird $\cos\gamma = 1 - 2\sin\frac{1}{2}\gamma^2$, und man findet $\sin\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1-\cos\gamma}{2}}$.

2. Wenn in der Gleichung $\cos\gamma = \cos\frac{1}{2}\gamma^2 - \sin\frac{1}{2}\gamma^2$ der Werth $\sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 - \cos\frac{1}{2}\gamma^2$ gebraucht wird, so erhält man $\cos\gamma = 2\cos\frac{1}{2}\gamma^2 - 1$, und daraus ferner $\cos\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1+\cos\gamma}{2}}$.

426. §.

Aus dem gegebenen Sinus und Cosinus eines Winkels den Sinus und Cosinus des vierfachen auch überhaupt eines jeden vielfachen Winkels zu finden.

Aufl. Wenn β den einfachen Winkel, und n eine ganze Zahl bezeichnet, so ist überhaupt

$$\sin.n\beta = n\sin\beta^3 . \cos\beta^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\sin\beta^3 . \cos\beta^{n-3} + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\sin\beta^5 . \cos\beta^{n-5} - \ldots$$

Der

Der allgemeine Ausdruck eines jeden Gliedes dieser Reihe, dessen Index r ist, das erste nicht mitgezählt, ist

$$\frac{n.(n-1)(n-2).....(n-2r)}{1.2.3.....2r+1} \sin\beta^{2r+1}.\cos\beta^{n-(2r+1)},$$

und man muß — oder + voransetzen, nachdem r eine grade oder ungrade Zahl ist. Ferner hat man

$$\cos n\beta = \cos\beta^n - \frac{n.n-1}{1.2} \sin\beta^2 \cos\beta^{n-2}$$

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4} \sin\beta^4 \cos\beta^{n-4}$$

$$\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.n-5}{1.2.3.4.5.6} \sin\beta^6 \cos\beta^{n-6} + ...$$

Der allgemeine Ausdruck eines jeden Gliedes, wozu der Index r gehört, das erste Glied nicht mitgezählt, ist

$$\frac{(n-1)(n-2).....n-(2r-1)}{1.2.3.4.....2r} \sin\beta^{2r} \cos\beta^{n-2r},$$

und man setzt — oder + voran, nachdem r eine grade oder eine ungrade Zahl ist.

Beweis. Beyde Gleichungen sind richtig, wenn $n = 2$, auch wenn $n = 3$ ist. (423. §. 1. Zus.) In der Formul des 423. §. setze man $\alpha = n\beta$, so findet man

$$\sin(n+1)\beta = \sin n\beta.\cos\beta + \cos n\beta.\sin\beta,$$
$$\cos(n+1)\beta = \cos n\beta \cos\beta - \sin n\beta.\sin\beta,$$

und diese Gleichungen ergeben, nach welchem Gesetze Sinus und Cosinus des vielfachen Winkels $(n+1)\beta$ aus dem Sinus und Cosinus des nächstvorhergehenden vielfachen entstehen. Man nehme also an, daß die in der Auflösung angenommenen

Gleichungen für $\sin n\beta$ und $\cos n\beta$ richtig sind, und suche daraus die Gleichungen für $\sin(n+1)\beta$ und $\cos(n+1)\beta$, setze aber um etwas abzukürzen $\sin\beta = s$, $\cos\beta = c$: so findet man

$$\sin n\beta . \cos\beta = ns . c^n - \frac{n . n-1 . n-2}{1 . 2 . 3} s^3 . c^{n-2} + \ldots$$

$$\mp \frac{n . (n-1) \ldots (n-(2r-1))(n-2r)}{1 . 2 . 3 \ldots . 2r . (2r+1)} s^{2r+1} . c^{n-2r}$$

$$\cos n\beta . \sin\beta = s . c^n - \frac{n . n-1}{1 . 2} . s^3 . c^{n-2} + \ldots$$

$$\mp \frac{n . (n-1) \ldots n-(2r-1)}{1 . 2 . 3 \ldots . 2r} s^{2r+1} . c^{n-2r}$$

Beydes addirt giebt $\sin(n+1)\beta =$

$$(n+1)s . c^n - \frac{(n+1) . n . (n-1)}{1 . 2 . 3} s^3 . c^{n-2} + \ldots$$

$$\mp \frac{(n+1) . n . (n-1) \ldots n+1-2r}{1 . 2 . 3 \ldots (2r+1)} s^{2r+1} . c^{n-2r}$$

Ferner findet man

$$\cos n\beta . \cos\beta = c^{n+1} - \frac{n . n-1}{1 . 2} s^2 . c^{n-1} + \ldots$$

$$\mp \frac{n . (n-1) . (n-2) \ldots (n-(2r-1))}{1 . 2 . 3 . 4 \ldots (2r-1) 2r} s^{2r} . c^{n-2r+1}$$

$$-\sin n\beta . \sin\beta = -\frac{n}{1} . s^2 . c^{n-1} + \ldots$$

$$\mp \frac{n . (n-1) \ldots n-(2r-2)}{1 . 2 . 3 \ldots . (2r-1)} s^{2r} . c^{n-2r+1}$$

also erhält man $\cos(n+1)\beta =$

$$c^{n+1} - \frac{(n+1)n}{1 . 2} s^2 . c^{n-1} + \ldots$$

$\mp$

$$\mp\frac{(n+1)n.(n-1)....(n+2r-(2r-1))}{1.2.3.....(2r-1).2r}s^{2r}.c^{n-2r+1}.$$

Diese beyden Gleichungen erhält man auch aus den für $\sin n\beta$ und $\cos n\beta$ angenommenen Gleichungen, wenn man in diesen allenthalben $n+1$ anstatt n setzet. Wenn also diese Gleichungen für $n\beta$ richtig sind, so bleiben sie auch für $(n+1)\beta$ richtig. Nun ist ihre Richtigkeit bewiesen, wenn $n=2$, auch wenn $n=3$ ist, mithin sind sie auch richtig für $n=4$, $n=5$, und überhaupt für jede ganze Zahl, die man anstatt n setzen will.

427. §.

Wenn β ein veränderlicher Kreisbogen für den Halbmesser $=1$, $n\beta=\gamma$ aber ein andrer Bogen für eben den Halbmesser ist, der von beständiger Grösse bleibt, wenn β abnimmt, und zuletzt verschwindet: so ist die Gränze des Werths $\cos\beta^n=1$.

Beweis. Es ist $\sin\frac{1}{2}\beta=\sqrt{\frac{1-\cos\beta}{2}}$, (423. §. 2 Zus.) also $\cos\beta=1-2(\sin\frac{1}{2}\beta)^2$. Ferner ist $2\sin\frac{1}{2}\beta=\text{chord}.\beta$, (422. §.) also wird $\cos\beta=1-\frac{1}{2}(\text{chord}\beta)^2$, und man erhält

$$\cos\beta^n=1-\tfrac{1}{2}.n.(\text{chord}.\beta)^2+\tfrac{1}{4}.\frac{n.n-1}{1.2}(\text{chord}\beta)^4-....$$

oder $\cos\beta^n=$

$$1-\tfrac{1}{2}.\frac{\gamma}{\beta}.(\text{chord}.\beta)^2+\tfrac{1}{4}.\tfrac{1}{2}.\frac{\gamma}{\beta}.\left(\frac{\gamma}{\beta}-1\right)(\text{chord}.\beta)^4-..$$

Wenn aber β verschwindet, so ist die Gränze des

Werths $\frac{\text{chord.}\beta}{\beta} = 1$, also wird in eben dem Falle $\text{cof}\beta^n = 1$.

Zusatz. Wenn man $\frac{1}{m}$ anstatt n setzt, so hat man $\text{cof}\beta^{\frac{1}{m}} = 1 - \frac{1}{m} \cdot \frac{1}{2}(\text{chord}\beta)^2 + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{m} \cdot \left(\frac{1}{m} - 1\right)(\text{chord}\beta)^4 - \ldots$ und wenn statt m die Gränze ∞ gesetzt wird, so findet man ebenfalls die Gränze des Werths $\text{cof}\beta^{\frac{1}{m}} = 1$.

428. §.

Es ist die Zahl gegeben, welche die Grösse eines Winkels in Vergleichung mit dem algebraischen Maaßwinkel ausdrückt, oder welches einerley ist, die Länge eines mit dem Halbmesser $= 1$ beschriebenen Kreisbogens: man soll den dazu gehörigen Sinus und Cosinus finden.

Aufl. Es sey γ der gegebene Bogen, so ist

$\sin\gamma = \gamma - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3}\gamma^3 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} \cdot \gamma^5 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{7} \cdot \gamma^7 + \ldots$

$\cos\gamma = 1 - \frac{1}{2}\gamma^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \gamma^4 - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{6}\gamma^6 + \ldots$

Beweis. In den Formuln für $\sin n\beta$ und $\cos n\beta$ (424. §.) setze man $n\beta = \gamma$, nehme γ für einen beständigen, β aber für einen veränderlichen Bogen an: so hat man $\beta = \frac{1}{n}\gamma$. Wenn man hiernächst $\beta = 0$ setzt, so muß $\frac{1}{n} = 0$, oder welches einer-

ley

ey ist $n = \infty$ werden: (31. §. Allg Rech.) auch iebt eben die Voraussetzung $\cos\beta^n = 1$. (425. §.) Es ist aber $\sin n\beta =$

$$\beta.\frac{\sin\beta}{\beta}\cos\beta^{n-1} - \frac{n.n-1.n-2.\beta^3}{1.2.3}.\frac{\sin\beta^3}{\beta^3}.\cos\beta^{n-3}$$
$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4.\beta^5}{1.2.3.4.5}.\frac{\sin\beta^5}{\beta^5}.\cos\beta^{n-5} - \ldots.$$

o man auch γ statt $n\beta$ setzen kann, da dann

$$n\gamma = \gamma.\frac{\sin\beta}{\beta}.\cos\beta^{n-1} - \frac{\gamma.\gamma-\beta.\gamma-2\beta}{1.2.3}.\frac{\sin\beta^3}{\beta^3}.\cos\beta^{n-3}+\ldots$$

efunden wird. In dieser Gleichung kann jeder Berth statt β gesetzt werden, und wenn $\beta = 0$ ge-

tzt wird, so ist die Gränze des Werths $\frac{\sin\beta}{\beta} = 1$:

ithin erhält man $\sin\gamma = \gamma - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\gamma^3 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\gamma^5$
$$-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\frac{1}{5}.\frac{1}{6}.\frac{1}{7}.\gamma^7+\ldots\ldots$$

erner ist

$$\cos n\beta = \cos\beta^n - \frac{n.n-1.\beta^2}{1.2}.\frac{\sin\beta^2}{\beta^2}.\cos\beta^{n-2}$$
$$+\frac{n.n-1.n-2.n-3.\beta^4}{1.2.3.4}.\frac{\sin\beta^4}{\beta^4}.\cos\beta^{n-4}$$
$$-\frac{n.n-1.\ldots.(n-5).\beta^6}{1.2.3.4.5.6}.\frac{\sin\beta^6}{\beta^6}\cos\beta^{n-6}+\ldots.$$

Wenn also wiederum $n\beta = \gamma$, und hiernächst $\beta = 0$ esetzt wird, so findet man

$$\cos\gamma = 1 - \frac{1}{2}.\gamma^2 + \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}.\gamma^4 - \frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\ldots.\frac{1}{6}.\gamma^6+\ldots$$

429. §.

Den Sinus und Cosinus eines Bogens für den Halbmesser = 1 zu finden, dessen Grösse 1 Minute oder $\frac{1}{60}$ Grad beträgt.

Aufl. Wenn man im 400. §. 2. Zus. $n = \frac{1}{60}$ setzt, so findet man die Länge des Bogens von 1 Minute $= \frac{1}{60} \cdot \frac{1}{180} \pi$. Ferner ist $\pi =$ 3,14159265358979 3.... (285. §.) also $\frac{1}{180} \frac{1}{800} \pi =$ 0,0002908882086 6.... Wird dieser Bogen $= \gamma$ gesetzt, so findet man $\frac{1}{6}\gamma^3 =$ 0,000000000000401... also $\sin\gamma =$ 0,0002908882086 4...., und das ist der gesuchte Sinus. Ferner findet man $\frac{1}{2}\gamma^2 =$ 0,0000000042307 95.....mithin $\cos\gamma =$ 0,9999999576920 5.....

430. §.

Wenn die Sinus und Cosinus aller Winkel oder Bogen von 0° bis 30° schon gefunden sind, aus diesen die Sinus und Cosinus der übrigen Winkel bis 45° zu finden.

Aufl. Es ist $\sin(30° + \beta) = \cos\beta - \sin(30° - \beta)$, und $\cos(30° + \beta) = \cos(30° - \beta) - \sin\beta$. Wenn man also für β nach und nach Winkel von 1′, 2′, 3′ und so ferner bis 15° annimmt; nachdem man vorher ihre Sinus und Cosinus bis zu 30° schon berechnet hatte; so erhält man die Sinus und Cosinus bis zu 45° vermittelst einer ganz leichten Rechnung.

Beweis. Weil $\sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha+\beta)$, und $\sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta = \sin(\alpha - \beta)$, so findet man $2\sin\alpha\cos\beta = \sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)$. Weil ferner $\cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta)$, und $\cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha + \beta)$, so ist auch $2\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)$. Man setze $\alpha = 30°$, so ist $\sin\alpha = \frac{1}{2}$ (404. §. 3. Zus.) also $\cos\beta = \sin(30° + \beta) + \sin(30° - \beta)$, und $\sin\beta = \cos(30° - \beta) - \cos(30° + \beta)$, diese Gleichungen aber geben $\sin(30° + \beta) = \cos\beta -$

$\sin(30°$

in(30° − β) und cos(30° + β) = cos(30° − β)
− sinβ.

431. §.

Auf den im 428. 429. und 430. §. vorgetragenen Gründen beruhet die Berechnung des natürlichen, und eben darum zugleich die Berechnung eines jeden andern künstlichen trigonometrischen Systems. Man kann, um die Sinus und Cosinus zu finden, mit den allgemeinen Formuln des 428. §. auch die Formuln des 423sten und 424sten §. verbinden, nachdem die Rechnung mit Hülfe der einen oder der andern Formul mehr abgekürzt wird.

1. Wenn alle Sinus und Cosinus gefunden sind, giebt die Formul $\text{tang}\,\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ die Tangen-

n, und $\cot\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = \frac{1}{\text{tang}\,\alpha}$ die Cotan-

enten. (417. §.) Weil übrigens $\text{tang}\,2\alpha = \frac{\sin 2\alpha}{\cos 2\alpha} = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha^2 - \sin\alpha^2}$ gefunden wird, (424. §.)

) hat man auch $\text{tang}2\alpha = \frac{2}{\cot\alpha - \text{tang}\,\alpha}$, also

$\cot 2\alpha = \frac{1}{2}(\cot\alpha - \text{tang}\,\alpha)$. Man setze $\alpha = 30° - \beta$,) ist $2\alpha = 60 - 2\beta$ und $\cot 2\alpha = \text{tg.}((90° - (60° - 2\beta))$ der $\cot 2\alpha = \text{tang.}\,(30° + 2\beta)$. Demnach hat man auch $\text{tang}(30° + 2\beta) =$

$\frac{1}{2}(\cot\,(30° - \beta) - \text{tg.}\,(30° - \beta))$, und diese Formuln dienen zur Erleichterung der Rechnung, wenn die Tangenten und Cotangenten der Winkel unter 30° schon gefunden sind, auch noch die übrigen zu finden.

2. Die Quersinus und Cosinus versus erhält ma zwar insgesammt durch eine leichte Subtraction, ode für stumpfe Winkel durch Addition, wenn die Sinu und Cosinus schon gefunden sind: (411. §. 2. Zus. indessen findet man aus der Gleichung $\cos\gamma = -2\sin\frac{1}{2}\gamma^2$ (425. §. n. 1.) auch $2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 1-\cos\gamma = \operatorname{sinv}\gamma$. Weil ferner $\operatorname{cosv}.\gamma = \operatorname{sinv}.(90^\circ-\gamma)$, erhält man auch $\operatorname{cosv}.\gamma = 2(\sin(45^\circ-\frac{1}{2}\gamma))^2$.

432. §.

Aus der Gleichung $\operatorname{tang} 2\alpha = \frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos\alpha^2-\sin\alpha^2}$ (431. §.) folgt $(\cos\alpha^2-\sin\alpha^2)\operatorname{tg}.2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$, also auch $(\cot\alpha^2-1)\operatorname{tg}.2\alpha = 2\cot\alpha$, oder $\cot\alpha^2 - 2.\cot 2\alpha.\cot\alpha = 1$. Man sehe $\cot 2\alpha$ als gege ben an, so findet man nach den Regeln, wie quadra tische Gleichungen aufgelöset werden, $\cot\alpha^2 - 2\cot 2\alpha.\cot\alpha + \cot 2\alpha^2 = 1+\cot 2\alpha^2 = \operatorname{colec}.2\alpha^2$, mithin $\cot\alpha = \cot 2\alpha \pm \operatorname{colec}.2\alpha$. Die Ursach warum zwey Werthe gefunden werden ist diese, w die gegebene $\cot 2\alpha$ zu zweyen verschiedenen Winke gehören, die um 180° verschieden sind. Wen $2\alpha < 90^\circ$ ist, so muß $\cot\alpha > \cot 2\alpha$ seyn, al hat man unter dieser Bedingung $\cot\alpha = \cot.2\alpha + \operatorname{colec}.2\alpha$, mithin ferner $\operatorname{colec}2\alpha = \cot\alpha - \cot 2\alpha$. Man setze nun $2\alpha = 90^\circ-\gamma$, so ist $\operatorname{colec}2\alpha = \sec\gamma$, $\cot 2\alpha = \operatorname{tang}.\gamma$, und $\alpha = 45^\circ - \frac{1}{2}\gamma$: dem nach findet man $\sec\gamma = \cot(45^\circ-\frac{1}{2}\gamma) - \operatorname{tang}.\gamma$. Wird $2\alpha = \delta$ gesetzt, so ist $\operatorname{colec}\delta = \cot\frac{1}{2}\delta - \cot\delta$. Wenn also alle Tangenten und Cotangenten schon ge funden sind, so erhält man sehr leicht alle Secanten und Cosecanten.

433. §.

Wenn alle trigonometrische Linien für den Halb-
esser = 1 bis auf die zehnte Decimalstelle berechnet,
d in Tafeln gebracht sind, so kann man die so gefun-
nen Zahlen auch insgesammt für ganze Zahlen an-
hmen, und das ganze trigonometrische System als
n künstliches System ansehen, das mit dem Modu-
s oder Halbmesser 10000000000 zusammen ge-
rt. Für alle diese Zahlen kann man hiernächst
ch die Logarithmen suchen, und weil es zum ge-
einsten Gebrauch zulänglich ist, nur die ersten sieben
ecimalstellen der Briggischen Logarithmen zu finden,
dienen dazu die oben schon beschriebenen Logarith-
en-Tafeln für die Zahlen, so wie sie in natürlicher
rdnung folgen. Die Regeln des 154. 155. und
ym Gebrauch der Sherwinschen oder ähnlicher
afeln die Regeln des 160. §. finden dabey ihre An-
ndung. Der Logarithme des ganzen Sinus wird
sdenn = 10. Wollte man den Logarithmen des
1. 1′ = 2908882 (429. §.) aus Sherwins Tafeln
chen, so würde die Rechnung folgendes geben.

$$l\,29088 = 4637139$$
$$8 \qquad 120$$
$$2 \qquad 3$$

also $l\,2908882 = 6{,}4637262 = l\sin. 1'$.

Wenn die Logarithmen aller Sinus und Cosinus auf
ese oder jede andre Art schon gefunden sind, so die-
n die aus dem vorhergehenden bekannten trigonome-
ischen Grundformuln, die Logarithmen für alle übri-
e trigonometrischen Linien noch leichter, und allemahl
ben so genau zu finden, als man sie für die Sinus
nd Cosinus berechnet hat. Dabey aber muß man

auf

auf den Umstand Rücksicht nehmen, daß jene Grund
formuln insgesammt den Halbmesser = 1 voraussetzen
Wenn also die Zahlen, welche für die Sinus und Co
sinus berechnet sind nicht zum natürlichen, sondern zu
einem künstlichen trigonometrischen System gehören
so muß man die Formuln so zu verändern wissen, daß
der angenommene Modulus oder Sinus totus des
Systems mit in Rechnung gebracht wird.

434. §.

Es ist eine Gleichung zwischen zweyen oder mehrern trigonometrischen Linien des natürlichen Systems für den Halbmesser = 1 gegeben; man soll finden, wie die gleichnahmigen trigonometrischen Linien in einem andern System von einander abhängen.

Aufl. 1. Wenn r den Modulus oder Sinus totus des künstlichen Systems bezeichnet, so ist allemahl $\text{sin. nat.} = \frac{\text{sin. art}}{r}$, $\text{tang. nat.} = \frac{\text{tang. art}}{r}$

Jede trigonometrische Linie eines künstlichen Systems mit dem dazu gehörigen Halbmesser oder Modulus dividirt giebt die gleichnahmige trigonometrische Linie des natürlichen Systems.

2. Man kann also in jeder Gleichung zwischen zwey en oder mehrern natürlichen trigonometrischen Linien anstatt einer jeden die gleichnahmige künstliche trigonometrische Linie setzen, wenn man nur unter dieser zugleich den Halbmesser r als Divisor setzt. Kommt also eine Potenz einer solchen natürlichen trigonometrischen Linien vor, so muß auch r auf eben die Potenz erhoben als Divisor unter der gleichnahmigen künstli-

che

hen trigonometrischen Linie gesetzt werden. Denn es

t $(\text{sin. nat})^n = \frac{(\text{sin. art})^n}{r^n}$, tg. nat. $= \frac{(\text{tg. art.})^n}{r^n}$,

. s. f.

1. Zusatz. Weil tg. $\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$, so wird

$\frac{\text{tg. art. }\alpha}{r} = \frac{\text{sin. art.}\alpha}{\text{cos. art.}\alpha}$, mithin tg. art $\alpha =$

$\frac{r.\ \text{sin. art. }\alpha}{\text{cos. art. }\alpha}$, und das giebt *l.* tg. art. $\alpha = lr +$

in. art $\alpha - l.$ cos. art. α: mithin eben so *l.* cot art α

$= lr + l.$ cos. art. $\alpha - l.$ sin. art α.

2. Zusatz. Weil ferner $\sec\alpha = \frac{1}{\cos\alpha}$, so er-

hält man $\frac{\text{sec. art}\,\alpha}{r} = \frac{r}{\text{cos. art. }\alpha}$, und sec. art α

$\frac{rr}{\text{cos. art}\,\alpha}$, mithin l sec. art. $\alpha = 2lr - l$ cos. art α:

ach eben so l cosec. art $\alpha = 2lr - l$ sin. art. α.

3. Zusatz. Im 432. §. n. 2. war sinv. $\alpha =$

$\sin\frac{1}{2}\alpha)^2$, also ist $\frac{\text{sinv. art}\alpha}{r} = \frac{2(\text{sin. art. }\frac{1}{2}\alpha)^2}{rr}$,

er sinv. art. $\alpha = \frac{2(\text{sin. art. }\frac{1}{2}\alpha)^2}{r}$: mithin eben

$\text{cosv. art}\alpha = \frac{2(\text{sin. art.}(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha))^2}{r}$, und

as giebt l sinv. art $\alpha = l2 + 2l$ sin art $\frac{1}{2}\alpha - lr$, so

ie l cosv. art. $\alpha = l2 + 2\,l$ sin. art. $(45^\circ - \frac{1}{2}\alpha) - lr$.

4. Zu-

4. Zusatz. Im Nepersch[en] System ist $lr = 0$ also wird $l\text{Nep.}\,tg\alpha = l\text{Nep.}\,sin\alpha - l\text{Nep.}\,cos\alpha$ Für Winkel, die gröſſer als 45° sind, werden dies[e] Logarithmen der Tangenten negativ. Ferner i[st] $l\text{Nep.}\,sec\alpha = -l.cos.\alpha$ allemahl negativ, wie e[s] seyn muß, weil alle Secanten gröſſer als der Halb[-] messer sind. Die Logarithmen der Cosinus heissen b[ey] Nepern Antilogarithmen, und die Logarithm[en] der Tangenten Mesologarithmen.

435. §.

Die im 152. §. der Allgemeinen Rechenkunst ang[e]führten Ausgaben der Logarithmen-Tafeln enthalt[en] zugleich die Tafeln der trigonometrischen Linien: [in] sind nicht allein die Zahlen selbst aufgeführt, welch[e] die Länge dieser Linien für den angenommenen Halb[-] messer oder Sinus totus angeben, sondern auch d[ie] dazu gehörigen Briggischen Logarithmen. Brigg[s] berechnete diese Logarithmen unter der im 433. §. [er]wehnten Voraussetzung, daß der Sinus totus durch die Zahl 10000000000 ausgedruckt werden soll[te]. In den kleinern Handausgaben der Tafeln aber, [und] selbst in Sherwins Tafeln hat man die Zahl[en] welche die Länge der trigonometrischen Linien für d[en] Halbmesser 10000000000 angeben sollten, nic[ht] vollständig aufgeführt, sondern die drey letzten Ziffe[rn] weggelassen. Das war eben soviel, als wenn m[an] den Halbmesser zu 10000000 festsetzte, und so h[ät]te sein Logarithme = 7 seyn müssen: auch hätte m[an] die Kennziffern der Logarithmen aller übrigen Zahl[en] des gemeinen trigonometrischen Systems um 3 ve[r]mindern sollen. Man hat es aber unterlassen, w[eil] dieser Umstand auf die Resultate der gewöhnlichen t[ri]gon[o]

gonometrischen Rechnungen, wobey man die Logarithmen braucht, keinen Einfluß hat.

Neper betrachtete die Reihe der Sinus von 90° bis 0° als Zahlen, die zu einer abnehmenden geometrischen Progression gehören sollten, das erste Glied sollte der Sinus totus = 10000000, das zweyte die Zahl 9999999 seyn: seine Logarithmen sollten Glieder einer arithmetischen Progression seyn, diese sollten für den Sinus totus mit 0 anfangen, und jedes folgende Glied dieser arithmetischen Reihe sollte angeben, in wieviele gleiche Verhältnisse der Sinus totus bis zu dem dazu gehörigen Gliede der geometrischen Reihe schon abgenommen habe. Setzt man nun die Zahl $\frac{9999999}{10000000} = \frac{n}{m}$, den Sinus totus $= r$, so sollten mit den Zahlen in der auch rückwärts fortgesetzten Reihe

$$\ldots\ldots \frac{m^3}{n^3}r,\ \frac{m^2}{n^2}r,\ \frac{m}{n}r,\ r,\ \frac{n}{m}r,\ \frac{n^2}{m^2}r,\ \frac{n^3}{m^3}r,\ \ldots\ldots$$

die Logarithmen

$$\ldots\ldots -3\delta,\ -2\delta,\ -\delta,\ 0,\ \delta,\ 2\delta,\ 3\delta,\ \ldots\ldots$$

zusammen gehören: also müßten die Verhältnisse $\frac{n}{m}r : r$ und $\frac{m}{n}r : r$ gleiche und entgegen gesetzte Logarithmen erhalten. Die Differenz der Glieder $\frac{n}{m}r$ und r ist $= 1$, und man findet $\frac{m}{n}r = \frac{10000000}{9999999}$

$10000000 = 1{,}00000010000001 \ldots\ldots$ schon grösser als 1. Weil aber der Unterschied in der 7ten

Decimalstelle allererst anfängt, so nimmt Neper $\delta = 1$, ob er gleich hinzu setzt, daß man auch $\delta = 1{,}00000005$ setzen könnte, wenn man noch schärfer rechnen wollte. Nepers Rechnungen sind, wie oben schon bemerkt ist, nur Näherungen, er war, wie man leicht wahrnimmt, dem Begriff von den natürlichen Logarithmen sehr nahe: nur fehlten ihm die neuern Hülfsmittel, um die Sache in ihr ganzes Licht zu setzen.

436. §.

Unter den vor Erfindung der Logarithmen bekannt gewordenen trigonometrischen Tafeln sind noch diejenigen merkwürdig, an deren Berechnung vornemlich **Georg Joachim Rheticus**, (von Feldkirchen im Graubündterlande, Rhetica,) gearbeitet hat. Johann **Müller**, der von seinem Geburtsorte Königsberg im Fränkischen den Nahmen **Regiomontanus** oder *de monte Regio* führte, hatte die Tangenten eingeführt, Rheticus setzte den Gebrauch der Secanten noch hinzu, und berechnete einen trigonometrischen Canon für den Halbmesser 1 bis auf 15 Decimalstellen: der Tod hinderte ihn aber, die Ausgabe des Werkes selbst zu veranstalten. Sein Schüler, Valenthin **Otho** endigte das Werk, und die von ihm besorgte Ausgabe hat den Titel Opus Palatinum de Triangulis a *Georgio Ioachimo Rhetico* coeptum, L. *Valentinus Otho* Princip. Palat. Friderici IV Electoris Mathematicus consummavit. 1596. Aus Rhetici eigenen Werken von der ebenen und sphärischen Trigonometrie enthält das Buch Othonis für Bücher von schiefwinklichten sphärischen Dreyecken und zuletzt folgt Rhetici Magnus Canon Doctrinæ

Triangulorum ad decades secundorum scrupulorum et ad partes 10000′000000. Noch vollständiger ist Rhetici Arbeit vom Pitiscus mit eigenen Zusätzen in dem sehr schätzbaren aber auch schon sehr selten gewordenen Werk mitgetheilet: *Bartholomaei Pitiſci* Thesaurus Mathematicus, seu Canon sinuum ad radium 1,00000 00000 00000 et ad dena quaeque scrupula secunda quadrantis. Francofurti 1613. Nepers Lehre von den Logarithmen, und diese Art, wie er sie berechnet hat, ist in *Benj. Urſini* Trigonometria cum magno Logar. Canone, Coloniae 1625. sehr deutlich erklärt. Der logarithmische Canon enthält die Sinus von 10 zu 10 Secunden und ihre Neperschen Logarithmen mit dabey gesetzten Differenzen. Nach der Zeit hat man überall die Briggischen Logarithmen auch zum trigonometrischen Gebrauch angeführt. In *Henr. Gellibrand* Trigonometria Britannica Goudae 1633 findet man die trigonometrischen Linien für den Halbmesser 100″000000′000000 nebst ihren Logarithmen für Hunderttheile der Grade. Ausser der oben schon angeführten von Adrian Vlacq herausgegebenen Arithmetica Logarithmica, Goudae 1628, worin ausser den Logarithmen für die natürlichen Zahlen die Logarithmen der trigonometrischen Linien in zehn Decimalstellen für einzelne Minuten des Quadranten stehen, ist auch die Trigonometria artificialis: sive Magnus canon triangulorum logarithmicus ad radium 10000′000000 et ad dena scrupula secunda ab *Adriano Vlacco* constructus, Goudae 1633, ein sehr brauchbares Werk: die Logarithmen der trigonometrischen Linien sind bis auf die zehnte Decimalstelle von 10 zu 10 Secunden des Quadranten berechnet. Unter den neuern oben schon genann-

ten Handausgaben sind die Sherwinschen und die ihnen ähnlichen neuern deutschen Ausgaben zum trigonometrischen Gebrauch ebenfalls sehr bequem eingerichtet, weil die Differenzen eines jeden Logarithmen vom nächstfolgenden allemahl dabey stehen, wovon der Nutzen sogleich gewiesen werden soll. Es enthalten diese Tafeln überdem nicht allein die Logarithmen der Sinus und Tangenten, sondern auch der Secanten und Quersinus, da sie gegentheils in den kleinen bekanntesten Tafeln nur für die Sinus und Tangenten mitgetheilet sind. Wenn man nun eine solche Ausgabe des so genannten trigonometrischen Canons zur Hand hat; so findet man in demselben leicht den Logarithmen des Sinus, des Cosinus u. s. f. eines Winkels, der in Graden und Minuten gegeben ist, wenn man nur folgende Einrichtung der Tafeln kennet. Die Winkel stehen nach der Ordnung der Minuten, auf der einen Seite von oben herunter gezählt, und darneben die Sinus und Tangenten nebst ihren Logarithmen Grade gegenüber auf der andern Seite, stehen die Winkel, welche die vorigen zu 90° ergänzen, nebst ihren Sinus und Tangenten, die also der vorigen Cosinus und Cotangenten sind. Dies hat die Einrichtung veranlasset, daß auf dieser Seite die Minuten von unten hinauf gezählt sind. Die Grade sind deswegen allein auf einer Seite von 0° bis zu 45° bis ans Ende der Tafeln fortgezählet, und nun auf der andern Seite wieder rückwärts von 45° bis zu 90°

437. §.

Mit Hülfe der gemeinen Tafeln den Logarithmen einer trigonometrischen Linie zu finden, die zu einem Winkel gehört, der auf

Graden und Minuten noch Secunden enthält.

Aufl. Man nimmt auch hier eine ähnliche Voraussetzung wie im 154. §. der allgemeinen Rechenkunst an, die so weit richtig ist, daß sie bey den gewöhnlichsten Rechnungen keinen sehr merklichen Fehler giebt. Man nimmt an, daß die Differenzen dieser Logarithmen den Differenzen der Winkel proportional seyn, so lange diese Differenz der Winkel nicht über eine Minute beträgt. Diese Voraussetzung ist freylich bey kleinen Winkeln ziemlich unrichtig, aber der Fehler wird immer geringer, je grösser die Winkel werden, und nimmt, was die Logarithmen der Sinus betrift, immer mehr ab, je näher die Winkel dem rechten Winkel kommen. Was die Logarithmen der Tangenten betrift, so nimmt der Fehler zwar wieder ziemlich zu, wenn die Winkel nicht viel mehr von 90° unterschieden sind; inzwischen kann man doch in den meisten Fällen der Ausübung diese Voraussetzung beybehalten, wenn man eben nicht die größte Schärfe sucht.

Da man nun die Logarithmen dieser Linien für alle einzelne Minuten des Quadranten hat: so nimmt man die Differenz zwischen den beyden Logarithmen, welche mit der gleichnahmigen trigonometrischen Linie des nächst grössern, und nächst kleinern Winkels zusammen gehören, und schließt: wie 60″ zur gegebenen Anzahl Secunden, so die gefundene Differenz zur vierten Zahl, die man zum nächst kleinern Logarithmen addiren muß, wenn die trigonometrische Linie mit dem Winkel wächst, wie der Sinus, die Tangente und Secante unter 90°. Wenn aber diese Linie abnimmt, indem der Winkel wächst, wie der Cosinus, die Co-

tangente und Cosecante: so muß man die gefundene vierte Zahl vom nechstgrössern Logarithmen subtrahiren.

Exempel.

Man suche den log. sin 53° 28′ 54″: so ist

$l\sin 53° 29' = 9.9050852$
$l\sin 53° 28 = 9.9049916$

Differenz . . . 936

Also schließt man

$60'' : 54'' = 936 : 842;$

und weil $l\sin 53° 28' = 9{,}9049916$
die vierte Zahl wegen $54'' = + 842$

so ist $l\sin 53° 28' 54'' = 9.9050758$

Eben so findet man den Logarithmen der Tangente dieses Winkels.

Es ist $l\text{tang } 53° 29' = 10{,}1305269$
$l\text{tang } 53° 28' = 10{,}1302628$

Differenz . . 2641

Also $60'' : 54'' = 2641 : 2377,$
und weil $l\text{tang } 53° 28' = 10{,}1302628$
wegen der $54'' \text{ — } + 2377$

so ist $l\text{tang } 53° 28' 54'' = 10{,}1305005$

Den Logarithmen des Cosinus und der Cotangente dieses Winkels findet man auf ähnliche Art.

Es ist $l\cos 53° 28' = 9{,}7747288$
$l\cos 53° 29' = 9.7745583$

Differenz 1705

Aber $60'' : 54'' = 1705 : 1534,$ und weil
$l\cos 53° 28' = 9.7747288$
wegen der $54'' \text{ — } - 1534$

so ist $l\cos 53° 28' 45'' = 9{,}7745754$

Fo

Ferner ist $l\cot 53° 28' = 9{,}8697372$
$l\cot 53° 29' = 9{,}8694731$

Differenz 2641

Aber $60'' : 54'' = 2641 : 2376$. Weil also
$l\cot 53° 28' = 9.8697372$
wegen der $54'' - 2376$

ist $l\cot 53° 28' 54'' = 9{,}8694996$.

Die Differenzen der nach einander folgenden Logarithmen stehen in den Sherwinschen, Schulzischen und Vegaschen Tafeln allemahl dabey, daß man also nicht nöthig hat, sie zu suchen.

438. §.

Den Winkel zu finden, welcher einem solchen Logarithmen einer trigonometrischen Linie zugehört, der in den Tafeln selbst nicht vorkommt.

Aufl. Man darf nur die Vorschriften des vor. umkehren. Man muß ein paar Logarithmen unter den Logarithmen der Sinus, oder Tangenten, u. s. f. aufsuchen, zwischen welchen der gegebene Logarithme, als zwischen zwoen Gränzen enthalten ist: alsdann nimmt man die Differenz dieser beyden Gränzen sowohl, als auch des gegebenen Logarithmen vom nächst kleinern, und schließt: die Differenz der beyden Gränzen zur Differenz des gegebenen Logarithmen vom nächst kleinern, wie 60'' zur vierten Zahl. Dies giebt eine Anzahl von Secunden, die man zu dem Winkel addirt, der dem nächst kleinern Logarithmen zugehört, wofern die trigonometrische Linie mit dem Winkel wächst, im Gegentheil aber von diesem Winkel abziehet.

Es sey der Logarithme des Sinus eines Winkels = 9,9426938, man sucht den Winkel. Dieser Logarithme fällt zwischen den Logarithmen der Sinus 61° 12′ und 61° 13′: denn es ist

$l\sin 61° 13' = 9.9427255$
$l\sin 61° 12' = 9.9426561$

Differenz . . 694
der gegebene Log. = 9.9426938
$l\sin 61° 12' = 9.9426561$

Differenz . . 377.

Nun findet sich 694:377 = 60″:32, also ist der gesuchte Winkel = 61° 12′ 32″.

Es sey der Log. der Tangente eines Winkels = 10,1948376: so sind die Gränzen

$l\,\mathrm{tang}\ 57° 27' = 10,1949767$
$l\,\mathrm{tang}\ 57° 26' = 10,1946981$

Differenz . . 2786
Der gegebene Log. = 10,1948376
$l\,\mathrm{tang}\ 57° 26' = 10,1946981$

Differenz . . 1395

Man findet 2786:1395 = 60″:30″; also ist der gesuchte Winkel 57° 26′ 30″.

Es sey der Log. des Cosinus eines Winkels = 9.8807832: so sind die Gränzen

$l\cos 40° 32' = 9.8808296$
$l\cos 40° 33' = 9.8807215$

Differenz . . 1081
der gegebene Log. = 9.8807832
$l\cos 40° 33' = 9.8807215$

Differenz . . 617

Man findet 1081:617 = 60″:34, also ist der gesuchte Winkel = 40° 33′ − 34″ = 40° 32′ 26″.

Es sey der Logarithme der Cotangente eines Winkels = 9,7766384: so sind die Gränzen

$l\cot 59° 7' = 9{,}7767685$
$l\cot 59° 8' = 9{,}7764816$

Differenz = 2869

der gegebene Log. = 9,7766384
$l\cot 59° 8' = 9{,}7764816$

Differenz = 1568

Man findet 2869:1568 = 60″:32″, also ist der gesuchte Winkel = 59° 8′ − 32″ = 59° 7′ 28″.

Der XVII. Abschnitt.

Berechnung der Seiten und Winkel gradlinichter Dreyecke, und regulärer Polygone.

439. §.

Im rechtwinklichten Dreyeck *ABC* verhalten sich die Seiten gegen einander, wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel. 189 Fig.

Ferner verhält sich eine Perpendiculärseite *AC* zur andern *AB*, wie der Halbmesser, oder Sinus totus zur Tangente des der zweyten Perpendiculärseite *AB* gegenüberstehenden Winkels *C*.

Beweis. 1. Wenn mit der Hypothenuse CB als Halbmesser aus C ein Kreis beschrieben wird,

so ist AB der mit dem Halbmesser CB zusammengehörige Sinus, und CA der Cosinus des Winkels: (401. §.) demnach ist $AB = BC.\sin C$, $AC = BC.\cos C = BC.\sin B$ (404. §.) also $AB : AC =$ sin. nat. C : sin. nat. B = sin. art. C : sin. art. B. Ueberdem ist $AB : BC = \sin C : 1 =$ sin. art. C : sin. tot. und $AC : BC = \sin B : 1 =$ sin. art. B : sin. tot.

2. Wird die Perpendiculärseite AC als Halbmesser angenommen und aus C ein Kreis beschrieben; so ist AB die Tangente des Winkels C, (412. §.) also $AB = AC.\text{tang}.C$ (415. §.) und $AB : AC =$ tg. nat. C : 1 = tg. art. C : sin. tot. Ferner ist $\frac{AB}{AC} = \text{tg}.C = \cot B$, also $\text{tg}.B = \frac{AC}{AB}$ (417. §.) und das giebt 1 : tg. nat. B = sin. tot : tg. art. B = AB : AC.

Zusatz. Wenn AC der Halbmesser bleibt, so ist auch $CB = AC.\sec C = AC.\operatorname{cosec} B$. Man kann also jede trigonometrische Linie eines von den beyden spitzen Winkeln im rechtwinklichten Dreyeck leicht durch die Seiten desselben ausdrücken. Wenn wie bisher allemahl die natürlichen trigonometrischen Linien verstanden werden; so ist $\sin C = \frac{AB}{BC}$, $\sin B = \frac{AC}{BC}$, $\text{tang}\,C = \frac{AB}{AC}$, $\text{tang}\,B = \frac{AC}{AB}$, $\sec.C = \frac{BC}{AC}$, $\sec.B = \frac{BC}{AB}$. Aus jeder von diesen Gleichungen kann man hiernächst vermittelst der allgemeinen Grundformuln des 405. und 417. §. für jede von den übrigen zu eben dem Winkel gehöri-

hörigen trigonometrischen Linien neue Gleichungen herleiten. Wird Kürze halber $BC = a$, $AC = b$ gesetzt, so ist $\sin B = \frac{b}{a}$, $\cos B = \frac{\sqrt{(aa-bb)}}{a}$,

$\tang B = \frac{b}{\sqrt{(aa-bb)}}$, $\cot B = \frac{\sqrt{(aa-bb)}}{b}$,

$\sec. B = \frac{a}{\sqrt{(aa-bb)}}$, $\operatorname{cosec} B = \frac{a}{b}$. Ist fer-

er $AB = 0$, so hat man $\tang B = \frac{b}{c}$, $\cot. B = \frac{c}{b}$, $\sec B = \frac{\sqrt{(bb+cc)}}{c}$, $\operatorname{cosec} B = \frac{\sqrt{(bb+cc)}}{b}$,

also $\sin B = \frac{b}{\sqrt{(bb+cc)}}$, $\cos B = \frac{c}{\sqrt{(bb+cc)}}$.

440. §.

In jedem Dreyeck verhalten sich die Sei- 181
en, wie die Sinus der gegenüberstehenden Fig.
Winkel, die zu einerley Halbmesser gehören.

Beweis. Wenn AB und BC zwo Seiten eines Dreyecks ABC sind: so lasse man aus der Spitze des Winkels B, den sie einschliessen, auf die entgegengesetzte Seite AC die senkrechte Linie BD fallen, da es denn gleichviel ist, ob sie innerhalb, oder ausserhalb des Dreyecks fällt. Nun hat man in den rechtwinklichten Dreyecken ABD, BCD (439. §.) die Proportionen $AB : BD = r : \sin A$, und $BC : BD = r : \sin C$, auch kann das A in der 183 Fig. sowohl den Winkel BAC als auch BAD bezeichnen (411. §.). Es giebt $AB \times \sin A = BD \times r = BC \sin C$, also

auch

auch $AB : BC = \sin C : \sin A$, oder $AB : \sin C = BC : \sin A$.

Man setze $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, die ge genüberstehenden Winkel $BAC = \alpha$, $ABC = \beta$, $ACB = \gamma$: so hat man $\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$

mithin ist $\sin\alpha = \frac{a\sin\beta}{b} = \frac{a\sin\gamma}{c}$, $\sin\beta =$

$\frac{b\sin\alpha}{a} = \frac{b\sin\gamma}{c}$, $\sin\gamma = \frac{c\sin\alpha}{a} = \frac{c\sin\beta}{b}$

Umgekehrt ist auch $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma}$

und man erhält $a = \frac{b\sin\alpha}{\sin\beta} = \frac{c\sin\alpha}{\sin\gamma}$, $b =$

$\frac{a\sin\beta}{\sin\alpha} = \frac{a\sin\beta}{\sin\gamma}$; $c = \frac{a\sin\gamma}{\sin\alpha} = \frac{b\sin\gamma}{\sin\beta}$.

1. Zusatz. Wenn das Dreyeck, wie EBC gleichschenklicht, und $BE = BC$ ist, alsdenn aber $BC = BE = a$, $CE = b$, der Winkel $BEC = BCE = \alpha$, $EBC = \beta$ gesetzt wird; so hat man $\alpha = 90° - \frac{1}{2}\beta$, und $\beta = 180° - 2\alpha$. Demnach ist $b = 2a\sin\frac{1}{2}\beta = 2a\cos\alpha$, und $a = \frac{1}{2}b.\operatorname{cosec}\frac{1}{2}\beta = \frac{1}{2}b\sec\alpha$, also auch $\cos\alpha = \frac{\frac{1}{2}b}{a} = \sin\frac{1}{2}\beta$.

2. Zusatz. Der Sinus eines Winkels im Dreyeck ist allemahl zugleich die Summe der Sinus der beyden übrigen Winkel: (411. §.) also ist $\sin\alpha = \sin(\beta+\gamma)$ $\sin\beta = \sin(\alpha+\gamma)$, $\sin\gamma = \sin(\alpha+\beta)$. Demnach ist auch $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin(\alpha+\gamma)}$, $\frac{b}{\sin\beta} =$

$$= \frac{c}{\sin(\alpha+\gamma)}, \quad \frac{c}{\sin\gamma} = \frac{a}{\sin(\beta+\gamma)},$$

441. §.

Im Dreyeck *ABC* sind zweene Winkel *A* und *B* nebst einer Seite *AB* in Zahlen gegeben, man soll die übrigen beyden Seiten *BC* und *AC* durch Rechnung finden. 181 Fig.

I. Arithmetische Auflösung.

Wenn zweene Winkel A und B bekannt sind, so kennet man allemahl zugleich die Grösse des dritten Winkels C (274. §.): also weis man die Grösse einer Seite AB und des gegenüberstehenden Winkels. Ueberdem sind die andern beyden Winkel A und B auch bekannt, deswegen hat man nach der Regel des 439. und 440. §. allemahl eine Proportion zwischen der bekannten Seite, dem Sinus des gegenüberstehenden Winkels, der gesuchten Seite, und dem Sinus des gegenüberstehenden Winkels, die man so ordnen kann, daß die gesuchte Seite das vierte Glied wird, welches man nach dem 175. §. der Rechenkunst findet. Im gegenwärtigen Fall hat man $\sin C : AB = \sin A : BC$, und $\sin C : AB = \sin B : AC$. Anstatt der Zahlen selbst rechnet man lieber mit ihren Logarithmen, weil hiedurch die Arbeit verkürzt wird.

Es sey $A = 29° 38' 24''$ $B = 109° 54' 16''$ und $AB = 78324{,}3$ Ruth. Man suche zuförderst C, so findet man

$A = 29° 38' 24''$	$A+B+C = 179° 59' 60''$
$B = 109° 54' 16''$	$A+B = 139° 32' 40''$
$A+B = 139° 32' 40''$	also $C = 40° 27' 20''$

Nun setze man an

sin

$\sin 40°\,27'\,20'' : 78324{,}3\ R = \sin 29°\,38'\,24'' : BC$
und die Rechnung giebt

$$l\,78324{,}3 = 4{,}8938965$$
$$l\sin 29°\,38'\,24 = 9{,}6942091$$
$$14.5881056$$
$$l\sin 40°\,27'\,20'' = 9.8121497$$
$$l\,BC = 4{,}7759559$$
$$\text{also } BC = 59697{,}47\ R.$$

Man setze ferner
$\sin 40°\,27'\,20'' : 78324{,}3\ R = \sin 109°\,54'\,16'' : AC$
oder $\sin 40°\,27'\,20'' : 78324{,}3\ R = \sin 70°\,5'\,44'' : AC$
weil $\sin 109°\,54'\,16'' = \sin(180° - 109°\,54'\,16''$
(403. §.), so giebt die Rechnung

$$l\,78324{,}3 = 4{,}8938965$$
$$l\sin 70°\,5'\,44'' = 9{,}9732488$$
$$14{,}8671453$$
$$l\sin 40°\,27'\,20'' = 9{,}8121497$$
$$l\,AC = 5{,}0549956$$
$$\text{also } AC = 113499{,}913\ R.$$

Weil diese Proportionen allgemein sind, so kann m
sie allemahl gebrauchen, auch wenn einer von den g
gebenen Winkeln $= 90°$ ist, da denn der Sin
dieses Winkels dem Halbmesser gleich, und sein
189 garithme $= 10$ wird. Wenn $A = 90°$, und
Fig. Hypothenuse BC nebst den übrigen Winkeln gegeb
ist; so hat man

$$\sin tot : BC = \sin B : AC$$
$$\sin tot : BC \cos B : AB$$

In dem Fall, wenn eine Perpendiculärseite A
gegeben ist, kann man, um die andre AC zu finde
die Proportion gebrauchen

sin tot : tangB = AB : AC (439. §.);
nd falls man Tafeln zur Hand hat, welche die Se-
anten mit ihren Logarithmen enthalten: so ergiebt
ich die Hypothenuse aus der Proportion

sin tot : secB = AB : BC (439. §.).

Sonst kann man sie auch, wenn AC gefunden ist,
ach dem 283. §. suchen. Es sey AB = 54837,2
uth. und B = 65°28′17″: so findet man

g.65°28′ = 10,3406267	lsec65°28′ = 10,3817191
17″ 948	17″ = 784
lAB = 4,7390753	lAB = 4,7390753
lAC = x5.0797968	lBC = x5,1208728
also AC = 120170,2	also BC = 132090,8

Zusatz. Wenn zwey von den bekannten Win-
ln gleich groß, so sind die gegenüberstehenden Sei-
n gleich groß. (56. §.) Wäre im Dreyeck EBC
181 Fig.) der Winkel an B = 77°33′26″, an C
: 51°13′17″, so wäre auch BEC = 51°13′17″,
id BE = BC: auch weiß man, daß EC von der
rauf senkrechten Linie BD halbirt wird. Wenn nun
E gegeben ist, und CE gefunden werden soll; so
nn man ansetzen

sin tot : BE = sin ½EBC : ½CE.

ngekehrt, wenn CE gegeben ist, so findet man BE
rmittelst der Proportion

sin ½EBC : ½CE = sin. tot : BE.

II. Algebraische Auflösung.

Wenn ausser den Winkeln die Seite AB gegeben
, und BC gesucht werden soll, so hat man auch

$C = \frac{AB.\sin A}{\sin(A+B)}$: (440. §. 2 Zus.) also auch BC

$= \frac{AB\sin A}{\sin A\cos B + \cos A\sin B}$ (423. §.) und das giebt

BC

$$BC = \frac{AB \operatorname{tang} A}{\sin B + \operatorname{tg} A \cdot \cos B}.$$ Eben so findet man

$$AC = \frac{AB \cdot \operatorname{tg} B}{\sin A + \operatorname{tg} B \cos A}.$$

442. §.

Im Dreyeck *ABC* sind zwey Seiten *AB*, *BC*, und ein gegenüberstehender Winkel *A* gegeben: man soll die übrigen Winkel *B*, *C* und die dritte Seite *AC* finden.

Aufl. Weil eine Seite BC dem gegebenen Winkel A gegenüber stehet, so kann man den Winkel C, welcher der andern gegebenen Seite AB gegenüber stehet, vermittelst der im vor. §. schon gebrauchten Proportion finden, wenn man sie nun so ordnet, daß der Sinus des gesuchten Winkels C das letzte Glied werde: demnach setze man

$$BC : \sin A = AB : \sin C.$$

Der Sinus, welcher so gefunden wird, gehört für zweyerley Winkel, wofern es nicht der ganze Sinus ist: (411. §.) also könnte C sowohl stumpf als spitz seyn. Wenn aber A ein rechter, oder ein stumpfer Winkel ist, so weiß man, daß C nothwendig spitz seyn müsse. (75. §.) Wenn A spitz und $BC > AB$ ist, so ist ebenfalls nothwendig C ein spitzer Winkel; denn wollte man C stumpf annehmen, so müßte $A > BC$ seyn, welches der Voraussetzung widerspricht. Demnach bleibt die Sache nur zweifelhaft, wenn A spitz, und $BC < AB$ ist, welches mit dem 78 und 79. §. übereinstimmet. Weil man aber gewöhnlich aus andern Gründen die Grösse der gesuchten Winkel schon einigermassen zum voraus weiß, so fällt der Zweifel mehrentheils weg.

Nach

Nachdem auf diesem Wege C gefunden ist, weiß man auch, wie groß B sey, und man kann AC nach der Regel des vorigen §. vermittelst der Proportion sinA : BC = sinB : AC finden.

Es sey AB = 64875,74 Ruth. BC = 45613,96 R. A = 26° 19′ 36″, so hat man die Proportion 45613,96 : sin 26° 19′ 36″ = 64875,74 sinC, und die Rechnung giebt

$$l\sin 26°\,19'\,36'' = 9{,}6468822$$
$$l64875{,}74 = 4{,}8120823$$
$$14{,}4589645$$
$$l45613{,}96 = 4{,}6590976$$
$$l\sin.\,C = 9{,}7998669$$

demnach ist entweder C = 39°6′32″, oder C = 140°53′28″, also im ersten Fall B = 114°33′52″, im zweyten Fall aber B = 12°46′56″. Hiernach richtet sich also die fernere Rechnung, wenn man auch C vermittelst der Proportion sinA : BC = sinB : AC suchen will.

Um ein andres Exempel zu geben, wo die Zweydeutigkeit wegfällt, sey A = 36°52′11⅔″, AB = 10000 R, BC = 6000 R, so ist der Ansatz

6000 : sin 36° 52′ 11⅔″ = 10000 : sinC,

und man erhält

$$l10000 = 4{,}0000000$$
$$l\sin 36°\,52'\,11\tfrac{2}{3}'' = 9{,}7781513$$
$$13{,}7781513$$
$$l6000 = 3{,}7781513$$
$$l\sin C = 10{,}0000000,$$

also ist C = 90° und B = 53° 7′ 48⅓″.

Algebraische Auflösung.

Aus der Gleichung $\sin C = \frac{AB}{AC} \sin A$, wenn

Kürze halber $\frac{AB}{AC} = n$ gesetzt wird, hat man auch

$\cos C = \sqrt{(1 - n^2 \sin A^2)}$. Ferner ist $\sin B =$
$\sin(180° - (A + C))$, also $\sin B = \sin A \cos C$
$+ \cos A \sin C$, und wenn die vorigen Werthe von
$\sin C$ und $\cos C$ gebraucht werden, $\sin B =$
$\sin A \sqrt{(1 - n^2 \sin A^2)} + n \sin A \cos A$.

1. Zusatz. Wenn beyde gegebene Seiten, wie
EB und BC im Dreyeck EBC gleich groß sind, so ist
es gleich viel, ob ein gegenüberstehender Winkel bey
E oder C, oder anstatt dessen der Winkel EBC zwi-
schen den bekannten Seiten gegeben ist. Allemal
hat man $BEC = BCE$, also $EBC = 180° - 2BEC$
und umgekehrt $BEC = \frac{1}{2}(180° - EBC) = BCE$.
Man weiß, daß EC von der aus B darauf senkrecht
gezogenen Linie BD halbirt werde: also findet man
$DE = \frac{1}{2}EC$ vermittelst der Proportion

$$\text{sin. tot} : BE = \sin \tfrac{1}{2}EBC : \tfrac{1}{2}EC.$$

2. Zusatz. Wenn im gleichschenklichten Dreyeck
EBC alle drey Seiten gegeben sind, so kann man
die Auflösung eben dieser Aufgabe anwenden, auch
die Winkel zu finden. Weil nemlich EC von der
darauf senkrechten Linie BD halbirt wird, so hat man

$$BE : \text{sin. tot} = \tfrac{1}{2}EC : \sin \tfrac{1}{2}EBC;$$

also auch $BEC = \frac{1}{2}(180° - EBC) = 90° - \frac{1}{2}EBC$
$= BCE$.

443. §.

191 Wenn die Zahl der Grade eines Kreisbogens
Fig. *ABE* mit dem dazu gehörigen Halbmesser *CA*
gegeben

gegeben ist, die Sehne *AE* dieses Bogens zu finden.

Auch umgekehrt: aus der Sehne eines Kreisbogens und seinem Halbmesser die Anzahl seiner Grade zu finden.

Aufl. Beyde Aufgaben sind nur besondre Fälle der Aufgabe des vor. §. Weil nemlich allemahl ACE ein gleichschenklichtes Dreyeck ist, so kann man $ACE = \psi$ setzen, und im ersten Fall mit Hülfe der Proportion

$$\sin.tot : AC = \sin\tfrac{1}{2}\psi : \tfrac{1}{2}AE \quad (442.\ §.\ 1.\ Zus.)$$

im zweyten Fall aber nach eben derselben nur anders geordneten Proportion

$$AC : \sin.tot = \tfrac{1}{2}AE : \sin\tfrac{1}{2}\psi \quad (442.\ §.\ 2.\ Zus.)$$

die Rechnung führen. Diese und andre ähnliche Proportionen liegen schon in den oben bewiesenen allgemeinen Grundformeln, und man muß sich auch gewöhnen, nach diesen allgemeinen Formuln zu rechnen.

Nach dem 422. §. ist $chord\psi = 2\sin\frac{1}{2}\psi$ für den Halbmesser $= 1$, hier also $AE = 2AC.\sin\frac{1}{2}\psi$, wo auch $\sin\frac{1}{2}\psi$, der natürliche Sinus ist. Will man so aus den gemeinen Tafeln rechnen, so hat man

$$E = \frac{2\sin art\frac{1}{2}\psi}{\sin.tot}.\ AC,$$ eben so, wie es die vorige Proportion giebt.

Eben die Formul des 422. §. giebt $\sin\frac{1}{2}\psi\ \frac{1}{2}chord\psi$, also $\frac{\sin.art.\frac{1}{2}\psi}{\sin.tot.} = \frac{\frac{1}{2}AE}{AC}$, und das ist die vorige Gleichung, woraus $\sin art\frac{1}{2}\psi = \frac{\frac{1}{2}AE.\sin.tot.}{AC}$ gefunden wird.

1. Zusatz. Wenn in der Gleichung $AE = \frac{2 \sin. art \frac{1}{2}\psi}{\sin. tot.} . AC$ der Halbmesser AC dem Modulus des künstlichen trigonometrischen Systems, wozu der Sinus $\frac{1}{2}\psi$ gehört, etwa dem Halbmesser der gemeinen Tafeln gleich seyn soll; so ist $AE = 2 \sin. art. \frac{1}{2}\psi$: also darf man nur den Sinus des halben Bogens aus den Tafeln doppelt nehmen. Wird dagegen $AC = \frac{1}{2}(\sin. tot.)$ angenommen, so erhält man $AE = \sin. art. \frac{1}{2}\psi$: mithin ist die Sehne des Bogens, der eine gegebene Anzahl Grade hält, so groß als der Sinus der Tafeln für einen Bogen von halb sovielen Graden.

2. Zusatz. Hierauf gründen sich Methoden, die Winkel anstatt des Transporteurs vermittelst ihrer Sehnen zu messen, welche von den practischen Schriftstellern ausführlicher beschrieben werden.

444. §.

191 Fig. Wenn der Halbmesser *AC* eines Kreises gegeben ist, und die Anzahl der Seiten des in oder um den Kreis beschriebenen regulären Polygons, die Polygonseite *AE* oder *PQ* zu finden.

Auch umgekehrt: Wenn die Seite *AE* oder *PQ*, eines regulären Polygons nebst der Anzahl der Seiten gegeben ist, den größten oder kleinsten Halbmesser desselben zu finden.

Aufl. Man setze den Polygonwinkel $LAE = \Phi$, den Centriwinkel $ACE = \psi$, die Zahl der Seiten $= n$, so ist $\Phi = 180° - \frac{360°}{n}$, und $\psi =$

$180° - \varphi$. (275. §.) Man setze ferner $AC = r$, so ist $AE = 2r \sin \frac{1}{2}\psi$ (443. §.) $= 2r \cos \frac{1}{2}\psi$, und $BP = r \operatorname{tang} \frac{1}{2}\psi$, (439. §.) also $PQ = 2r \operatorname{tg} \frac{1}{2}\psi = 2r \cot \frac{1}{2}\varphi$.

Wenn umgekehrt AE gegeben ist, so hat man $r = \frac{1}{2}AE : \cos \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}AE \sec \frac{1}{2}\varphi$: aus PQ aber findet man $r = \frac{1}{2}PQ : \cot \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}PQ \operatorname{tg} \frac{1}{2}\varphi$.

Um die Formuln allgemeiner auszudrücken sey a die Seite des innern, b die Seite des äussern regulären Polygons, so hat man $a = 2r \cos \frac{1}{2}\varphi$, $b = 2r \cot \frac{1}{2}\varphi$. Bey der wirklichen Berechnung aus den trigonometrischen Tafeln setzt man $a = \frac{2r \cos. \text{art.} \frac{1}{2}\varphi}{\sin. \text{tot.}}$ und $b = \frac{2r \cot. \text{art.} \frac{1}{2}\varphi}{\sin. \text{tot.}}$: also ist $log. a = l2 + lr + l\cos \frac{1}{2}\varphi - l \sin. \text{tot.}$

$log. b = l2 + lr + l\cot \frac{1}{2}\varphi - l \sin. \text{tot.}$

Exempel.

1. Für das Siebeneck ist $\varphi = 128° 34' 17\frac{1}{7}''$, $\frac{1}{2}\varphi = 64° 17' 8\frac{4}{7}''$. Es sey $r = 3420$ R: so ist die Rechnung für die Seite des Siebenecks um den Kreis

$$l2 = 0,3010300$$
$$lr = 3,5340261$$
$$l\cot \tfrac{1}{2}\varphi = 9,6826667$$
$$lb = x3.5177228$$

also die Seite des Siebenecks um den Kreis

$$b = 3293,995 \text{ Ruthen.}$$

ferner für das Siebeneck im Kreise

$$l2r = 3,8350561$$
$$l\cos \tfrac{1}{2}\varphi = 9,6373798$$
$$la = x3.4724359$$

Also die Seite des Siebenecks im Kreise

$$a = 2967{,}809 \text{ Ruthen.}$$

2. Wäre umgekehrt die Seite des Siebenecks $a =$ 1000 Ruth: so erhielte man für des umschriebenen Kreises Halbmesser $r = \frac{1}{2}a : \cos\frac{1}{2}\Phi$, oder $r = \frac{\frac{1}{2}a.\sin.tot.}{\cos.art\,\frac{1}{2}\Phi}$, mithin $log.\,r = l\frac{1}{2}a + l\sin.tot - l\cos.art.\frac{1}{2}\Phi$. Die Rechnung giebt

$$l\tfrac{1}{2}a + l\sin tot. = 12{,}6989700$$
$$-l\cos\tfrac{1}{2}\Phi = 9{,}6373798$$
$$lr = 3{,}0615902$$

also ist der gesuchte Halbmesser $r = 1152{,}365$.

Für den Halbmesser des Kreises im Siebeneck, wenn die Seite $b = 1000$ Ruthen seyn soll, ist $r = \frac{1}{2}b\cot\frac{1}{2}\Phi$, oder $r = \frac{\frac{1}{2}b.\sin.tot}{\cot.art.\frac{1}{2}\Phi}$, mithin $lr = l\frac{1}{2}b + l\sin.tot. - l\cot.art\frac{1}{2}\Phi$: also giebt die Rechnung

$$l\tfrac{1}{2}b + l\sin.tot. = 12{,}6989700$$
$$l\cot\tfrac{1}{2}\Phi = 9{,}6826667$$
$$3{,}0163033$$

und man findet den Halbmesser $r = 1038{,}253$ Ru

Zusatz. Wenn man Tafeln hätte, aus welch man die trigonometrischen Linien in vielen Decim stellen für sehr kleine Winkel nehmen könnte; so w de das die Rechnung bey Auflösung der Aufgabe 285. §. sehr erleichtern: wenn es auch nur dien sich von der Richtigkeit der Zahlen, die Ludolph Cölln berechnet hat, zu versichern. Wenn der Ha messer des Kreises, also der kleinste Halbmesser äussern regulären Polygons = 1 ist, so ist der grö Halbmesser dieses äussern Polygons die Secante,

der kleinste Halbmesser des ähnlichen innern Polygons der Cosinus des halben Centriwinkels. Wenn nun die Peripherie des äussern Polygons = P die Peripherie des ähnlichen innern = p gesetzt, und $\sec\frac{1}{2}\psi = 1+\mu$ gefunden wird, also $\sec\frac{1}{2}\psi - 1 = \mu$; so ist $\frac{P}{p} = 1+\mu$, also $\frac{P-p}{p} = \mu$, und $P-p = \mu p$. Weil nun gewiß $p < 7$ bleibt, (284. §. 1. 2.) so ist $P-p < 7\mu$, oder $P-p < 7.(\sec\frac{1}{2}\psi - 1)$. Wenn ferner $\frac{1}{n}$ ein gegebener Bruch ist, und $P-p < \frac{1}{n}$ ausfallen soll, so muß $7(\sec\frac{1}{2}\psi - 1) < \frac{1}{n}$, oder $\mu < \frac{1}{7}.\frac{1}{n}$ seyn. So ergiebt sich, wie die Aufgabe des 285. §. mit Hülfe trigonometrischer Rechnungen aufgelöset werden könne.

445. §.

Wenn der Halbmesser r eines Kreises gegeben ist, die Seite des regulären Zehnecks in diesem Kreise ohne Gebrauch trigonometrischer Rechnungen zu finden. 191 Fig.

1 Aufl. Es sey AB die gesuchte Seite des Zehnecks, AB sey bis D verlängert, BD = BC = r gemacht, und CD gezogen: so ist ABC = 2BCD. Nun ist ferner $ACB = \frac{4}{10}R = \frac{2}{5}R$, und $ABC = 2R - \frac{1}{5}R = \frac{4}{5}R$, folglich ABC = 2ACB, und das gleichschenklichte Dreyeck ABC hat die Eigenschaft, daß jeder Winkel an der Grundlinie AB doppelt so groß ist, als der Winkel an der Spitze C. Weil nun vermöge der Verzeichnung auch ABC = 2BCD war, so ist ACB = BCD = ADC: demnach ist das Dreyeck ADC ~ ACB (210. §.), und AD : AC = AC : AB, d. i. $AB + r : r = r : AB$. Es sey nun $AB = x$: so hat man die Gleichung $xx + rx = rr$,

und diese giebt nach dem 197. §. Allg. R. $x = -\frac{1}{2}r \pm \sqrt{\frac{5}{4}r^2}$, oder $x = -\frac{1}{2}r \pm \frac{1}{2}r\sqrt{5}$.

Weil $\sqrt{5} > 2$ ist, so ist die negative Wurzel $> r$ und um deßwillen kann sie die gesuchte Seite des Zehneckes nicht seyn: indessen leistet sie der Gleichung ein Genüge, weil in der zum Grunde gelegten Proportion $AB + r : r = r :$ AB das erste und letzte Glied auch beyde negativ seyn können. Man findet also die Seite des Zehneckes $AB = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$. Daraus folgt zugleich die nachstehende

geometrische Verzeichnung

Man setze CF auf AC senkrecht, und nehme CG $= \frac{1}{2}r$, so wird $GF = \sqrt{(rr + \frac{1}{4}rr)} = \sqrt{\frac{5}{4}rr}$. Man nehme ferner $GH = GF$, so ist $CH = GH - GC = \sqrt{\frac{5}{4}rr} - \frac{1}{2}r =$ der gesuchten Seite AB der regulären Zehneckes.

Zusatz. Weil auch $AB = 2r \sin \frac{1}{2}ACB = 2r \sin. 18°$ gefunden wird, (444. §.) und $AB = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$ war; so findet man $\sin 18° = \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)$.

446. §.

Die Gleichung des vor. §. $xx + rx = rr$ giebt auch $xx = rr - rx$, oder $xx = r(r - x)$. Es ist aber $CK = r$, und vermöge der geometrischen Verzeichnung $CH = AB = x$, (445. §.) also $HK = r - x$. Wenn nun in der Gleichung $xx = r(r - x)$ diese Werthe anstatt x, r, und $r - x$ gesetzt werden; so findet man $CH^2 = CK.HK$. Der Halbmesser CK ist demnach bey H so getheilt, daß das Quadrat des größten Theiles dem Rechteck aus dem kleinern Theil in die ganze Linie gleich ist. Nach dem Sprachgebrauch der alten Geometer ist dieses die **Theilung einer graden Linie** media et extrema ratione. Ein

olche Theilung wird demnach auf eben die Art be-
erkstelliget, wie man zum gegebenen Halbmesser die
Seite des Zehneckes sucht, wenn man nemlich die
egebene grade Linie für den Halbmesser des Kreises
immt.

447. §.

Wenn die Seite AB eines regulären Poly- 191
ons im Kreise gegeben ist, die Seite AE eines Fig.
ndern zu finden, das halb so viele Seiten hat.

Aufl. Es sey $ACB = \alpha$: so ist $AB = 2r\sin\frac{1}{2}\alpha$
d $AE = 2r\sin\alpha$. Ferner ist $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$,
24. §.) also $AE = 2r.2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha = 2AB\cos\frac{1}{2}\alpha$,
ithin auch $AE = 2AB\sqrt{(1-\sin\frac{1}{2}\alpha^2)}$. Wenn in
reser Gleichung $\sin\frac{1}{2}\alpha = \frac{AB}{2r}$ gesetzt wird, so er-
lt man $AE = 2AB\sqrt{\left(1-\frac{1}{4}\cdot\frac{AB^2}{r^2}\right)}$, oder
$E = AB\sqrt{(4-AB^2:r^2)}$.

448. §.

Wenn die Seite des regulären Zehneckes be-
nnt ist, die Seite des regulären Fünfeckes
finden.

Aufl. Wenn AB die Seite des Zehneckes ist, so
wie im 445. §. $AB = x$, und die Seite des Fünf-
es $AE = y$: alsdenn ist $y = \sqrt{(4x^2 - x^4:r^2)}$,
47. §.) und überdem hat man $xx + rx = rr$.
445. §.) Aus der letzten Gleichung folgt $\frac{x^2}{r} =$
$- x$, also $\frac{x^4}{r^2} = r^2 - 2rx + x^2$, und das in

die erste Gleichung gesetzt giebt $y = \sqrt{(3x^2 + 2rx - rr)}$, oder $y = \sqrt{(x^2 + 2(x^2 + rx) - rr)}$. Weil nun vermöge der ersten Gleichung $x^2 + rx = rr$ war, so findet man $y = \sqrt{(x^2 + r^2)}$. Daraus folgt die nachstehende

geometrische Verzeichnung.

Man ziehe in der 191 Figur HF, so ist $HF = \sqrt{(rr + CH^2)} = \sqrt{(rr + AB^2)}$, (445. §.) also HF = AE = der gesuchten Seite des Fünfeckes.

Zusatz. Weil $AB = \frac{1}{2}r(\sqrt{5} - 1)$ war (445. §.) so ist $AE = \sqrt{(rr + \frac{1}{4}rr(\sqrt{5} - 1)^2)} = r\sqrt{(1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)^2)}$. Ferner findet man $1 + \frac{1}{4}(\sqrt{5} - 1)^2 \; \frac{1}{4}(4 + 5 - 2\sqrt{5} + 1) = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{5})$, also ist auch $AE = r\sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{2}}$.

449. §.

Die Seite AL der regulären Fünfeckes ist gegeben, man soll den dazu gehörigen Halbmesser finden.

Aufl. Man richte $LR = \frac{1}{2}AL$, auf AL senkrecht auf, ziehe AR, und nehme $RS = LR = \frac{1}{2}AL$, so ist LS der gesuchte Halbmesser.

Beweis. Es ist vermöge der Verzeichnung tg. ARL $= \frac{AL}{LR} = 2$, also sec. ARL $= \sqrt{5}$, cos ARL $=$

$\sin SAL = \frac{1}{\sqrt{5}}$. Ferner ist $ASL = \frac{1}{2}ARL$, al

$\sin ASL = \sin \frac{1}{2}ARL = \sqrt{\frac{1 - \cos ARL}{2}}$ (42

§.) $= \sqrt{\frac{1 - 1 : \sqrt{5}}{2}}$, oder $\sin ASL = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{10}}$

=

$= \frac{1}{\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{2}}$. Im Dreyeck ALS

ber ist $\frac{AL}{\sin ASL} = \frac{LS}{\sin SAL}$ (440. §.) oder

$L = \frac{\sin ASL}{\sin SAL} \cdot LS$, mithin $AL = LS\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{2}}$,

nd daraus folgt, daß LS der gesuchte Halbmesser y.

450. §.

Die Summe der Sinus zweener Winkel erhält sich zur Differenz ihrer Sinus, wie die Tangente der halben Summe dieser Winkel zur Tangente ihrer halben Differenz.

Beweis. Es war im 423. §.

$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta) = \sin\alpha\cos\beta - \cos\alpha\sin\beta$

Also ist I) $\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta$

und II) $\sin(\alpha+\beta) - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos\alpha\sin\beta$

Man setze nun $\alpha+\beta = \eta$, $\alpha-\beta = \vartheta$, so ist $\alpha = \frac{1}{2}(\eta+\vartheta)$, und $\beta = \frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$: (181. §. Allg. Rech.) diese Werthe setze man in die Gleichung I und I, so wird

III) $\sin\eta + \sin\vartheta = 2\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

IV) $\sin\eta - \sin\vartheta = 2\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$.

Demnach ist $\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\sin\eta-\sin\vartheta} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)}{\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)} \times \frac{\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}{\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$ oder $\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\sin\eta-\sin\vartheta} = \tang\frac{1}{2}(\eta+\vartheta) \times \frac{1}{\tang\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$ (417. §.) $= \frac{\tang\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)}{\tang\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$, und daraus folgt die Proportion

$\sin\eta$

$\sin\eta + \sin\vartheta : \sin\eta - \sin\vartheta = \tang\frac{1}{2}(\eta+\vartheta) : \tang\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$.

Zusatz. Im Dreyeck ABC (181. Fig.) ist AC : $\sin B = AB : \sin C$, (440. §.) also $AC + AB : AC - AB = \sin B + \sin C : \sin B - \sin C$: (180. 182. §.) folglich auch $AC + AB : AC - AB = \tang\frac{1}{2}(A+C) : \tang\frac{1}{2}(B-C)$.

451. §.

Die Summe der Cosinus zweener Winkel verhält sich zur Differenz dieser Cosinus, wie die Cotangente ihrer halben Summe zur Tangente ihrer halben Differenz.

Beweis. Aus den beyden Gleichungen

$\cos(\alpha-\beta) = \cos\alpha\cos\beta + \sin\alpha\sin\beta$,

$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$, (423. §.)

erhält man

I.) $\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta$,

II.) $\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\sin\beta$.

Ist nun wie vorhin $\alpha+\beta=\eta$, und $\alpha-\beta=\vartheta$, so findet man ferner

III.) $\cos\vartheta + \cos\eta = 2\cos\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\cos\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

IV.) $\cos\vartheta - \cos\eta = 2\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)$

und daraus folgt $\dfrac{\cos\vartheta+\cos\eta}{\cos\vartheta-\cos\eta} = \dfrac{\cot\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)}{\tang\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}$.

Zusatz. Wenn man mit den beyden Gleichungen III. und IV. die beyden Gleichungen n. III. und IV. aus dem 450. §. verbindet, so erhält man noch folgende

$$\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\cos\vartheta+\cos\eta} = \tang\tfrac{1}{2}(\eta+\vartheta),$$

$$\frac{\sin\eta+\sin\vartheta}{\cos\vartheta-\cos\eta} = \cot\tfrac{1}{2}(\eta-\vartheta),$$

sin

$$\frac{\sin\eta - \sin\vartheta}{\cos\vartheta + \cos\eta} = \tang\tfrac{1}{2}(\eta - \vartheta),$$

$$\frac{\sin\eta - \sin\vartheta}{\cos\vartheta - \cos\eta} = \cot\tfrac{1}{2}(\eta + \vartheta):$$

o ist

$$\frac{\cos\vartheta - \cos\eta}{\sin\eta - \sin\vartheta} = \tang\tfrac{1}{2}(\eta + \vartheta) = \frac{\sin\eta + \sin\vartheta}{\cos\vartheta + \cos\eta}.$$

berdem wird auch

$$\frac{\sin\eta + \sin\vartheta}{\sin\eta - \sin\vartheta} \times \frac{\cos\vartheta + \cos\eta}{\cos\vartheta - \cos\eta} = (\cot\tfrac{1}{2}(\eta - \vartheta))^2,$$

$$\frac{\sin\eta + \sin\vartheta}{\sin\eta - \sin\vartheta} \times \frac{\cos\vartheta - \cos\eta}{\cos\vartheta + \cos\eta} = (\tang\tfrac{1}{2}(\eta + \vartheta))^2,$$

452. §.

Eine Reihe Kreisbogen läuft in arithmeti-er Progression fort, man soll die Summe er dazu gehörigen Sinus und Cosinus den.

Aufl. 1. Aus der Gleichung n. 1. im 450. §. gt $\sin(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)$. Man e nach einander $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, $\alpha+3\beta$.... $+(n-1)\beta$ anstatt α, so findet man

$\alpha = \sin\alpha$

$(\alpha+\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)$

$(\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \sin\alpha$

$(\alpha+3\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+\beta)$

$(\alpha+4\beta) = 2\sin(\alpha+3\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+2\beta)$

$(\alpha+5\beta) = 2\sin(\alpha+4\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+3\beta)$

$\vdots \qquad \vdots$

$(\alpha+n\beta) = 2\sin(\alpha+(n-1)\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+(n-2)\beta).$

Man

Man addire auf beyden Seiten, und setze die Summe aller Sinus, welche mit den in arithmetischer Progression fortlaufenden Bogen α, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$, ... $\alpha+n\beta$, zusammen gehören $= S$, so findet man

$S = \sin\alpha + 2(S - \sin(\alpha+n\beta))\cos\beta - (S - \sin\alpha + (n-1)\beta$
$- \sin(\alpha+n\beta)) - \sin(\alpha-\beta)$

also ferner

$2S(1-\cos\beta) = \sin\alpha - 2\sin(\alpha+n\beta)\cos\beta + \sin(\alpha+(n-1)\beta$
$+ \sin(\alpha+n\beta) - \sin(\alpha-\beta$

Weil nun $\sin(\alpha+(n+1)\beta) = 2\sin(\alpha+n\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+(n-1)\beta)$ gefunden wird, so erhält man auch

$2S(1-\cos\beta) = \sin\alpha - \sin(\alpha+(n+1)\beta) + \sin(\alpha+n\beta$
$- \sin(\alpha-\beta$

Ferner ist $\sin\alpha - \sin(\alpha-\beta) = 2\cos(\alpha - \frac{1}{2}\beta)\sin\frac{1}{2}\beta$ (450. n. IV.) also nach eben der Regel

$\sin(\alpha+(n+1)\beta) - \sin(\alpha+n\beta) = 2\cos(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta)\sin\frac{1}{2}\beta$

Diese Werthe in die vorige Gleichung gesetzt geben

$S(1-\cos\beta) = \cos(\alpha-\frac{1}{2}\beta)\sin\frac{1}{2}\beta - \cos(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta)\sin$

Nun addire man auf beyden Seiten mit $1 - \cos$ $= 2\sin\frac{1}{2}\beta^2$, (425. §. n. 1.) so giebt das

$$S = \frac{\cos(\alpha - \frac{1}{2}\beta) - \cos(\alpha + (n+\frac{1}{2})\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\beta},$$

oder $S = \dfrac{\sin(\alpha + \frac{1}{2}n\beta)\sin\frac{1}{2}(n+1)\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}$. (451. §. n. II

2. Aus der Gleichung n. I. im 451. §. erhält man $\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\beta$ Wenn man also wie vorhin n. 1. rechnet, so findet man

$\cos\alpha = \cos\alpha$

$\cos(\alpha+\beta) = 2\cos\alpha\cos\beta - \cos(\alpha-\beta)$

$\cos(\alpha+2\beta) = 2\cos(\alpha+\beta)\cos\beta - \cos\alpha$

$\cos(\alpha+3\beta) = 2\cos(\alpha+2\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+\beta)$

$\cos(\alpha+4\beta) = 2\cos(\alpha+3\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+2\beta)$

$\cos(\alpha+5\beta) = 2\cos(\alpha+4\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+3\beta)$

$\vdots \qquad \vdots$

$\cos(\alpha+n\beta) = 2\cos(\alpha+(n-1)\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+(n-2)\beta)$

Dan addire auf beyden Seiten, und setze nun die Summe der Cosinus aller Bogen α, $\alpha+\beta$, $\alpha+2\beta$ $\ldots\alpha+(n+1)\beta = S$, so findet man

$$\cos\alpha + 2(S - \cos(\alpha+n\beta)\cos\beta) - (S - \cos(\alpha+(n-1)\beta) - \cos(\alpha+n\beta)) - \cos(\alpha-\beta),$$

und daraus ferner

$$(1-\cos\beta) = \cos\alpha - \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+n\beta) + \cos(\alpha+(n-1)\beta) - 2\cos(\alpha+n\beta)\cos\beta.$$

Weiter ist $\cos(\alpha+(n+1)\beta) = 2\cos(\alpha+n\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+(n-1)\beta)$, also erhält man

$$(1-\cos\beta) = \cos\alpha - \cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+n\beta) - \cos(\alpha+(n+1)\beta).$$

Es ist aber $\cos\alpha - \cos(\alpha-\beta) = -2\sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)\sin\frac{1}{2}\beta$, (51§. n. IV.) und eben so $\cos(\alpha+n\beta) - \cos(\alpha+(n+1)\beta) = 2\sin(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta)\sin\frac{1}{2}\beta$, mithin wird

$$(1-\cos\beta) = \sin(\alpha+(n+\tfrac{1}{2})\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta - \sin(\alpha-\tfrac{1}{2}\beta)\sin\tfrac{1}{2}\beta,$$

und $S = \dfrac{\sin(\alpha+(n+\frac{1}{2})\beta) - \sin(\alpha-\frac{1}{2}\beta)}{2\sin\frac{1}{2}\beta}$, oder

$$= \frac{\cos(\alpha+\frac{1}{2}n\beta)\sin\frac{1}{2}(n+1)\beta}{\sin\frac{1}{2}\beta}.$$

1. Zusatz. Wenn β negativ ist, so hat man

$\sin\alpha = \sin\alpha$

$\sin(\alpha-\beta) = 2\sin\alpha\cos\beta - \sin(\alpha+\beta)$

$\sin(\alpha-2\beta) = 2\sin(\alpha-\beta)\cos\beta - \sin\alpha$

sin

$\sin(\alpha-3\beta) = 2\sin(\alpha-2\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-\beta)$
$\sin(\alpha-4\beta) = 2\sin(\alpha-3\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-2\beta)$
$\sin(\alpha-5\beta) = 2\sin(\alpha-4\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-3\beta)$

also

$\sin(\alpha-n\beta) = 2\sin(\alpha-(n-1)\beta)\cos\beta - \sin(\alpha-(n-2)\beta)$.

und eben so

$\cos(\alpha-n\beta) = 2\cos(\alpha-(n-1)\beta) - \cos(\alpha-(n-2)\beta)$.

2. Zusatz. Man kann die in der Auflösung n. 1. gefundenen Gleichungen auch so herum setzen

$\sin\alpha = 2\sin(\alpha+\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+2\beta)$
$\sin(\alpha+\beta) = 2\sin(\alpha+2\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+3\beta)$
$\sin(\alpha+2\beta) = 2\sin(\alpha+3\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+4\beta)$
$\sin(\alpha+3\beta) = 2\sin(\alpha+4\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+5\beta)$,

also überhaupt

$\sin(\alpha+n\beta) = 2\sin(\alpha+(n+1)\beta)\cos\beta - \sin(\alpha+(n+2)\beta)$,

mithin auch vermöge der Auflösung n. 2.

$\cos(\alpha+n\beta) = 2\cos(\alpha+(n+1)\beta)\cos\beta - \cos(\alpha+(n+2)\beta)$

3. Zusatz. Ausser mehrern Anwendungen, welche von diesen Formuln gemacht werden können, würden sie auch bey Berechnung der Sinustafeln dienen können, oder weil man diese schon vollständig genug hat, wenn man etwa die Richtigkeit einiger darin aufgeführten Zahlen prüfen wollte. Wenn die Sinus und Cosinus für 30° und 15° (§.) für 36° und 18° (§.) bekannt sind, so hat man auch den Sinus und Cosinus von $18-15 = 3°$: also ergeben sich die Sinus und Cosinus von 21°, 24°, 27°, 31°, u. s. f. auch für 12°, 9°, 6°.

453. §.

Im Dreyeck ABC sind zwo Seiten AB, AC nebst dem eingeschlossenen Winkel A gegeben, man

man soll die übrigen beyden Winkel *B* und *C* nebst der dritten Seite *BC* finden.

I. Fall. Wenn $A = 90°$ ist, so schliesse man 189 Fig.
AB : AC = sin. tot : tang B: (439. §.) daraus ergiebt sich B, also ferner $C = 90° - B$, und die Grösse der Hypothenuse BC kann man nach der Proportion sin B : AC = sin. tot : BC suchen. Dem 83. §. gemäß kann man auch, ohne vorher die Winkel zu kennen, zuerst die Hypothenuse BC, und dann aus der Proportion BC : sin. tot = AC : sin B die Winkel B und $C = 90° - B$ finden.

Es sey $A = 90°$, AB = 5419 R. AC = 7364,7 R.
ist 5419 : 7364,7 = sin. tot : tang. B
und die Rechnung giebt

$l 7364{,}7 + l \sin. tot = 13{,}8671551$
$l 5419 = 3{,}7339192$
$l \tang B = 10{,}1332359$
$l \tang 53°39' = 10{,}1331709$
Differenz = = = 650

2647 : 650 = 60'' : 15'' beynahe.
also $B = 53°39'15''$
$C = 36°20'45''$

Wenn man die Winkel in Zahlen braucht, so ist diese Rechnung kürzer, als wenn man zuerst nach dem 83. §. die Hypothenuse suchte, und dann nach dem 41. §. die Winkel berechnete. Dagegen ist es bey allgemeinen algebraischen Rechnungen gewöhnlich am vortheilhaftesten, daß man die Winkel durch die Seiten des Dreyeckes so ausdrücke $\sin B = \frac{AC}{\sqrt{(AB^2+AC^2)}}$, $\cos B = \frac{AB}{\sqrt{(AB^2+AC^2)}} =$ nC. (439. §.)

181 Fig. II. Fall. Wenn A nicht $= 90°$ ist, so subtrahire man A von $180°$, um die Summe der übrigen Winkel $B + C$ zu finden. (274. §.) Wenn man hiernächst ansetzet $AC + AB : AC - AB = \text{tang}\frac{1}{2}(B + C) : \text{tang}\frac{1}{2}(B - C)$, (452. §. Zus.) so findet man die halbe Differenz der gesuchten Winkel. Diese zur halben Summe addirt giebt den grössern, und von der halben Summe subtrahirt, den kleinern Winkel. (181. §. Allg. Rech.) Nun sind alle drey Winkel bekannt, und die dritte Seite kann nach dem 441. §. gefunden werden.

Es sey $A = 29°\,38'\,24''$, $AC = 113499{,}913$ R. $AB = 78324{,}3$ R: so giebt die Rechnung $B + C = 150°\,21'\,36''$, und $\frac{1}{2}(B + C) = 75°\,10'\,48''$. Ferner

$AC = 113499{,}913$ R		$l\,AC - AB =$	4,5462416
$AB = 78324{,}3$		$l\,\text{tg}.\frac{1}{2}(B+C) =$	10,5774351
$AC + AB = 191824{,}213$ R			15,1236767
$AC - AB = 35175{,}613$ R		$l\,AC + AB =$	5,2829036
		$l\,\text{tg}.\frac{1}{2}(B - C) =$	9.8407731

also $\frac{1}{2}(B - C) = 34°\,43'\,28''$, $B = 109°\,54'\,16''$ und $C = 40°\,27'\,20$.

Eine andre Auflösung.

Wenn man die grössere Seite AC mit der kleinern dividirt, so ist der Quotient $\frac{AC}{AB} > 1$. Weil nun die Tangenten aller Winkel zwischen $45°$ und $90°$ ebenfalls grösser als 1 sind, so muß es unter diesen Winkeln einen solchen geben, dessen Tangente $= \frac{AC}{AB}$ ist. Dieser Winkel sey $= \alpha$, also tangα =

$\frac{AC}{AB}$. In der Gleichung $\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang}\alpha+\text{tang}\beta}{1-\text{tang}\alpha.\text{tang}\beta}$ (423. §. Zus.) setze man $\beta =$ 45° so ist $\text{tg}\beta = -1$, und man erhält $\text{tg}(\alpha-45°) = \frac{\text{tang}\alpha-1}{\text{tang}\alpha+1}$. Wenn hiernächst der Werth $\frac{AC}{AB}$ statt $\text{tang}\alpha$ gesetzt wird, so giebt das $\text{tg}(\alpha-45°) = \frac{AC-AB}{AC+AB}$, mithin auch $\text{tang}(\alpha-45°) = \frac{\frac{1}{2}(B-C)}{\frac{1}{2}(B+C)}$. Man hat demnach auch folgende Gleichungen 1) $\frac{\text{tg. art}\,\alpha}{\text{sin. tot}} = \frac{AC}{AB}$,

$\frac{\text{tg. art.}(\alpha-45°)}{\text{sin. tot}} = \frac{\text{tg}\frac{1}{2}(B-C)}{\text{tg}\frac{1}{2}(B+C)}$, die sich ie nachstehenden zwey Proportionen auflösen.

. Die kleinere Seite *AB* zur grössern *AC*, der ganze Sinus zur Tangente eines Win- α.

. Ferner der ganze Sinus zur $\text{tang}(\alpha-45°)$, $\text{tang}\frac{1}{2}(B+C) : \text{tang}\frac{1}{2}(B-C)$, woraus man, vorhin B und C findet.

Bleiben also die vorigen Zahlen, so giebt die Rech-

$$l\text{AC} + l\text{sin tot} = 15{,}0549956$$
$$l\text{AB} = 4{,}8938965$$
$$l\text{tang}\alpha = 10{,}1610991$$

also $\alpha = 55° 23' 28''$

und $\alpha - 45° = 10° 23' 28''$

Dies giebt ferner

$$l\tang(\alpha - 45^\circ) = 9{,}2633382$$
$$l\tang\tfrac{1}{2}(B+C) - l\sin.\,tot = 0{,}5774351$$
$$l\tang\tfrac{1}{2}(B-C) = 9{,}8407733$$

welches B und C so wie vorhin giebt.

Zusatz. Diese zweyte Auflösung dienet vornehmlich in solchen Fällen die Winkel B und C zu finden, wenn nicht die Länge der Seiten AB und AC selbst, sondern nur ihre Logarithmen gegeben sind. Hierdurch ist wenigstens ihr Verhältniß gegen einander gegeben, und dadurch wird die Grösse der Winkel B und C schon bestimmt, weil Dreyecke, die einander gleichen Winkel haben, und proportionale anliegende Seiten, ähnliche, also gleichwinklichte Dreyecke sind. (212. §.)

Algebraische Auflösung.

181 Fig. Im Dreyeck ABC sey BD auf AC senkrecht gesetzt. Wenn nun $BAC = \alpha$, $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$ gesetzt wird; so ist $AD = \frac{1}{2}b + \frac{(c+a)(c-a)}{2b}$, $\frac{bb+cc-aa}{2b}$ (175. §. A. R.) und $AD = c\cos\alpha$ (439. §.) also wird $c.\cos\alpha = \frac{bb+cc-aa}{2b}$, $a = \sqrt{(bb - 2bc.\cos\alpha + cc)}$, woraus sich die Seite $BC = a$ ergiebt, ohne daß es nöthig ist, die Winkel ABC und C vorher zu berechnen.

2. Man setze $ABC = \beta$ und $C = \gamma$, so ist $\sin\beta = \frac{b\sin\alpha}{a}$, (440. §.) also auch $\sin\beta =$

$\frac{b \sin\alpha}{\sqrt{(bb - 2bc.\cos\alpha + cc)}}$, und $\cos\beta =$

$\left(1 - \frac{bb \sin\alpha^2}{bb - 2bc\cos\alpha + cc}\right)$ (405. §.) $=$

$\frac{bb(1 - \sin\alpha^2) - 2bc.\cos\alpha + cc}{bb - 2bc.\cos\alpha + cc}$. Wenn hier

$\cos\alpha^2$ anstatt $1 - \sin\alpha^2$ gesetzt wird, so ist die Wur. aus dem Zähler $= c - b\cos\alpha$, und die Wurzel s dem Nenner ist $= a$: mithin findet man $\cos\beta$

$\frac{c - b\cos\alpha}{a}$, und daraus ferner $\tang\beta =$

$\frac{b \sin\alpha}{-b\cos\alpha}$. (417. §.)

Zusatz. Die Auflösung n. 2. folgt auch aus der eichung $AC = \frac{AB.\tang B}{\sin A + \tang B \cos A}$: (441. §. g. Aufl.) denn man erhält $AC.\sin A + AC.\tang B$ $A = AB\tang B$, also ferner $(AB - AC\cos A)\tang B$ $ACsinA$, und das giebt $\tang B = \frac{AC \sin A}{AB - AC\cos A}$.

454. §.

Im Dreyeck ABC sind die drey Seiten BC, 181
a, $AC = b$, $AB = c$ gegeben, man soll die Fig.
inkel finden.

l. Aufl. Wenn das Dreyeck gleichschenklicht, AB = BC ist; so läßt sich die Aufgabe dem 442. 2. Zus. gemäß auflösen. Wenn dagegen das reyeck ABC ungleichseitig und BD auf AC senkrecht etzt ist, so hat man $AD = \frac{1}{2}b + \frac{(c + a)(c - a)}{2b}$

$$(175.\ \S.\ \text{A. R.}) = \tfrac{1}{2}AC + \frac{(AB+BC)(AB-BC)}{2AC}$$

und $\cos A = \frac{AD \times \mathit{sin\,tot}}{AB}$. (439. §.) Man kann also zuerst AD, und hiernächst A berechnen, da sich dann ferner C und ABC aus dem 441. §. ergeben.

Es sey AC = 113499,913 R., BC = 78324,3 R. AB = 59697,47 R: so giebt die Rechnung

$BC = 78324{,}3 = a$
$AB = 59697{,}47 = c$

$BC + AB = 138021{,}77 = a + c$
$BC - AB = 18626{,}83 = a - c$
$l(a+c) = 5{,}1399476$
$l(a-c) = 4{,}2701389$

$9{,}4100865$
$lb = 5{,}0549956$

$$l\frac{(a+c)(a-c)}{b} = 4{,}3550909$$

$l2 = 0{,}3010300$

$$l\frac{(a+c)(a-c)}{2b} = 4{,}0540609 = l\,ED$$

Also ED = 11325,594
$\frac{1}{2}AC = 56749{,}956$

und AD = 45424,362
Ferner $l\,AD + l\,\sin.t. = 14{,}6572889$
$l\,AB = 4{,}7759559$

$l\,\mathrm{col}\,A = 9{,}8813330$

Also $A = 40^\circ\ 28' - 40'' = 40^\circ\ 27'\ 20''$.

Daraus ergeben sich die übrigen Winkel, wie im 441. §.

II. Auflösung.

Die Gleichung $c.\cos\alpha = \frac{bb+cc-aa}{2b}$ (453. §. II. Aufl.) giebt auch $\cos\alpha = \frac{bb+cc-aa}{2bc}$. Weil nun $\sin\alpha = \sqrt{(1-\cos\alpha^2)} = \sqrt{(1+\cos\alpha)(1-\cos\alpha)}$: wenn setze man den vorigen Werth statt $\cos\alpha$, und es wird $1+\cos\alpha = \frac{(b+c)^2-aa}{2bc}$, $1-\cos\alpha = \frac{1-(b-c)^2}{2bc}$, also $\sin\alpha = \frac{\sqrt{((b+c)^2-aa)(aa-(b-c)^2)}}{2bc}$.

Weil aber $(b+c)^2-aa = (b+c+a)(b+c-a)$ und $aa-(b-c)^2 = (a+b-c)(a-b+c)$ so wird $\sin\alpha = \frac{\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}}{2bc}$. Das vorige Exempel liesse sich also auch so berechnen.

$a = 78324,3$	$l(a+b+c) = 5,40057538$
$b = 113499,913$	$l(a+b-c) = 5,12099074$
$+b = 191824,213$	$l(a+c-b) = 4,38955340$
$c = 59697,47$	$l(b+c-a) = 4,97714297$
$+b+c = 251521,683$	$19,8882625$
$+b-c = 132126,743$	$2)\ 9,9441312$
$a+c = 138021,77$	$+l\sin.t = 10,$
$+c-b = 24521,857$	$l2bc = 10,1319815$
$b+c = 173197,383$	$l\sin\alpha = 9,8121497$
$+c-a = 94873,083$	$\alpha = 40^\circ\ 27'\ 20''.$

Diese Formul ist für die Rechnung mit den Logarithmen am bequemsten: sonst kann man auch eine der bey-

beyden vorigen $\text{col}\alpha = \frac{bb + cc - aa}{2bc}$, oder $1 - \text{sv}\alpha = \frac{aa - (b-c)^2}{2bc}$ brauchen.

Der XVIII. Abschnitt.

Vergleichung der Tangenten und Cotangenten einfacher und vielfacher Winkel.

455. §.

Wenn die Tangenten oder Cotangenten zweener Winkel α und β gegeben sind, die Tangente und Cotangente ihrer Summe $\alpha + \beta$, und Differenz $\alpha - \beta$ zu finden.

Aufl. Es ist $\text{tang}(\alpha+\beta) = \frac{\text{tang}\alpha + \text{tang}\beta}{1 - \text{tang}\alpha\,\text{tang}\beta}$, (423. §. Zus.) also $\cot(\alpha+\beta) = \frac{1 - \text{tang}\alpha\,\text{tang}\beta}{\text{tang}\alpha + \text{tang}\beta}$ (417. §.) $= \frac{\cot\alpha\,\cot\beta - 1}{\cot\beta + \cot\alpha}$, ferner $\text{tang}(\alpha-\beta) = \frac{\text{tang}\alpha - \text{tang}\beta}{1 + \text{tang}\alpha\,\text{tang}\beta}$, und $\cot(\alpha-\beta) = \frac{1 + \text{tang}\alpha\,\text{tang}\beta}{\text{tang}\alpha - \text{tang}\beta}$ (419. §.) $= \frac{\cot\alpha\,\cot\beta + 1}{\cot\beta - \cot\alpha}$.

1. Zusatz. Wenn $\alpha = 45°$ ist, so wird

$\text{tang}(45° + \beta) = \frac{1 + \text{tang}\beta}{1 - \text{tang}\beta} = \frac{\text{col}\beta + \text{sin}\beta}{\text{col}\beta - \text{sin}\beta}$

tang

$$\text{tang}(45^\circ - \beta) = \frac{1 - \text{tang}\beta}{1 + \text{tang}\beta} = \frac{\text{cof}\beta - \text{fin}\beta}{\text{cof}\beta + \text{fin}\beta}$$

Ueberdem auch

$$\cot(45^\circ + \beta) = \frac{1 - \text{tang}\beta}{1 + \text{tang}\beta} = \frac{\text{cof}\beta - \text{fin}\beta}{\text{cof}\beta + \text{fin}\beta},$$

$$\cot(45^\circ - \beta) = \frac{1 + \text{tang}\beta}{1 - \text{tang}\beta} = \frac{\text{cof}\beta + \text{fin}\beta}{\text{cof}\beta - \text{fin}\beta}.$$

2. Zusatz. Aus den Gleichungen

$$\text{fin}\alpha\,\text{cof}\beta \pm \text{cof}\alpha\,\text{fin}\beta = \text{fin}(\alpha \pm \beta)$$

erhält man

$$\text{tang}\alpha \pm \text{tang}\beta = \frac{\text{fin}(\alpha \pm \beta)}{\text{cof}\alpha\,\text{cof}\beta}$$

$$\cot\beta \pm \cot\alpha = \frac{\text{fin}(\alpha \pm \beta)}{\text{fin}\alpha\,\text{fin}\beta}:$$

mithin ferner vermittelst der Division

$$\frac{\text{tang}\alpha + \text{tang}\beta}{\text{tang}\alpha - \text{tang}\beta} = \frac{\text{fin}(\alpha + \beta)}{\text{fin}(\alpha - \beta)},$$

$$\frac{\cot\beta + \cot\alpha}{\cot\beta - \cot\alpha} = \frac{\text{fin}(\alpha + \beta)}{\text{fin}(\alpha - \beta)}.$$

Aehnliche Folgen geben die Gleichungen

$$\text{cof}\alpha\,\text{cof}\beta \mp \text{fin}\alpha\,\text{fin}\beta = \text{cof}(\alpha \pm \beta)$$

es ist nemlich

$$\cot\alpha \mp \text{tang}\beta = \frac{\text{cof}(\alpha \pm \beta)}{\text{fin}\alpha\,\text{cof}\beta}$$

also ferner

$$\frac{\cot\alpha - \text{tang}\beta}{\cot\alpha + \text{tang}\beta} = \frac{\text{cof}(\alpha + \beta)}{\text{cof}(\alpha - \beta)},$$

$$\frac{\cot\beta - \text{tang}\alpha}{\cot\beta + \text{tang}\alpha} = \frac{\text{cof}(\alpha + \beta)}{\text{cof}(\alpha - \beta)}.$$

456. §.

Aus der gegebenen Tangente eines Winkels die Tangente und Cotangente, nebst dem Sinus und Cosinus des doppelten Winkels zu finden.

Aufl. Wenn man $\alpha = \beta$ setzt, so erhält man

$$\text{tang}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1 - \text{tang}\,\alpha^2} = \frac{2\,\text{cot}\,\alpha}{\text{cot}\,\alpha^2 - 1}, \text{ und}$$

$$\text{cot}\,2\alpha = \frac{1 - \text{tang}\,\alpha^2}{2\,\text{tang}\,\alpha} = \frac{\text{cot}\,\alpha^2 - 1}{2\,\text{cot}\,\alpha}. \text{ (455 §.)}$$

Ferner wird $\text{sec}\,2\alpha = \sqrt{(1 + \text{tang}\,2\alpha^2)} = \frac{1 + \text{tang}\,\alpha^2}{1 - \text{tang}\,\alpha^2}$ und $\text{cosec}\,2\alpha = \sqrt{(1 + \text{cot}\,2\alpha^2)} = \frac{1 + \text{tang}\,\alpha^2}{2\,\text{tang}\,\alpha}$, also $\text{cos}\,2\alpha = \frac{1 - \text{tang}\,\alpha^2}{1 + \text{tang}\,\alpha^2}$, und

$$\text{sin}\,2\alpha = \frac{2\,\text{tang}\,\alpha}{1 + \text{tang}\,\alpha^2}. \text{ (417. §.)}$$

457. §.

Aus der Tangente eines Winkels γ die Tangente seiner Hälfte $\frac{1}{2}\gamma$ zu finden.

Aufl. Man setze im 456. §. $2\alpha = \gamma$, also $\alpha = \frac{1}{2}\gamma$; so erhält man $\text{tang}\,\gamma = \frac{2\,\text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma}{1 - \text{tang}\,\frac{1}{2}\gamma^2}$, und daraus folgt

$$\text{tang}\,\gamma - \text{tang}\,\gamma\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 = 2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma, \text{ oder}$$

$$\text{tang}\,\gamma\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 2\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma = \text{tang}\,\gamma,$$

mithin ferner

$$\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma^2 + 2\,\text{cot}\,\gamma\,.\,\text{tang}\,\tfrac{1}{2}\gamma = 1.$$

Man suche die Wurzeln dieser quadratischen Gleichung nach dem 197. §. A. R.: so erhält man

tang $\frac{1}{2}\gamma$

$\text{tang}\frac{1}{2}\gamma = -\cot\gamma \pm \sqrt{(1+\cot\gamma^2)}$,
und weil $\sqrt{(1+\cot\gamma^2)} = \text{cosec}\gamma$, (417. §.)
so ist auch $\text{tang}\frac{1}{2}\gamma = -\cot\gamma \pm \text{cosec}\gamma$.

In dem Kreise ΛBKL, dessen Mittelpunct C ist, sey der Bogen AB das Maaß des Winkels $ACB = \gamma$, seine Tangente AT; ferner sey BC bis Y verlängert, so ist AT zugleich die Tangente des Bogens $ABGY = \gamma + 180°$. Soll man demnach von einem Bogen, dessen Tangente = AT ist, die Hälfte nehmen, so ist das so gut der Bogen $AM = \frac{1}{2}AB = \frac{1}{2}\gamma$, als auch der Bogen $AG = \frac{1}{2}ABGY = \frac{1}{2}\gamma + 90°$. Die gesuchte Tangente des halben Bogens, dessen Tangente AB, ist also einmahl AZ, und zugleich auch — AS; mithin ist 184 Fig.

$AZ = \text{cosec}\gamma - \cot\gamma$ die positive
$AS = -\text{cosec}\gamma - \cot\gamma$ die negative
Wurzel der gefundenen Gleichung.

Zusatz. Wenn vorausgesetzt wird, daß $\gamma < 180°$ sey; so ist $\text{tang}\frac{1}{2}\gamma = \text{cosec}\gamma - \cot\gamma$, also auch $\text{cosec}\gamma = \text{tang}\frac{1}{2}\gamma + \cot\gamma$.

458. §.

Aus der Cotangente eines Winkels γ die Cotangente seiner Hälfte $\frac{1}{2}\gamma$ zu finden.

Aufl. Die Gleichung $\text{tang}\frac{1}{2}\gamma^2 + 2\cot\gamma.\text{tg}\frac{1}{2}\gamma = 1$ (457. §.) giebt $\frac{1}{\cot\frac{1}{2}\gamma^2} + 2\cot\gamma\,\frac{1}{\cot\frac{1}{2}\gamma} = 1$; also $1 + 2\cot\gamma\,\cot\frac{1}{2}\gamma = \cot\frac{1}{2}\gamma^2$, und $\cot\frac{1}{2}\gamma^2 - 2\cot\gamma\,\cot\frac{1}{2}\gamma = 1$. Daraus folgt $\cot\frac{1}{2}\gamma = \cot\gamma \pm \sqrt{(1+\cot\gamma^2)}$.

1. Zusatz. Bey der Voraussetzung, daß $\gamma < 180°$ sey, muß die positive Wurzel dieser Gleichung ge-

gebraucht werden, da dann $\cot\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cosec}\gamma + \cot\gamma$ gefunden wird: mithin ist auch $\operatorname{cosec}\gamma = \cot\frac{1}{2}\gamma - \cot\gamma$.

2. Zusatz. Aus den Gleichungen

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cosec}\gamma - \cot\gamma \text{ (457. §. Zus.)}$$
$$\cot\frac{1}{2}\gamma = \operatorname{cosec}\gamma + \cot\gamma,$$

folgt ferner

$$\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma + \cot\frac{1}{2}\gamma = 2\operatorname{cosec}\gamma,$$
$$\cot\frac{1}{2}\gamma - \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = 2\cot\gamma.$$

3. Zusatz. Man setze $\gamma = 90° - \delta$, also $\frac{1}{2}\gamma = 45° - \frac{1}{2}\delta$, $\operatorname{cosec}\gamma = \sec\delta$, $\cot\gamma = \operatorname{tang}.\delta$. Wenn diese Werthe im 2. Zus. gebraucht werden, so erhält man

$$\operatorname{tang}(45° - \tfrac{1}{2}\delta) = \sec\delta - \operatorname{tang}\delta$$
$$\operatorname{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\delta) = \sec\delta + \operatorname{tang}\delta:$$

mithin auch

$$\operatorname{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\delta) + \operatorname{tg}.(45° - \tfrac{1}{2}\delta) = 2\sec\delta$$
$$\operatorname{tang}(45° + \tfrac{1}{2}\delta) - \operatorname{tg}.(45° - \tfrac{1}{2}\delta) = 2\operatorname{tang}\delta.$$

459. §.

Aus dem Cosinus eines Winkels γ die Tangente und Cotangente seiner Hälfte zu finden.

Aufl. Es ist $\sin\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 - \cos\gamma}{2}}$, und

$\cos\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 + \cos\gamma}{2}}$ (425. §.); also $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\cos\frac{1}{2}\gamma} = \sqrt{\frac{1 - \cos\gamma}{1 + \cos\gamma}}$, und $\cot\frac{1}{2}\gamma = \sqrt{\frac{1 + \cos\gamma}{1 - \cos\gamma}}$ (417. §).

1. Zusatz. Wenn man die Gleichung $\sin\frac{1}{2}\gamma = \cos\frac{1}{2}\gamma . \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$ mit $2\sin\frac{1}{2}\gamma$ multiplicirt, so erhält man $2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 2\sin\frac{1}{2}\gamma \cos\frac{1}{2}\gamma \operatorname{tang}\frac{1}{2}\gamma$, und es ist

$2\sin\frac{1}{2}\gamma$

$2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma = \sin\gamma$: (424. §.) also auch $2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 = \sin\gamma\ \mathrm{tang}\frac{1}{2}\gamma$. Ferner ist $2\sin\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 - \cos\gamma$, (425. §.) und beyde Werthe gleich gesetzt geben $\mathrm{tang}\frac{1}{2}\gamma = \frac{1-\cos\gamma}{\sin\gamma}$. Bleibt nun $\gamma = 90° - \delta$, so ist auch $\mathrm{tang}(45° - \frac{1}{2}\delta) = \frac{1-\sin\delta}{\cos\delta}$.

2. Zusatz. Die Gleichung $\cos\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\frac{1}{2}\gamma}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}\gamma}$ mit $2\cos\frac{1}{2}\gamma$ multiplicirt giebt $2\cos\frac{1}{2}\gamma^2 = \frac{2\sin\frac{1}{2}\gamma\cos\frac{1}{2}\gamma}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}\gamma}$, und es ist auch $2\cos\frac{1}{2}\gamma^2 = 1 + \cos\gamma$: (425. §.) also erhält man $1 + \cos\gamma = \frac{\sin\gamma}{\mathrm{tang}\frac{1}{2}\gamma}$, mithin auch $\mathrm{tang}\frac{1}{2}\gamma = \frac{\sin\gamma}{1+\cos\gamma}$, und $\mathrm{tang}(45° - \frac{1}{2}\delta) = \frac{\cos\delta}{1+\sin\delta}$.

460. §.

Die Tangente eines Winkels ist gegeben: man soll die Tangenten des dreyfachen auch überhaupt eines jeden vielfachen Winkels finden.

Aufl. 1. Es sey ein Kreisbogen für den Halbmesser $= 1$, so ist $\sin 3\varphi = 3\sin\varphi\cos\varphi^2 - \sin\varphi^3$, und $\cos 3\varphi = \cos\varphi^3 - 3\cos\varphi\sin\varphi^2$, also $\mathrm{tang}3\varphi = \frac{\sin 3\varphi}{\cos 3\varphi} = \frac{3\sin\varphi\cos\varphi^2 - \sin\varphi^3}{\cos\varphi^3 - 3\cos\varphi\sin\varphi^2}$. Wenn nun im Zähler und Nenner mit $\cos\varphi^3$ dividirt wird,

so

so erhält man $\text{tang}3\varphi = \frac{3\text{tang}\varphi - \text{tang}\varphi^3}{1 - 3\text{tang}\varphi^2} =$

$\frac{3 - \text{tg}\varphi^2}{1 - 3\,\text{tg}\varphi^2} . \text{tg}.\varphi.$

2. Weil überhaupt $\text{tang}\,n\varphi = \frac{\sin n\varphi}{\cos n\varphi}$ seyn muß, so kann man auf eine ganz ähnliche Art aus den allgemeinen Formuln des 426. §. eine Gleichung für die Tangente des vielfachen Winkels herleiten: man findet $\text{tang}\,n\varphi =$

$$(n.\text{tg}\varphi - \frac{n.n-1.n-2}{1.2.3}\text{tg}\varphi^3 + \frac{n.n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\text{tg}\varphi^5 - \ldots)$$
$$: \left(1 - \frac{n.n-1}{1.2}\text{tg}.\varphi^2 + \frac{n.n-1.n-2.n-3}{1.2.3.4}\text{tg}\varphi^4 - \ldots\right)$$

Der XIX. Abschnitt.

Anwendung der Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts gradlinichter Figuren.

461. §.

182 Fig. Den Flächen Inhalt eines Parallelograms *ABFC*, oder Dreyecks *ABC* auszurechnen, wenn zwo Seiten *AB*, *AC*, nebst dem eingeschlossenen Winkel *BAC* gegeben sind.

Aufl. Es sey $AC = b$, $AB = c$, $BAC = \alpha$, BD auf AC senkrecht, so ist $BD = c \sin\alpha$ (439. §.): also

das

das Parallelogramm ABFC $= bc \sin\alpha$ (276. §.), das Dreyeck ABC $= \frac{1}{2} bc \sin\alpha$ (279. §).

Es sey AC = 54,76 R, AB = 127,53 R, BAC = 113° 16′; so wird

$l b = 1{,}7384634$
$l c = 2{,}1056124$
$l \sin\alpha = 9{,}9631625$ — l sin tot

$l bc \sin\alpha = 3{,}8072383$

also ABFC = 6415,615 Q. R.

und das Dreyeck ABC = 3207,807 Q. R.

Wenn man das Dreyeck sucht, so kann man noch vom

$l bc \sin\alpha = 3{,}8072383$
subtrahiren $l 2 = 0{,}3010300$

so wird $l \frac{1}{2} bc \sin\alpha = 3{,}5062083$

wozu die Zahl 3207,807 gehört.

Weil man durch Hülfe der Logarithmen den Inhalt nicht auf mehr, als 7 Ziffern sicher haben kann (154. 155. §. A. R.); so sucht man nur BD $= c \sin\alpha$ vermittelst der Logarithmen, und sodann das Product AC × BD, oder $\frac{1}{2}$AC × BD durch die ordentliche Multiplication, wenn man den Inhalt auf mehr als 7 Ziffern genau haben will. So fände man im vorigen Exempel

lBD $= l c + l \sin\alpha - l$ sin. tot $= 2{,}0687749$,

also BD = 117,1588, das Pgr. ABFC = 6415,615888 Q. R, und ABC = 3207,807999, oder ABC fast = 3207,808 Q. R.

462. §.

Wenn die drey Seiten $BC = a$, $AC = b$, 181 $AB = c$ eines Dreyecks ABC gegeben sind, den Fig. Inhalt zu finden, ohne vorher die Winkel zu berechnen.

Aufl. Es ist $\sin BAC = \frac{\sqrt{((b+c)^2 - aa)(aa - (b-c)^2)}}{2bc}$,

(454. §. II. Aufl.) und die Fläche ABC $= \frac{1}{2}bc \sin$ BAC (460. §.): also wird diese Fläche $= \frac{1}{4}\sqrt{((b+c)^2 - aa)(aa - (b-c)^2)}$, oder auch ABC $= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$.

Man kann zur Uebung im Dreyeck ABC des 461. §. wo AB $= 127{,}53$ R, AC $= 54{,}76$ R, BAC $= 113°$ 16′ ist, nach dem 453. §. die Seite BC suchen: so ergiebt sich BC $= 157{,}4157$ R. Siehet man nun diese Seite BC $= a$, nebst AC $= b$, AB $= c$, als gegeben an, so giebt die Rechnung

$a = 157{,}4157$	$l(a+b+c) = 2{,}5311027$
$b = 54{,}76$	$l(a+b-c) = 1{,}9276049$
$a+b = 212{,}1757$	$l(a+c-b) = 2{,}3620783$
$c = 127{,}53$	$l(b+c-a) = 1{,}3957508$
$a+b+c = 339{,}7057$	Summe $8{,}2165367$
$a+b-c = 84{,}6457$	div. 2) $4{,}10826835$
$a+c = 284{,}9457$	$-l4 = 0{,}6020600$
$b = 54{,}76$	lABC $= 3{,}50620835$
$a+c-b = 230{,}1857$	Also der gesuchte Inhalt des
$b+c = 182{,}29$	Dreyecks $= 3207{,}808$ Q.
$a = 157{,}4157$	R. wie im vor. §.
$b+c-a = 24{,}8743$	

463. §.

Den Inhalt einer jeden gradlinichten Figur auszurechnen, wenn ihre Seiten und Winkel oder statt der Winkel ihre Diagonallinien gegeben sind.

191 Fig.

Aufl. 1 Fall. Wenn die Figur regulär ist, wie das Fünfeck AENOL in der 191 F., so sey jede Sei

Seite AE = a, die Anzahl der Seiten = n: alsdenn ist der Centriwinkel ACE = $\frac{360°}{n}$, seine Hälfte ACB = $\frac{180°}{n}$. Diesemnach ist der Halbmesser CM des in demselben zu beschreibenden Kreises = $\frac{1}{2}a\cot\frac{180°}{n}$, und das Polygon = $\frac{1}{4}naa\cot\frac{180°}{n}$.

Der halbe Centriwinkel, und der halbe Polygonwinkel ergänzen einander zu 90°. Wenn also der Polygonwinkel = φ ist; so wird CM = $\frac{1}{2}a\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\varphi$, und der Inhalt = $\frac{1}{4}naa\,\mathrm{tang}\frac{1}{2}\varphi$.

Für das Fünfeck ist $\frac{180°}{n}$ = 36°. Wenn nun a = 125,3 R. ist; so findet man

la =	2,0979511
laa =	4,1959022
ln =	0,6989700
$l\cot 36°$ =	10,1387390 − 10
Summe	5,0336112
$l4$ =	0,6020600
	4,4315512

Also der Inhalt des Polygons = 27011,718 Q. R.

Wenn a eine grosse Zahl ist; so ist es am beßten CM = $\frac{1}{2}a\cot\frac{180°}{n}$ allein vermittelst der Logarithmen zu berechnen, und das übrige durch die ordentliche Multiplication zu suchen.

Wäre statt der Seite AE der Halbmesser CA = r des Kreises um das Polygon gegeben: so hätte man

$AM = r \sin \frac{180°}{n}$, $CM = r \cos -\frac{180°}{n}$, und es wäre der Inhalt des Polygons $= nrr \sin \frac{180°}{n} \times \cos \frac{180°}{n}$. Oder, weil $\sin \frac{180°}{n} . \cos \frac{180°}{n} = \frac{1}{2} \sin \frac{360°}{n}$ (424. §.), so wird der Inhalt $= \frac{1}{2} nrr \sin \frac{360°}{n}$.

II. Fall. Wenn die Figur regulär ist, so kann man aus den gegebenen Seiten und Winkeln nicht allein alle Diagonallinien, sondern auch die diesen Diagonallinien zugehörigen Höhen berechnen. Alsdenn verfährt man entweder nach dem 282. §, oder man berechnet blos die Diagonallinien, und sucht den Inhalt eines jeden Dreyecks, worin die Figur vertheilt ist, nach dem 462. §, da dann zuletzt alles in eine Summe gebracht wird.

464. §.

182 Fig. Auf einer gegebenen Grundlinie *AC* ein Parallelogramm oder Dreyeck zu setzen, dessen Flächen-Inhalt durch eine gegebene Zahl bestimmt ist.

Aufl. 1. Es kommt nur darauf an, die Höhe dieses Parallelogramms oder Dreyecks zu finden. Diese sey BD: so ist das Parallelogramm ABCF = AC × BD. Wenn demnach P die gegebene Zahl ist, welche den Flächen-Inhalt ausdrückt, so hat man $P = AC \times BD$, also $BD = \frac{P}{AC}$ Demnach gieb

der Inhalt P durch die gegebene Grundlinie dividirt, die Höhe. Man setze dieserwegen über AC eine senkrechte Linie $BD = \frac{P}{AC}$, und ziehe BF durch B mit AC parallel. Man ziehe ferner eine grade Linie AB, die beyde Parallellinien schneidet, und CF wiederum durch C mit AB parallel: so hat das Parallelogramm ABFC den verlangten Inhalt. Die Winkel dieses Parallelogramms werden nicht bestimmt, weil auf AC zwischen eben den Parallellinien AC und BF unzählig viele Parallelogramme gesetzt werden können, die alle gleich groß sind (105. §.).

2. Soll über AC ein Dreyeck stehen, dessen Inhalt = T ist: so sucht man ebenfalls nur die Höhe BD desselben. Es ist aber $T = \frac{1}{2}AC \times BD$, also $BD = \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$. Nachdem also die senkrechte Linie $BD = \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$ gemacht, und durch B die grade Linie BF mit AC parallel gezogen worden, nehme man in BF einen willkührlichen Punct B, ziehe AB und BC: so ist ABC das verlangte Dreyeck. Die Winkel desselben werden ebenfalls nicht bestimmt, weil alle Dreyecke über AC, deren Spitzen in BF fallen, gleiches Inhalts sind (106. §.).

465. §.

Ausser der Grundlinie *AC* eines Parallelo- 182
gramms oder Dreyecks ist noch eine Seite *AB*, Fig.
die durch den Endpunct *A* der Grundlinie durchgehen soll, nebst dem Inhalt *P* oder *T*

gegeben: man soll das Parallelogramm oder Dreyeck über AC verzeichnen.

Aufl. Nachdem man, wie im vor. §. die Höhe $= \frac{P}{AC}$ oder $\frac{T}{\frac{1}{2}AC}$ gefunden, $AG =$ dieser Höhe auf AC senkrecht gesetzt, und durch G mit AC parallel GF gezogen hat, beschreibe man aus A einen Kreis, mit einem Halbmesser, der so groß ist, als die gegebene Seite AB. Dieser wird die mit AC parallel laufende grade Linie GF entweder in zweenen Puncten B und b schneiden, oder in dem Fall blos in einem Punct berühren, wenn $\frac{P}{AC}$ oder $\frac{T}{\frac{1}{2}AC} = AB$ befunden wird, oder gar nicht treffen können, wenn $AB < \frac{P}{AC}$, oder $< \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$ ist (79. §.).

Im letzten Fall läßt sich aus den gegebenen Stücken gar kein Parallelogramm oder Dreyeck zu Stande bringen. Wenn es aber zweene Durchschnittspuncte B und b giebt, so ziehe man AB und CF # AB, oder auch Ab und Cf # Ab: so hat sowohl das Parallelogramm ABFC, als auch $AbfC$, die verlangten Eigenschaften.

Soll die Figur ein Dreyeck seyn, und man hat $AG = \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$ gemacht: so ziehe man entweder AB, und BC, oder Ab, und bC. Nun hat wiederum sowohl das Dreyeck ABC als auch AbC die verlangte Beschaffenheit.

1. Zusatz. Die Winkel des Parallelogramms werden durch beyde gegebene Seiten, und den Inhalt bestimmt:

stimmt: es ist nemlich CAB = AB*b* (84. §.) = A*b*B (55. §.) = AC*f* (97. §.). Beyde Parallelogramme sind also der Lage nach nur unterschieden.

2. Zusatz. Die Winkel des Dreyecks werden durch beyde gegebene Seiten, und den Inhalt nicht bestimmt, so wie auch die dritte Seite nicht bestimmt wird, ohne nur in dem einzigen Fall, wenn die Puncte B, *b* zusammen fallen, und der Kreis die Parallellinie berühret. Sonst giebt es allemahl zwo in Ansehung der übrigen Winkel und Seiten verschiedene Dreyecke ABC, und A*b*C, die der Aufgabe eine Genüge thun. Die Winkel bey A in beyden Dreyecken ergänzen einander zu 180°. Es ist nemlich CA*b* + A*b*B = 180°, und A*b*B = AB*b* = CAB, also auch CAB + CA*b* = 180°.

3. Zusatz. Weil $AG = AB.\sin BAC = \frac{T}{\frac{1}{2}AC}$,

so wird $\sin BAC = \frac{2T}{AB.AC}$: das giebt eine Regel, den Winkel BAC aus dem gegebenen Flächeninhalt, und den beyden Seiten, die ihn einschliessen, durch Rechnung zu finden. Dieser Sinus aber gehört sowohl zum Winkel BAC, als auch zu 2R — BAC, welches mit der Verzeichnung überein kommt.

Der XX. Abschnitt.

Von der Kreismessung und Theilung der Bogen oder Winkel.

466. §.

Es sey z ein Kreisbogen für den Halbmesser 1 und n eine ganze Zahl, so ist

$$\sin nz = \frac{(\cos z + \sin z\sqrt{-1})^n - (\cos z - \sin z\sqrt{-1})^n}{2\sqrt{-1}}$$

$$\cos nz = \frac{(\cos z + \sin z\sqrt{-1})^n + (\cos z - \sin z\sqrt{-1})^n}{2}$$

Beweis. Wenn man die Potenzen in den Zählern dieser Formuln durch die aus dem 112. §. bekannte Reihe ausdrückt, die Theile, welche einander aufheben aus der Rechnung wegläßt, und nachher für die erste Formul alles mit $2\sqrt{-1}$, für die zweyte mit 2 gehörig dividirt; so werden die im 426. §. schon bewiesenen Reihen gefunden, wenn man nur z statt β schreibt.

1. Zusatz. Wenn man die erste Gleichung mit $\sqrt{-1}$ multiplicirt, und hiernächst beyde Gleichungen zusammen addirt, so findet man

$$\cos nz + \sin nz\sqrt{-1} = (\cos z + \sin z\sqrt{-1})^n$$

und wenn man anstatt dessen die erste mit $\sqrt{-1}$ multiplicirte Gleichung von der zweyten subtrahirt, wird

$$\cos nz - \sin nz\sqrt{-1} = (\cos z - \sin z\sqrt{-1})^n$$

gefunden.

2. Zusatz. Es sey $nz = \varphi$, so ist $z = \frac{1}{n}\varphi$,

und diese Werthe im 1 Zusatz gebraucht geben

$$\cos\varphi \pm \sin\varphi\sqrt{-1} = (\cos\tfrac{1}{n}\varphi \pm \sin\tfrac{1}{n}\varphi.\sqrt{-})1^n,$$

also auch

$$\cos\tfrac{1}{n}\varphi \pm \sin\tfrac{1}{n}\varphi.\sqrt{-1} = (\cos\varphi \pm \sin\varphi.\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}.$$

3. Zusatz. Von der Gleichung

$$\cos\tfrac{1}{n}\varphi + \sin\tfrac{1}{n}\varphi.\sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$$

subtrahire man

$$\cos\tfrac{1}{n}\varphi - \sin\tfrac{1}{n}\varphi.\sqrt{-1} = (\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}},$$

so erhält man

$$2\sin\tfrac{1}{n}\varphi.\sqrt{-1} = (\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} - (\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}},$$

und

$$n\sin\tfrac{1}{n}\varphi = \frac{n(\cos\varphi + \sin\varphi.\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} - n(\cos\varphi - \sin\varphi.\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}}{2\sqrt{-1}}.$$

467. §.

Wenn φ einen Kreisbogen für den Halbmesser 1 bezeichnet, so ist $\varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}} l \frac{1 + \tan\varphi.\sqrt{-1}}{1 - \tan\varphi.\sqrt{-1}}$.

Beweis. Es ist $n\sin\frac{1}{n}\varphi = (n.\frac{1}{n}\varphi.\sin\frac{1}{n}\varphi)$

$:\frac{1}{n}\varphi = \varphi . \sin\frac{1}{n}\varphi : \frac{1}{n}\varphi$, also verwandelt sich die letzte Gleichung des 3 Zusatzes im 466. §. in folgende

$$\varphi . \sin\frac{1}{n}\varphi : \frac{1}{n}\varphi = \frac{n(\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} - n(\cos\varphi - \sin\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}}{2\sqrt{-1}},$$

und diese Gleichung ist allgemein richtig, was man auch für eine positive ganze Zahl anstatt n annehmen will. Der unmögliche Factor $\sqrt{-1}$ muß nach gehörig angestellter Rechnung allemahl wegfallen, weil $\varphi . \sin\frac{1}{n}\varphi : \frac{1}{n}\varphi$ eine mögliche Grösse ist. Demnach ist $\sqrt{-1}$ als jeder andre beständige Factor anzusehen. Man dividire auf beyden Seiten mit $\cos\varphi^{\frac{1}{n}}$, so erhält man

$$\frac{\varphi . \sin\frac{1}{n}\varphi : \frac{1}{n}\varphi}{\cos\varphi^{\frac{1}{n}}} = \frac{n(1 + \operatorname{tang}\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} - n(1 - \operatorname{tang}\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}}{2\sqrt{-1}}.$$

Wird hiernächst anstatt n die Gränze ∞ gesetzt, so wird die Gränze des Werths vor den Gleichheitszeichen $= \varphi$, weil $\sin\frac{1}{n}\varphi : \frac{1}{n}\varphi = 1$, und $\cos\varphi^{\frac{1}{n}} = 1$ wird (427. §. Zus.). Was hinter dem Gleichheitszeichen stehet, das läßt sich auch so ausdrücken

$$\frac{n((1 + \operatorname{tang}\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} - 1) - n((1 - \operatorname{tang}\varphi . \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} - 1)}{2\sqrt{-1}},$$

und man findet die Gränze des Werths

$$n((1 \pm \operatorname{tang}\varphi\sqrt{-1})^{\frac{1}{n}} - 1) = l(1 \pm \operatorname{tang}\varphi . \sqrt{-1})$$

(146. §. n. 4.), mithin erhält man

$$\varphi = \frac{l(1+\text{tang}\varphi.\sqrt{-1}) - l(1-\text{tang}\varphi.\sqrt{-1})}{2\sqrt{-1}},$$

$$\text{oder } \varphi = \frac{1}{2\sqrt{-1}}\, l\, \frac{1+\text{tang}\varphi.\sqrt{-1}}{1-\text{tang}\varphi.\sqrt{-1}}.$$

468. §.

Die Tangente eines Kreisbogens für den Halbmesser = 1 ist gegeben: man soll die Länge des Bogens finden.

Aufl. Wenn in der Gleichung

$$l\frac{1+x}{1-x} = 2(x + \tfrac{1}{3}x^3 + \tfrac{1}{5}x^5 + \tfrac{1}{7}x^7 + \ldots)$$

(147. §. 4. Zus.) $x = \text{tang}\varphi.\sqrt{-1}$ gesetzt wird, so findet man

$$\varphi = \text{tg}\varphi - \tfrac{1}{3}\text{tg}\varphi^3 + \tfrac{1}{5}\text{tg}\varphi^5 - \tfrac{1}{7}\text{tg}\varphi^7 + \tfrac{1}{9}\text{tg}\varphi^9 - \ldots.$$

469. §.

Aus dem gegebenen Sinus eines Bogens für den Halbmesser = 1 den Bogen zu finden.

Aufl. Es sey $\sin\varphi = x$, $\text{tang}\varphi = t$, so ist

$$t = \frac{x}{\sqrt{(1-xx)}},$$ und man hat

$$\varphi = t - \tfrac{1}{3}t^3 + \tfrac{1}{5}t^5 - \tfrac{1}{7}t^7 + \tfrac{1}{9}t^9 - \ldots.$$

In dieser Reihe muß man den Werth $\frac{x}{\sqrt{(1-xx)}}$

$= x(1-xx)^{-\frac{1}{2}}$ anstatt t setzen, so erhält man

$t^3 = x^3(1-xx)^{-\frac{3}{2}}$, $t^5 = x^5(1-xx)^{-\frac{5}{2}}$ u. s. f. da dann die Bruchpotenzen dem 114. §. 1. Zus. gemäß durch Reihen ausgedrückt werden können, und man findet

$$t = x + \tfrac{1}{2}x^3 + \frac{1.3}{1.2.4}x^5 + \frac{1.3.5}{1.2.4.8}x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.3.4.16}x^9 + \ldots$$

$$-\tfrac{1}{3}t^3 = -\tfrac{1}{3}x^3 - \frac{1}{1.2}.x^5 - \frac{1.5}{1.2.4}.x^7 - \frac{1.5.7}{1.2.3.8}x^9 - \ldots$$

$$+\tfrac{1}{5}t^5 = +\tfrac{1}{5}x^5 + \frac{1}{1.2}x^7 + \frac{1.7}{1.2.4}x^9 + \ldots$$

$$-\tfrac{1}{7}t^7 = -\tfrac{1}{7}x^7 - \frac{1}{1.2}.x^9 - \ldots$$

$$+\tfrac{1}{9}t^9 = +\tfrac{1}{9}x^9 + \ldots$$

$$\vdots \qquad\qquad \vdots$$

$$\varphi = x + \frac{1}{1.2.3}x^3 + \frac{1.3}{1.2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.3.8.7}x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.3.4.16.9}x^9 + \ldots$$

Wenn man voraussetzt, das n den unbestimmten Index eines jeden Gliedes nach dem ersten bezeichne, so ist der allgemeine Ausdruck eines jeden Gliedes der Reihe der nachstehende

$$+\frac{1.3.5.7.\ldots.2n-1}{1.2.\ldots.n.2^n.(2n+1)}\sin\varphi^{2n+1},$$

wo nur $\sin\varphi$ wieder anstatt x gesetzt ist. Der Zähler ist ein Product der ungraden Zahlen von 1 bis $2n-1$. Der Nenner ist ein Product der Zahlen 1, 2, 3, ... wie sie in der Ordnung folgen bis auf n, zu diesen Factoren kommen alsdenn noch 2^n und $2n+1$. Daß ein solches allgemeines Gesetz sich müsse angeben lassen, erhellet daraus, weil alle Glieder aus einer Potenz wie $(1-xx)^{-\frac{m}{2}}$ entstehen, die einem solchen allgemeinen Gesetz unterworfen ist: auch hängt die Reihe $t - \frac{1}{3}t^3 + \frac{1}{5}t^5 \ldots$ von einem allgemeinen Gesetz ab. Weil nun das allgemeine

Gesetz,

Gesetz, was die letzte unbestimmte Formul angiebt, für die ersten würklich berechneten Glieder zutrift, wovon sich leicht noch mehr berechnen lassen: so darf man nicht zweifeln, daß das Gesetz allgemein sey.

470. §.

Die Länge der halben oder ganzen Peripherie des Kreises für den Halbmesser 1 vermittelst der Reihe zu finden, welche den Bogen durch seinen Sinus ausdrückt.

Aufl. Die im 469. §. gefundene Reihe läßt sich auch so ausdrücken:

$$\varphi = x + \frac{1}{2.3}x^3 + \frac{1.3}{2.4.5}x^5 + \frac{1.3.5}{2.4.6.7}x^7 + \frac{1.3.5.7}{2.4.6.8.9}x^9 + \ldots$$

oder auch

$$\varphi = x + \frac{1.1}{1.2.3}x^3 + \frac{1.1.3.3}{1.2.3.4.5}x^5 + \frac{1.1.3.3.5.5}{1.2.3.4.5.6.7}x^7 + \frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{1.2.3\ldots 8.9}x^9 + \ldots$$

In dieser Reihe wird jedes folgende Glied leicht aus dem vorhergehenden gefunden. Wenn nemlich $x = a$ ist, und nun das zweyte Glied $= b$, das dritte $= c$ gesetzt wird, und so ferner fort; so erhält man

$$\text{Arc.sin.}a = a + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}.a^2.a + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{5}a^2.b + \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{7}.a^2.c + \tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{7}{9}.a^2.d + \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{9}{11}.a^2.e + \ldots$$

Wird hiernächst $a = \frac{1}{2}$ gesetzt, so ist $\text{Asin.}a = \frac{1}{6}\pi$, und man findet

$$\tfrac{1}{6}\pi = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}.a + \tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{4}.b + \tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{1}{4}.c + \tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{7}{9}\cdot\tfrac{1}{4}.d + \tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{9}{11}\cdot\tfrac{1}{4}e + \ldots\ldots\ldots$$

Die Rechnung selbst giebt hiernächst die nachstehenden Zahlen.

$\frac{1}{2} =$

$$\tfrac{1}{2} = 0{,}500000000000 = a$$
$$\tfrac{1}{2}\cdot\tfrac{1}{3}\cdot\tfrac{1}{4}a = 0{,}020833333333 = b$$
$$\tfrac{3}{4}\cdot\tfrac{3}{5}\cdot\tfrac{1}{4}b = 0{,}002343750000 = c$$
$$\tfrac{5}{6}\cdot\tfrac{5}{7}\cdot\tfrac{1}{4}c = 0{,}000348772321 = d$$
$$\tfrac{7}{8}\cdot\tfrac{7}{9}\cdot\tfrac{1}{4}d = 0{,}000059339741 = e$$
$$\tfrac{9}{10}\cdot\tfrac{9}{11}\cdot\tfrac{1}{4}e = 0{,}000010923911 = f$$
$$\tfrac{11}{12}\cdot\tfrac{11}{13}\cdot\tfrac{1}{4}f = 0{,}000002118263 = g$$
$$\tfrac{13}{14}\cdot\tfrac{13}{15}\cdot\tfrac{1}{4}g = 0{,}000000426173 = h$$
$$\tfrac{15}{16}\cdot\tfrac{15}{17}\cdot\tfrac{1}{4}h = 0{,}000000088142 = i$$
$$\tfrac{17}{18}\cdot\tfrac{17}{19}\cdot\tfrac{1}{4}i = 0{,}000000018624 = k$$
$$\tfrac{19}{20}\cdot\tfrac{19}{21}\cdot\tfrac{1}{4}k = 0{,}000000004014 = l$$
$$\tfrac{21}{22}\cdot\tfrac{21}{23}\cdot\tfrac{1}{4}l = 0{,}000000000870 = m$$
$$\tfrac{23}{24}\cdot\tfrac{23}{25}\cdot\tfrac{1}{4}m = 0{,}000000000160 = n$$
$$\tfrac{25}{26}\cdot\tfrac{25}{27}\cdot\tfrac{1}{4}n = 0{,}000000000004$$

$$\tfrac{1}{6}\pi = 0{,}523598775570\ldots\ldots$$
$$\text{also } \pi = 3{,}141592653400\ \ldots\ldots$$

Zusatz. Obgleich diese Reihe sich der Gränze ihrer Summe nur langsam nähert, so wird doch dadurch die gesuchte Zahl π in den hier berechneten ersten zehn Decimalstellen schon ungemein viel leichter gefunden, als nach der ehemaligen Art vermittelst der regulären Polygone, die sich dem Kreise als ihrer Gränze nähern. (285. §.) Wollte man aber die Zahl π in noch vielmehrern Decimaltheilen suchen, so würde doch die Rechnung nach dieser Reihe sehr ermüden, weil jedes folgende Glied allemahl sehr wenig mehr denn viermahl kleiner als das vorhergehende wird.

471. §.

Die Länge der halben oder ganzen Peripherie des Kreises für den Halbmesser 1 vermittelst einer

einer solchen Reihe zu finden, die den Bogen durch seine Tangente ausdrückt.

Aufl. 1. Wenn man im 468. §. $\varphi = \frac{1}{4}\pi$ setzt, so ist $\text{tang}\varphi = 1$, also

$$\frac{1}{4}\pi = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \ldots$$

Das ist eine Reihe, die soviel man weiß H. von Leibnitz zuerst für die Rectification des Kreises gefunden hat, nur schade, daß sie sich der Gränze ihrer Summe sehr langsam nähert. Wenn man jeden negativen Theil von dem nächstvorhergehenden positiven Theile abziehet, und alsdenn mit 2 dividirt, so erhält man

$$\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{3} + \frac{1}{5.7} + \frac{1}{9.11} + \frac{1}{13.15} + \ldots$$

2. Nimmt man $\varphi = \frac{1}{6}\pi$, so ist $\text{tang}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, (405. §. 3. Zus.) also

$$\frac{1}{8}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3.3\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{7.3^3\sqrt{3}} + \frac{1}{9.3^4\sqrt{3}} - \ldots$$

Man multiplicire mit $\sqrt{3}$, so wird $\frac{\sqrt{3}}{6} = \sqrt{\frac{3}{36}}$

$$= \sqrt{\frac{1}{12}} = \frac{1}{2\sqrt{3}}, \text{ also}$$

$$\frac{1}{2\sqrt{3}}.\pi. = 1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \frac{1}{11.3^5} + \ldots)$$

und das giebt

$$\pi = 1 - \frac{1}{3.3} + \frac{1}{5.3^2} - \frac{1}{7.3^3} + \frac{1}{9.3^4} - \ldots)2\sqrt{3}$$

Um nach dieser Reihe die Rechnung einzuleiten, muß man zuerst die Zahl $2\sqrt{3} = \sqrt{12}$ in sovielen Decimaltheilen haben, als für die Zahl π gefunden werden sol-

sollen: hiernächst dividire man $\sqrt{12}$ mit 3, den Quotienten aufs neue mit 3 und immer so weiter fort, so hat man $\frac{1}{3}\sqrt{12}$, $\frac{1}{3^2}\sqrt{12}$, $\frac{1}{3^3}\sqrt{12}$, $\frac{1}{3^4}\sqrt{12}$, $\frac{1}{3^5}\sqrt{12}$.... Eben diese Quotienten dividire man nach der Ordnung mit den ungraden Zahlen 3, 5, 7, u. s. w. so kann man die positiven Theile, welche eine Potenz der Zahl 3 mit einem graden Exponenten zum Divisor haben, für sich, und eben so die übrigen negativen Theile ebenfalls für sich zusammen addiren: die Differenz beyder Summen giebt alsdenn die Zahl π. Hier kann die nachstehende Probe einer solchen Rechnung bis auf die 12te Decimalstelle genügen.

A=$\sqrt{12}$=3,464101615138 B=$\frac{1}{3}$A=1,154700538379
C=$\frac{1}{3}$B=0,384900179460 D=$\frac{1}{3}$C=0,128300059820
E=$\frac{1}{3}$D= 42766686607 F=$\frac{1}{3}$E= 14255562202
G=$\frac{1}{3}$F= 4751854065 H=$\frac{1}{3}$G= 1583951356
I =$\frac{1}{3}$H= 527983785 K=$\frac{1}{3}$I= 175994595
L =$\frac{1}{3}$K= 58664865 M=$\frac{1}{3}$L= 19554955
N=$\frac{1}{3}$M= 6518318 O=$\frac{1}{3}$N= 2172773
P=$\frac{1}{3}$O= 724258 Q=$\frac{1}{3}$P= 241419
R=$\frac{1}{3}$Q= 80473 S=$\frac{1}{3}$R= 26824
T=$\frac{1}{3}$S= 8941 V=$\frac{1}{3}$T= 2980
W=$\frac{1}{3}$V= 993 X=$\frac{1}{3}$W= 331
Y =$\frac{1}{3}$X= 110 Z=$\frac{1}{3}$Y= 37

die

die positiven Theile	die negativen Theile
$A = 3,464101615138$	$\frac{1}{3}B = 0,384900179460$
$\frac{1}{5}C = 769800035892$	$\frac{1}{7}D = 18328579974$
$\frac{1}{9}E = 4751854067$	$\frac{1}{11}F = 1295960200$
$\frac{1}{13}G = 365527236$	$\frac{1}{15}H = 105596757$
$\frac{1}{17}I = 31057870$	$\frac{1}{19}K = 9262873$
$\frac{1}{21}L = 2793565$	$\frac{1}{23}M = 850215$
$\frac{1}{25}N = 260733$	$\frac{1}{27}O = 80473$
$\frac{1}{29}P = 24974$	$\frac{1}{31}Q = 7788$
$\frac{1}{33}R = 2438$	$\frac{1}{35}S = 766$
$\frac{1}{37}T = 242$	$\frac{1}{39}V = 76$
$\frac{1}{41}W = 24$	$\frac{1}{43}X = 8$
$\frac{1}{45}Y = 2$	$\frac{1}{47}Z = 1$
$+3,546233172181$	$-0,404640518591$
$-0,404640518591$	
$\pi = 3,141592653590.$	

472. §.

In der Sherwin-Gardinerschen Sammlung mathematischer Tafeln 56-59. S. ist eine Rechnung dieser Art mitgetheilet, welche H. **Sharp** bis auf die 72ste Decimalstelle fortgeführt hat: auch wird 64. S. erzählt H. **Machin** habe eben so 100 Decimalstellen berechnet, die eben daselbst sowohl von der Zahl $\sqrt{12}$ als auch von der Zahl π mitgetheilt werden. In den Comment. Petrop. Tom. IX. pag. 222. sq. findet sich ein Aufsatz von H. **Leonh. Euler** de variis modis circuli quadraturam numeris proxime exprimendi, woselbst diese Zahl in den nachstehenden 127 Decimalstellen

$\pi = 3,141592\ 653589\ 793238\ 462643383279$
$502884\ 197169\ 399375\ 105820974944$
$592307\ 816406\ 286208\ 998628034825$
$342117\ 067982\ 148086\ 513272306647$
$093844\ 6+$

mitgetheilt und die Nachricht beygefüget wird, daß H. Lagny sie berechnet, aber sein Verfahren dabey nicht bekannt gemacht habe.

Unter andern Hülfsmitteln, die Rechnung zu erleichtern, bemerkt H. Euler a. a. O. 11. u. f. §. 229. u. f. S. daß man den halben Quadranten, wozu die Tangente $= 1$ gehört, in zwey oder mehr Bogen theilen könne, die rationale Tangenten haben. Wenn man die Länge eines jeden dieser Bogen für sich sucht, so giebt ihre Summe die Zahl $\frac{1}{4}\pi$, woraus hiernächst π leicht gefunden wird. Wenn nemlich $\alpha + \beta = \frac{1}{4}\pi$ ist, so hat man $\frac{tg\alpha + tg\beta}{1 - tg\alpha . tg\beta} = 1$, also $1 - tg\alpha . tg\beta = tg\alpha + tg\beta$, und man erhält $tg\beta = \frac{1 - tg\alpha}{1 + tg\alpha}$.

Man nehme $tang\alpha = \frac{1}{2}$, so wird $tg\beta = \frac{1}{3}$, und man findet

$$Atg\tfrac{1}{2} = \tfrac{1}{2} - \frac{1}{3.2^3} + \frac{1}{5.2^5} - \frac{1}{7.2^7} + \frac{1}{9.2^9} - \ldots,$$

$$Atg\tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{3} - \frac{1}{3.3^3} + \frac{1}{5.3^5} - \frac{1}{7.3^7} + \frac{1}{9.3^9} - \ldots,$$

$\frac{1}{4}\pi = Atg\frac{1}{2} + Atg\frac{1}{3}$.

473. §.

Eine andre Art diese Rechnung einzuleiten ist folgende. Man setze $2\gamma + \delta = \frac{1}{4}\pi$, mithin $\gamma + \frac{1}{2}\delta =$

=

$= \frac{1}{8}\pi$, so wird erfodert, daß $\frac{tg.2\gamma + tg.\delta}{1 - tg2\gamma . tg\delta} = 1$

sey, oder $tg\delta = \frac{1 - tg.2\gamma}{1 + tg.2\gamma}$. Ferner sey $tg\gamma = \frac{1}{3}$,

so wird $tg.2\gamma = \frac{2tg\gamma}{1 - tg\gamma^2} = \frac{2}{3} : \frac{8}{9} = \frac{3}{4}$, und

$tg\delta = \frac{1}{4} : \frac{7}{4} = \frac{1}{7}$. Nun ist

$\gamma = tg\gamma - \frac{1}{3}tg\gamma^3 + \frac{1}{5}tg\gamma^5 - \frac{1}{7}tg\gamma^7 + \frac{1}{9}tg\gamma^9 \ldots.$

$\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}(tg\delta - \frac{1}{3}tg\delta^3 + \frac{1}{5}tg\delta^5 - \frac{1}{7}tg\delta^7 + \ldots.)$,

also auch

$\gamma = (1 - \frac{1}{3}tg\gamma^2)tg\gamma + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}tg\gamma^2)tg\gamma^5 + (\frac{1}{9} - \frac{1}{11}tg\gamma^2)tg\gamma^9 + \ldots.$

$\frac{1}{2}\delta = \frac{1}{2}((1 - \frac{1}{3}tg\delta^2)tg\delta + (\frac{1}{5} - \frac{1}{7}tg\delta^2)tg\delta^5 + (\frac{1}{9} - \frac{1}{11}tg\delta^2)tg\delta^9 + \ldots.)$

oder auch

$\gamma = (cot\gamma^2 - \frac{1}{3})tg\gamma^3 + (\frac{1}{5}cot\gamma^2 - \frac{1}{7})tg\gamma^7 + (\frac{1}{9}cot\gamma^2 - \frac{1}{11})tg\gamma^{11} + \ldots.$

$\delta = \frac{1}{2}((cot\delta^2 - \frac{1}{3})tg\delta^3 + (\frac{1}{5}cot\delta^2 - \frac{1}{7})tg\delta^7 + (\frac{1}{9}cot\delta^2 - \frac{1}{11})tg\delta^{11} + \ldots.)$

Wird hiernächst $tg\gamma = \frac{1}{3}$, $tg\delta = \frac{1}{7}$ gesetzt, so giebt

as

$$\frac{\pi}{8} = \frac{26}{3}.\frac{1}{3^3} + \frac{58}{5.7}.\frac{1}{3^7} + \frac{90}{9.11}.\frac{1}{3^{11}} + \frac{122}{13.15}.\frac{1}{3^{13}} + \ldots$$

$$\frac{\delta}{8} = \frac{73}{3}.\frac{1}{7^3} + \frac{169}{5.7}.\frac{1}{7^7} + \frac{265}{9.11}.\frac{1}{7^{11}} + \frac{361}{13.15}.\frac{1}{7^{13}} + \ldots.$$

Die Zähler in der ersten Reihe wachsen um die beständige Differenz 32, und in der zweyten um die Differenz 96: beyder Reihen Summe giebt $\frac{1}{8}\pi$.

474. §.

Wenn Φ ein Kreisbogen für den Halbmesser 1 ist, und die Buchstaben m und n positive

ganze Zahlen bezeichnen; so ist $\cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sin\frac{m}{n}\varphi \cdot \sqrt{-1} = (\cos\varphi \pm \sin\varphi \cdot \sqrt{-1})^m$.

Beweis. Es ist $(\cos\frac{1}{n}\varphi \pm \sin\frac{1}{n}\varphi \cdot \sqrt{-1})$ $= (\cos\varphi \pm \sin\varphi \cdot \sqrt{-1})^{\frac{1}{n}}$, (466. §. 2. Zus.) also auch $(\cos\frac{1}{n}\varphi \pm \sin\frac{1}{n}\varphi \cdot \sqrt{-1})^m = (\cos\varphi \pm \sin\varphi \cdot \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$. Ferner ist $(\cos\frac{1}{n}\varphi \pm \sin\frac{1}{n}\varphi \cdot \sqrt{-1})^m = \cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sin\frac{m}{n}\varphi \cdot \sqrt{-1}$, (466. §. 1. Zus.) mithin erhält man auch $\cos\frac{m}{n}\varphi \pm \sin\frac{m}{n}\varphi \cdot \sqrt{-1} = (\cos\varphi \pm \sin\varphi \cdot \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$.

475. §.

Die im 426. §. bewiesenen Gleichungen für $\sin n\beta$ und $\cos n\beta$ sind allgemein richtig, wenn auch anstatt des Buchstaben n ein positiver Bruch wie $\frac{m}{n}$ gesetzt wird.

Beweis. Aus den Gleichungen

$\cos\frac{m}{n}\beta + \sin\frac{m}{n}\beta \cdot \sqrt{-1} = (\cos\beta + \sin\beta \cdot \sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$

$$\cos\frac{m}{n}\beta - \sin\frac{m}{n}\beta.\sqrt{-1} = (\cos\beta - \sin\beta.\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}$$

(471. §.) wenn die letzte von der ersten subtrahirt wird, findet man

$$\sin\frac{m}{n}\beta = \frac{(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} - (\cos\beta-\sin\beta.\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}}{2\sqrt{-1}};$$

wenn man aber beyde zusammen addirt, so erhält man

$$\cos\frac{m}{n}\beta = \frac{(\cos\beta+\sin\beta.\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}} + (\cos\beta-\sin\beta.\sqrt{-1})^{\frac{m}{n}}}{2}.$$

Wenn man nun die Potenzen in den Zählern dieser Brüche durch die aus dem 114. §. bekannten Reihen ausdrückt, so erhält man für $\sin\frac{m}{n}\beta$ und $\cos\frac{m}{n}\beta$ Reihen von derselben Form, wie im 426. §. für $\sin.n\beta$ und $\cos.n\beta$ gefunden sind, nur daß allenthalben $\frac{m}{n}$ anstatt n stehet.

476. §.

Die halbe oder ganze Peripherie des Kreises in eine verlangte Anzahl gleicher Theile zu theilen.

Aufl. Wenn der Cosinus des gesuchten Theils der Peripherie gefunden ist; so kann man die Theilung durch eine geometrische Verzeichnung bewerkstelligen, weil die grade Linie, welche den Cosinus in seinem Endpunct senkrecht schneidet, auch den gesuchten Bogen von der Peripherie abschneidet. Um die-

diesen Cosinus zu finden, setze man im 426. §. $n\beta = \pi$, so ist $\beta = \frac{1}{n}\pi$, und $\sin n\beta = 0$. Demnach erhält man

$$n\sin\tfrac{1}{n}\pi\left(\cos\tfrac{1}{n}\pi^{n-1} - \frac{n-1.n-2}{1.2.3}\sin\tfrac{1}{n}\pi^{2}.\cos\tfrac{1}{n}\pi^{n-3}\right.$$
$$\left. + \frac{n-1.n-2.n-3.n-4}{1.2.3.4.5}\sin\tfrac{1}{n}\pi^{4}.\cos\tfrac{1}{n}\pi^{n-5} - \ldots\right) = 0.$$

Wenn diese Gleichung noch mit $n\sin\frac{1}{n}\pi$ dividirt wird, so bleiben keine andre Potenzen von $\sin\frac{1}{n}\pi$ in derselben, als solche, wovon die Exponenten grade Zahlen sind, also kann man hiernächst $1 - \cos\frac{1}{n}\pi^{2}$ anstatt $\sin\frac{1}{n}\pi^{2}$ setzen: auf solche Art erhält man eine bestimmte Gleichung, welche keine andre unbekannte Grösse enthält, als $\cos\frac{1}{n}\pi$.

1. Zusatz. Bey den Rechnungen aus dieser Gleichung ist noch zu bemerken, daß bey der Voraussetzung $\sin. n\beta = 0$, auch $n\beta = 0$, oder $n\beta = 2\pi$ seyn könne. Selbst alsdenn, wenn Bogen vorkommen, die grösser als die ganze Peripherie sind, wird $\sin 3\pi = 0$, $\sin 4\pi = 0$, u. s. f. fort: (411. §. Zus.) daher giebt die Gleichung auch die Cosinus für solche Bogen, die gefunden werden, wenn ein Multiplum von π mit der Zahl n dividirt wird.

2. Zu-

2. Zusatz. Für $n = 2$ findet man $2\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, oder $\cos\frac{1}{2}\pi = 0$, wie sonst bekannt ist. Setzt man $n = 3$, so wird $3\cos\frac{1}{3}\pi^2 - (1 - \cos\frac{1}{3}\pi^2) = 0$, oder $4\cos\frac{1}{3}\pi^2 = 1$, also $\cos\frac{1}{3}\pi = \pm\frac{1}{2}$.

3. Zusatz. Wird $n = 4$ gesetzt, so giebt das $4\cos\frac{1}{4}\pi^3 - 4(1 - \cos\frac{1}{4}\pi^2)\cos\frac{1}{4}\pi = 0$, und dieser Gleichung leistet schon der Werth $\cos\frac{1}{4}\pi = 0$ ein Genüge. Weil nun, dieses falsch seyn würde, wenn π nur die halbe Peripherie bezeichnen sollte, so bestätiget sich eben dadurch die Bemerkung im 1 Zusatz, weil zwar $\cos\frac{1}{4}.2\pi$, und überhaupt $\cos(k+\frac{1}{2})\pi = 0$ seyn kann, wenn k eine ganze Zahl ist, aber kein Cosinus eines Bogens, der kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist, wenn man nicht negative Bogen verstehen will. Die gefundene Gleichung giebt aber auch $2\cos\frac{1}{4}\pi^2 = 1$, also $\cos\frac{1}{4}\pi = \pm\sqrt{\frac{1}{2}}$, wie dem 405. §. 4. Zus. gemäß ist. Der Cosinus $-\sqrt{\frac{1}{2}}$ gehört zum Bogen $\frac{1}{2}\pi + \frac{1}{4}\pi = \frac{3}{4}\pi$, und der vierfache Bogen ist 3π, sein Sinus $= 0$.

477. §.

Man setze x anstatt $\cos\frac{1}{n}\pi$ in der gefundenen allgemeinen Gleichung des 473. §, und y anstatt $\sin\frac{1}{n}\pi$, so ist x der Cosinus und y der Sinus eines Bogens, den man findet, wenn ein Bogen, dessen Sinus $= 0$ ist, mit n dividirt wird. Es gehört aber der Sinus $= 0$ zu allen den Bogen, welche in einer von den beyden Reihen

$$\pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi, 5\pi, 6\pi, \ldots\ldots$$
$$-\pi, -2\pi, -3\pi, -4\pi, -5\pi, -6\pi, \ldots\ldots$$

vorkommen. Eben darum kann x den Cosinus eines jeden Bogens bezeichnen, der unter dem allgemeinen Ausdruck $\pm \frac{k\pi}{n}$ begriffen ist, wenn k eine ganze Zahl vorstellet. Nun mag n eine ganze Zahl seyn, welche man will, so kommen unter der Reihe dieser Bogen allemahl solche vor, deren Sinus $= 0$ und Cosinus $= +1$ oder $= -1$ ist: daher hat die Gleichung den Factor y, und die Gleichung $y = 0$, oder $\sqrt{(1 - xx)} = 0$, deren rationale Form $xx - 1 = 0$ die Werthe $x = \pm 1$ giebt, leistet allemahl den Bedingungen der Aufgabe ein Genüge. Weil man das nun ein für allemahl weiß, so kann man diesen Factor gleich weglassen, und nur die übrigen Werthe von x suchen.

1. Zusatz. Wenn $n = 5$ seyn soll, so hat man $x^4 - 2(1 - x^2)x^2 + \frac{1}{5}(1 - x^2)^2 = 0$, und daraus folgt $16x^4 - 12x^2 + 1 = 0$. Man sehe x^2 als die unbekannte Grösse an, so kann man die Gleichung wie sonst eine quadratische auflösen, da dann $x^2 = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}$, und $x = \pm\sqrt{\frac{3 \pm \sqrt{5}}{8}}$ gefunden wird. Aus diesem Exempel ersiehet man, daß die biquadratische Gleichung vier Wurzeln haben könne; hier aber kann keine negative Wurzel den $\cos\frac{1}{5}\pi$ geben. Wenn also nur dieser gesucht wird, so muß entweder $x = \sqrt{\frac{5 + \sqrt{5}}{8}}$, oder $x = \sqrt{\frac{5 - \sqrt{5}}{8}}$ seyn. Weil nun unter allen den Bogen $\frac{1}{5}\pi, \frac{2}{5}\pi, \frac{3}{5}\pi, \ldots$ deren Cosinus vermittelst dieser

Rech-

Rechnung gefunden werden, $\frac{1}{5}\pi$ der kleinste ist, so muß $\cos\frac{1}{5}\pi = \sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$ angenommen werden, weil zu dem kleinsten Bogen der gröste Cosinus gehört. Uebrigens ist $\cos\frac{2}{5}\pi = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$, $\cos\frac{3}{5}\pi = -\sqrt{\frac{5-\sqrt{5}}{8}}$, und $\cos\frac{4}{5}\pi = -\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$. Den $\cos\frac{5}{5}\pi = \cos\pi$ giebt der Factor $y = 0$ oder $\sqrt{(1-xx)} = 0$, woraus $x = \pm 1$ folgt. Mehr verschiedene Cosinus giebt diese Theilung nicht: denn die Bogen $\frac{6}{5}\pi$, $\frac{7}{5}\pi$, ... haben wieder die vorigen Cosinus.

2. Zusatz. Es sey nun $n = 6$: so wird $x^5 - \frac{10}{3}(1-x^2)x^3 + (1-x^2)x = 0$ gefunden, und diese Gleichung giebt $x = 0$, weil unter den Bogen, wozu x als Cosinus gehört, auch $\frac{3\pi}{6} = \frac{1}{2}\pi$ vorkommt. Läßt man diesen Factor weg, so erhält man $16x^4 - 16x^2 + 3 = 0$. Daraus folgt ferner $x^4 - x^2 = -\frac{3}{16}$, also $x^4 - x^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$, und $x^2 = \frac{1}{2} \pm \frac{1}{4} = \frac{2 \pm 1}{4}$, also $x = \pm\frac{1}{2}\sqrt{(2 \pm 1)}$. Die Bogen, wozu diese vier verschiedenen Cosinus gehören, sind $\frac{1}{6}\pi$, $\frac{1}{3}\pi$, $\frac{2}{3}\pi$, $\frac{5}{6}\pi$, und man hat $\cos\frac{1}{6}\pi = \frac{1}{2}\sqrt{3}$, $\cos\frac{1}{3}\pi = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{2}{3}\pi = -\frac{1}{2}$, $\cos\frac{5}{6}\pi = -\frac{1}{2}\sqrt{3}$.

478. §.

Wenn man in der bisher betrachteten allgemeinen Gleichung des 473. und 474. §. $n = 7$ annimmt, so giebt das die Gleichung $x^6 - 5(1-x^2)x^4 + 3(1$

$3(1-x^2)^2x^2 - \frac{1}{7}(1-x^2)^3 = 0$, oder $64x^6 - 80x^4 + 24x^2 - 1 = 0$. Nimmt man nun gleich x^2 für die unbekannte Grösse an, so bleibt die Gleichung doch cubisch, und von der Auflösung der cubischen und höhern Gleichung folgt in der zweyten Abtheilung dieses Buches mehr Unterricht. Hier genüget es zu bemerken, daß die Theilung der halben oder ganzen Peripherie des Kreises in 7 gleiche Theile keine Aufgabe mehr für die Elementargeometrie sey. Die Gleichung muß die Werthe der Cosinus der folgenden Bogen anzeigen $\frac{1}{7}\pi$, $\frac{2}{7}\pi$, $\frac{3}{7}\pi$, $\frac{4}{7}\pi$, $\frac{5}{7}\pi$, $\frac{6}{7}\pi$: sie muß also drey positive und drey negative Wurzeln haben, und wenn $x^2 = z$ gesetzt wird, so muß die Gleichung $64z^3 - 80z^2 + 24z - 1 = 0$ drey positive Werthe für z geben. Wollte man nun diese Gleichung auf eine ähnliche Art construiren, wie die quadratische im §., so müßten die beyden Linien, welche Auflösung führen sollten, einander in dreyen Puncten schneiden können. Allein die grade Linie und Kreislinie, und eben so auch zwey Kreise können einander nur in zweyen Puncten schneiden: also kann die Auflösung von den Foderungssätzen der Elementargeometrie nicht mehr abhängen.

479. §.

Bey der Voraussetzung, daß man die Wurzeln einer jeden höhern Gleichung finden könne, dient die bisher betrachtete allgemeine Gleichung zugleich die Seite eines jeden regulären Polygons im Kreise zu finden. Aus $\cos\frac{1}{2n}\pi$ findet man leicht $\sin\frac{1}{2n}\pi$ und hiernächst $\text{chord}\frac{1}{n}\pi = 2\sin\frac{1}{2n}\pi$. Weil jedoch

doch die im 426. §. für sin.$n\beta$ und col.$n\beta$ gefundenen Gleichungen so allgemein sind, daß man auch jeden Bruch für n setzen kann, (472. §.) so ist es in solchen Fällen, wenn nach der hier vorgetragenen Methode eine höhere Gleichung aufgelöset werden müßte, allemahl vortheilhafter, daß man nach den Gleichungen des 426. §. rechne.

480. §.

Wenn α einen Kreisbogen für den Halbmesser 1 bezeichnet, so ist $\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{4}\alpha.\cos\frac{1}{8}\alpha.\cos\frac{1}{16}\alpha....}$ wenn für den Nenner dieses Bruchs die Gränze genommen wird, welcher das Product der Cosinus immer näher kommt, wenn die Bogen $\frac{1}{2}\alpha$, $\frac{1}{4}\alpha$, $\frac{1}{8}\alpha$, ... in geometrischer Progression fortlaufen.

Beweis. Weil $\sin\alpha = 2\sin\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{2}\alpha$ (424. §.) so ist $\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha} = 2\sin\frac{1}{2}\alpha$, und $\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha} = \frac{2\sin\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{4}\alpha}$. Ferner ist $\sin\frac{1}{2}\alpha = 2\sin\frac{1}{4}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha$, mithin erhält man $\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha\cos\frac{1}{4}\alpha} = 4\sin\frac{1}{4}\alpha$. Gesetzt nun, man hätte

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{4}\alpha....\cos\frac{1}{n}\alpha} = n\sin\frac{1}{n}\alpha,$$

so wäre auch $\sin\frac{1}{n}\alpha = 2\sin\frac{1}{2n}\alpha.\cos\frac{1}{2n}\alpha$, also wie-derum

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{4}\alpha,...\cos\frac{1}{n}\alpha.\cos\frac{1}{2n}\alpha} = 2n\sin\frac{1}{2n}\alpha.$$

Daraus erhellet, daß das Gesetz allgemein sey, und man erhält auch

$$\frac{\sin\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha.\cos\frac{1}{2}\alpha.....\cos\frac{1}{n}\alpha} = \alpha\left(\sin\frac{1}{n}\alpha\right) : \frac{1}{n}\alpha.$$

Wenn demnach $\frac{1}{n}$ die Gränze o erreicht, so wird die Gränze dieses Werthes $= \alpha$.

1. Zusatz. Demnach ist auch

$$\alpha = \sin\alpha.\sec\tfrac{1}{2}\alpha.\sec\tfrac{1}{4}\alpha.\sec\tfrac{1}{8}\alpha.....,$$

und wenn die Logarithmen der Sinus und Secanten schon gefunden sind, so kann vermittelst dieser Formul der Logarithme des Bogens, also auch der Bogen selbst gefunden werden. Es ist nemlich $l\alpha = l\sin\alpha + l\sec\frac{1}{2}\alpha + l\sec\frac{1}{4}\alpha + l\sec\frac{1}{16}\alpha + ...$ Je kleiner übrigens der Bogen ist, desto schneller nähert sich diese Reihe der Gränze ihrer Summe.

2. Zusatz. E sey $\alpha =$ Arc. $1° = \frac{1}{180}\pi$, so findet man aus den trigonometrischen Tafeln

$l\sin 1° = 0{,}2418553 - 2$
$l\sec. 30' = 0{,}0000165$
$l\sec. 15' = 0{,}0000041$
$l\sec. 7\frac{1}{2}' = 0{,}0000010$
$l\sec. 3\frac{3}{4}' = 0{,}0000003$

$l.\text{Arc. } 1° = 0{,}2418762 - 2$

Wenn dieser Logarithme $= \lambda$ gesetzt wird, so ist $l\frac{1}{180}\pi = l\pi - l180 = \lambda$, also findet man auch $l\pi = \lambda + l180$. Weil

$\text{nun } \lambda = -1{,}7581237....$
$l180 = +2{,}2552725....$

so ist $l\pi = 0{,}4971488....$,

481. §.

Eine Figur arithmetisch quadriren ist eben so viel als die Seite eines eben so grossen Quadrats durch Rechnung suchen, anstatt dessen, daß man sie nach Art der alten Geometer durch Zeichnung suchen würde. (256. §.) Wenn der Flächen-Inhalt der Figur im Quadratmaaß bekannt ist; so giebt die Quadratwurzel aus der Zahl, welche die Grösse der Fläche ausdrückt, die Seite des gesuchten Quadrats im Längenmaasse an, das mit jenem Quadratmaasse einerley Nahmen hat.

Zusatz. Demnach läßt sich sowohl die ganze Kreisfläche, als auch jeder Ausschnitt und Abschnitt des Kreises, arithmetisch quadriren, und die Richtigkeit dieser Quadratur hängt von der Richtigkeit der Zahlen ab, welche das Verhältniß $\pi : 1$ ausdrücken (291. 292. §.): daher heissen die Bemühungen, dieses Verhältniß zu bestimmen, auch Quadraturen des Kreises. Weil man dieses Verhältniß in Zahlen überflüßig genau hat, (472. §.) so wäre es ein Beweis von einer höchst mangelhaften Kenntniß des jetzigen Zustandes der Wissenschaft, wenn es jemand für einen Mangel der Theorie ansehen wollte, daß man keine völlig genaue Quadratur des Kreises habe, oder das Verhältniß des Umfangs zum Durchmesser nicht durch ein paar bestimmte Zahlen genau ausdrücken könne. Man muß sich in unzähligen Fällen, wo die Theorie gar nicht mangelhaft ist, mit ähnlichen Näherungen in der Ausübung begnügen: man kann ja in vielen sehr bekannten Fällen weder den Umfang noch die Fläche eines gradlinichten Dreyeckes genau ausdrücken. Oft läßt sich zwar der Umfang, aber nicht die Fläche, und umgekehrt die Flä-

che, aber nicht der Umfang genau in Zahlen angeben. Wenn im Dreyeck jede Seite = 1 ist, so ist der Umfang = 3, und die Fläche = $\frac{1}{2}$ sin60°, aber der sin60° ist irrational. Wenn im rechtwinklichten Dreyeck jede Perpendiculärseite = 1 ist, so ist der Inhalt = $\frac{1}{2}$, aber der Umfang = $2 + \sqrt{2}$. So wenig die Ausübung verliert, wenn man sich in diesen und ähnlichen Fällen mit Näherungen begnügt, so wenig verliert sie auch bey der nur durch Näherung bekannten Quadratur des Kreises.

Der XXI. Abschnitt.

Vergleichung des Inhalts der Figuren, die einen gleichen Umfang haben.

482. §.

182 Fig. Unter allen Parallelogrammen über einerley Grundlinie AC in eben der Höhe AG, hat das Rechteck den kleinsten Umfang und der Umfang der übrigen Parallelogrammen ist desto grösser, je schiefer die Winkel werden. So wie hier aber gleiche Flächen einen sehr ungleichen Umfang haben; so können auch ungleiche Flächen durch einen gleichen Umfang begränzt seyn. Pappus Alexandrinus hat in seinen Collectionibus Math. im Anfange des V. Buchs eine Vergleichung des Inhalts solcher Figuren, die einen gleichen Umfang haben, angestellt, und ich werde hier von dieser sehr sinnreichen Theorie in folgenden Sätzen einen Auszug mittheilen.

483. §.

Ein Rechteck wird bey einerley Umfange desto grösser, je weniger die Seiten von einander unterschieden sind: unter allen Rechtecken von gleichem Umfange aber hat das Quadrat die grösste Fläche.

Beweis. Es sey die Summe $a+b$ der Seiten a und b eines Rechteckes P so groß, als die Summe $f+g$ der Seiten eines andern Q: so haben beyde einerley Umfang. Aber aus $a+b=f+g$ folgt $b-g=f-a$: wenn also $f \succ a$ ist, so ist $b \succ g$. Um nun den Inhalt beyder Rechtecke zu vergleichen, setze man $\frac{1}{2}(a+b)=s=\frac{1}{2}(f+g)$ und $\frac{1}{2}(a-b)=e$, ferner $\frac{1}{2}(f-g)=k$: so wird $a=s+e$, $b=s-e$, $f=s+k$, und $g=s-k$, also $P=a \times b=ss-ee$, und $Q=f \times g=ss-kk$. Wenn demnach $e \prec k$, oder $a-b \prec f-g$ ist, so ist $P \succ Q$: und wenn $a=b$, also $e=0$ ist, so ist $P=ss$ allemahl grösser als Q, wie klein auch $f-g=k$ seyn mag.

484. §.

Ein Dreyeck wird bey einerley Umfang auf einer gegebenen Grundlinie desto grösser, je weniger die übrigen beyden Seiten unterschieden sind; und unter allen Dreyecken von gleichem Umfang auf einerley Grundlinie hat das gleichschenklichte die grösste Fläche.

Beweis Wenn auf der Grundlinie a ein ungleichseitiges Dreyeck T stehet, dessen übrige Seiten b, und c sind: so ist $T=\frac{1}{4}\sqrt{((b+c)^2-aa)(aa-(b-c)^2)}$ (462. §). Setzt man auf eben der Grundlinie ein gleichschenklichtes Dreyeck V, das mit dem vorigen einerley Umfang hat, so, daß jeder von den gleichen

Schen-

Schenkeln $= f$, und $b + c = 2f$ ist: so wird $V = \frac{1}{4}\sqrt{(4ff - aa)aa}$ (462. §). Da nun $(b+c)^2 = 4ff$: so ist $V \triangleright T$ und T wird desto grösser, je weniger b und c unterschieden sind.

485. §.

Das Product dreyer Grössen a, b, c, die einerley Summe $a+b+c$ ausmachen, wird am größten, wenn alle drey gleich groß sind.

Beweis. Wenn nemlich $b \triangleright a$, und $c \triangleright b$ ist, so sey $b = a + d$, und $c = a + e$; also wird das Product $abc = a^3 + aa(d+e) + ade$. Ferner ist $\frac{1}{3}(a+b+c) = a + \frac{1}{3}(d+e)$, und $(a + \frac{1}{3}(d+e))^3 = a^3 + aa(d+e) + \frac{1}{3}a(d+e)^2 + \frac{1}{27}(d+e)^3$. Aber der letzte Ausdruck ist grösser, als der erste: denn es ist $\frac{1}{3}a(d+e)^2 = \frac{1}{3}add + \frac{2}{3}ade + \frac{1}{3}aee = \frac{1}{3}add + ae(\frac{2}{3}d + \frac{1}{3}e)$ und $e \triangleright d$, also $\frac{2}{3}d + \frac{1}{3}e \triangleright d$, und $ae(\frac{2}{3}d + \frac{1}{3}e) \triangleright ade$.

486. §.

Unter allen Dreyecken von gleichem Umfange hat das gleichseitige die größte Fläche.

Beweis. Wenn a, b, c, die drey Seiten eines Dreyecks sind: so ist der Inhalt $= \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a)}$ (462. §.); und wenn man $a + b + c = p$ setzt, so wird dieser Ausdruck $= \frac{1}{4}\sqrt{p(p-2c)(p-2b)(p-2a)}$. Wenn sich nun a, b, c, ändern, ohne daß sich ihre Summe ändert; so bleibt p einerley, also auch die Summe der dreyen Factoren $p - 2c + p - 2b + p - 2a = 3p - 2(a+b+c) = p$. Daher ist dieses Product am größten, wenn alle 3 Factoren gleich sind; folglich, wenn $2c = 2b = 2a$, oder, $c = b = a$, ist.

487. §.

Wenn α und β ein paar ungleiche Winkel sind, und $\alpha > \beta$ ist: so ist $\frac{\text{tang}\alpha}{\text{tang}\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$.

Beweis. In der 186. F. sey der Winkel ACB $= \alpha$, und ACE $= \beta$: so ist $\frac{FG}{CF} = \text{tang}\alpha$; $\frac{FE}{CF} = \text{tang}\beta$, also $\frac{FG}{FE} = \frac{\text{tang}\alpha}{\text{tang}\beta}$. Beschreibt man nun mit dem Halbmesser CE $=$ CA den Bogen AEB, so ist das Dreyeck FCE $<$ Ausschnitt ACE, also $\frac{\text{Dr. ECG}}{\text{Dr. FCE}} > \frac{\text{Dr. ECG}}{\text{Ausch. ACE}}$; und weil wieder- um der Ausschnitt ECB $<$ Dr. ECG ist, so ist auch $\frac{\text{Dr. ECG}}{\text{Dr. FCE}} > \frac{\text{Ausch. ECB}}{\text{Ausch. ACE}}$. Man addire 1 auf beyden Seiten: so wird $\frac{\text{ECG} + \text{FCE}}{\text{FCE}} > \frac{\text{ECB} + \text{ACE}}{\text{ACE}}$, oder $\frac{\text{FCG}}{\text{FCE}} > \frac{\text{ACB}}{\text{ACE}}$. Nun ist $\frac{\text{FCG}}{\text{FCE}} = \frac{\text{FG}}{\text{FE}}$ (245. §.) $= \frac{\text{tang}\alpha}{\text{tang}\beta}$, und $\frac{\text{ACB}}{\text{ACE}} = \frac{\alpha}{\beta}$ (253. §.); also $\frac{\text{tang}\alpha}{\text{tang}\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$.

488. §.

Ein reguläres Polygon, das mehr Seiten hat, ist allemahl gröſſer, als ein andres, von weniger Seiten, wenn beyde einen gleichen Umfang haben.

Beweis. Wenn ein reguläres Polygon P, n Seiten hat, und jede Seite $= a$, der halbe Centriwinkel $= \alpha$ ist; so ist $P = \frac{1}{4} na \cot\alpha = \frac{na}{4} \cdot \frac{a}{\text{tang}\alpha}$ (463. §.). Wenn ferner ein andres Polygon Q, $(n+m)$ Seiten hat, und jede Seite $= b$, der halbe Centri-Winkel $= \beta$ ist, beyde Polygone aber einen gleichen Umfang haben; so ist $Q = \frac{1}{4}(n+m)\, bb \cot\beta = \frac{(n+m)b}{4} \cdot \frac{b}{\text{tang}\beta} = \frac{na}{4} \cdot \frac{b}{\text{tang}\beta}$, weil $(n+m)b = na$. Ueberdem ist $\alpha = \frac{180°}{n}$, und $\beta = \frac{180°}{n+m}$, also $\alpha : \beta = n+m : n$, und $\alpha > \beta$: aber auch $a : b = n+m : n$, also $a > b = \alpha : \beta$. Nun war $\frac{\text{tang}\alpha}{\text{tang}\beta} > \frac{\alpha}{\beta}$ (487. §.); also $\frac{\text{tang}\alpha}{\text{tang}\beta} > \frac{a}{b}$, und $\frac{b}{\text{tang}\beta} > \frac{a}{\text{tang}\alpha}$, folglich $\frac{na}{4} \cdot \frac{b}{\text{tg}.\beta} > \frac{na}{4} \cdot \frac{a}{\text{tang}\alpha}$, d. i. $Q > P$.

489. §.

Wenn H, B, P, die Hypothenuse, Grundlinie, und Perpendiculär-Seite eines rechtwinklichten Dreyecks bedeuten, und h, b, p die gleichnahmigen Seiten eines andern ähnlichen Dreyecks: so ist $(H+h)^2 = (B+b)^2 + (P+p)^2$.

Beweis. Es sey $B = nb$: so ist $P = np$, und $H = nh$. Aber $H^2 = B^2 + P^2$, oder $H^2 = n^2 b^2$

+

$+np^2$, und $h^2=b^2+p^2$; also $H=nh=n\sqrt{(b^2+p^2)}$, und $h=\sqrt{(b^2+p^2)}$. Nun ist $(H+h)^2=H^2+2Hh+h^2=H^2+2n(b^2+p^2)+h^2$, und $2nb^2=2Bb$, $2np^2=2Pp$, also $(H+h)^2=B^2+P^2+2Bb+2Pp+b^2+p^2=(B+b)^2+(P+p)^2$.

490. §.

Auf den Grundlinien BC und BE stehen 222F zwo einander unähnliche gleichschenklichte litt. b Dreyecke ABC, DBE: man soll auf eben die Grundlinien ein paar einander ähnliche gleichschenklichte Dreyecke setzen, die so beschaffen sind, daß beyder Umfang zusammen so groß ist, als der beyden gegebenen ABC und DBE Umfang zusammen.

Aufl. Man setze daß FBC und GBE die gesuchten Dreyecke sind, so muß $FCB=GBE$ seyn: ist also $ACB<DBE$, so wird $FCB>ACB$, und $GBE<DBE$. Nun sey $BC=a$, $BE=b$, $AC=f$, $DB=g$, $FC=x$, $GB=y$: so hat man

I) $f+g=x+y$.

Ueberdem ist wegen der Aehnlichkeit der beyden gesuchten Dreyecke $a:b=x:y$, also

II) $ay=bx$.

Aus beyden Gleichungen findet man nach dem 184. §. und 186. §. Allg. Rech. x und y. Man erhält nemlich aus

II) $y=\frac{bx}{a}$; und aus I) $f+g=x+\frac{bx}{a}$, also

$a(f+g)=x(a+b)$ und

$$x = \frac{a(f+g)}{a+b}$$

$$y = \frac{b}{a}x = \frac{b(f+g)}{a+b}.$$

Wenn man demnach über BC ein gleichschenklichtes Dreyeck verzeichnet, wovon jeder Schenkel $= \frac{a(f+g)}{a+b}$ ist, und über BE ein andres, wovon jeder Schenkel $= \frac{b(f+g)}{a+b}$: so ist der Aufgabe ein Genüge geschehen.

491. §.

222F litt. b Die Summe des Inhalts der beyden ähnlichen, nach der Vorschrift des vor. §. verzeichneten gleichschenklichten Dreyecke *FBC*, *GBE*, ist grösser, als die Summe des Inhalts der beyden andern *ABC*, *DBE* auf eben den Grundlinien, wenn die beyden letzten zusammen einen eben so grossen Umfang haben, als die beyden ersten zusammen.

Beweis. Man verzeichne die Dreyecke ABC, DBE so, daß ihre Grundlinien BC, BE in grader Linie liegen, und setze AK und DH auf BC und BE senkrecht. Wenn nun FBC, GBE die beyden ähnlichen Dreyecke, auf eben den Grundlinien sind: so geht AK durch F, und DH durch G. Wenn ferner BE die kleinere Grundlinie ist, so verlängere man DH nach L, mache HL = HD, und ziehe BL: so ist der Winkel HBL = HBD. Aber HBD > HBG, also HBL > HBG, folglich auch HBL > KBF, und wenn man LB nach M verlängert, so wird KBM > KBF

KBF, folglich auch KBM ▷ KBA; folglich ABL ◁ 2R. Wird also AL gezogen: so muß AL von BC auf der Seite, wo K liegt, geschnitten werden. Nun ist AB + BD = FB + BG, oder AB + BL = FB + BG, und AB + BL ▷ AL, also FB + BG ▷ AL, und $(FB + BG)^2 \triangleright AL^2$. Da nun $(FB + BG)^2 = (FK + GH)^2 + (BK + BH)^2$ (489. §.), oder $(FB + BG)^2 = (FK + GH)^2 + HK^2$, und $AL^2 = (AK + HL)^2 + (KN + HN)^2$ (489. §.), oder $AL^2 = (AK + DH)^2 + HK^2$: so ist $(FK + GH)^2 \triangleright (AK + DH)^2$, und FK + GH ▷ AK + DH; folglich FK − AK ▷ DH − GH. Weil ferner BC ▷ BE; so ist $\frac{1}{2}$BC.FK − $\frac{1}{2}$BC.AK ▷ $\frac{1}{2}$BE.DH − $\frac{1}{2}$BE.GH, oder Dr. FBC − Dr. ABC ▷ Dr. DBE − Dr. GBE; also die Figur ABFC ▷ GEDB, folglich ABC + ABFC + GBE ▷ ABC + GEDB + GBE, d. i. FBC + GBE ▷ ABC + DBE.

Wenn BC = BE wäre, oder beyde Dreyecke gleiche Grundlinien hätten; so würde derselbe Satz noch richtig seyn.

492. §.

Unter allen gradlinichten Figuren, die gleich viel Seiten, und einen gleichen Umfang haben, hat die reguläre Figur die gröste Fläche.

Beweis. Wenn die Figuren Dreyecke sind, so ist der Satz schon im 486. §. bewiesen. Für die übrigen kann man so schliessen. Es sey die Figur ABCDE 227 F. unter allen Figuren die eben so viel Seiten, und litt. b. einen eben so grossen Umfang haben, die gröste: so ist sie

1) gleichseitig. Denn wäre AB nicht = AE: so könnte man auf BE ein gleichschenklichtes Dreyeck BFE mit ABE von gleichem Umfange setzen, und

dann wäre BFE ▷ ABE (484. §.), folglich wäre die Figur FBCDE ▷ ABCDE, die mit ihr eine gleiche Anzahl Seiten, und einerley Umfang hat; gegen die Voraussetzung. Eben so erhellet, daß jede zwo an einander liegende Seiten gleich groß seyn müssen.

2) gleichwinklicht. Es muß nemlich vermöge des erwiesenen AB = BC = CD, u. s. f. seyn: aber es ist auch EAB = BCD. Denn wären diese Winkel ungleich, so könnte man auf EB und BD ein paar ähnliche gleichschenklichte Dreyecke BFE und BGD setzen, von der Beschaffenheit, daß beyder Umfang zusammen so groß wäre, als beyder Dreyecke BAE und BCD Umfang zusammen (490. §.). Dann aber wäre die Figur FBGDE ▷ ABCDE, und beyde hätten einerley Umfang, welches ebenfalls der Voraussetzung entgegen ist. Auf ähnliche Art folgt die Gleichheit der übrigen Winkel in folgender Ordnung: A = C = E = B = D = A, und wenn ihre Anzahl ungrade ist, so kommt man in dieser Ordnung jedesmahl auf alle Winkel. Aber auch bey einer graden Anzahl, wie in der Figur ABCDEF, schließt man auf ähnliche Art, und beweiset die Gleichheit der Winkel in folgender Ordnung A = C = E, ferner A = D = F = B. Nur in dem einen Falle, wenn die Figur vierseitig ist, würde auf diese Art nur folgen, daß die entgegen gesetzten Winkel gleich wären; aber in diesem Falle ergiebt sich die Sache so. Die Figur muß gleichseitig seyn vermöge No. 1. also ist sie ein gleichseitiges Parallelogramm (98. §.). Wenn nun jede Seite = a und der Winkel, den zwo aneinander anliegende Seiten einschliessen, = α ist: so wird der Inhalt = aa sin α (461. §.), und dieser ist allemahl kleiner

als

als aa, welches der Inhalt in dem Falle wird, wenn $\alpha = 90°$ ist, und in diesem Falle ist die Figur ein Quadrat, also regulär.

493. §.

Der Kreis hat eine grössere Fläche, als eine jede gradlinichte Figur, die mit ihm einen gleichen Umfang hat. 225 F. litt. b.

Beweis. Es sey ABCDEF ein reguläres Polygon, welches mit dem Kreise, dessen Mittelpunct K ist, einerley Umfang $= \Pi$ hat: um diesen Kreis sey ein ähnliches Polygon *abcdef* beschrieben, dessen Umfang $= P$ ist, so ist $P > \Pi$ (144. §.). Folglich ist auch jede Seite dieses um den Kreis beschriebenen regulären Polygons grösser, als jede Seite des andern. Es sey G der Mittelpunct des um ABCDEF zu beschreibenden Kreises, und GH auf CD so wie KL auf *cd* senkrecht: so ist $dL = \frac{1}{2} cd$ und DH $= \frac{1}{2}$ CD. Wenn nun K*d* und GD gezogen werden, so ist das Dreyeck K*d*L $\sim$ GDH; folglich $dL > GH$, weil $dL > DH$. Nun ist der Inhalt des Kreises $= \frac{1}{2} \Pi . KL$, und des Polygons ABCDEF Inhalt $= \frac{1}{2} \Pi . GH$; folglich die Fläche des Kreises grösser, als die Fläche des Polygons ABCDEF. Weil nun das letztere grösser ist, als jede andre gradlinichte Figur von gleichem Umfange (492. §.): so ist auch der Kreis grösser, als jede gradlinichte Figur, die mit ihm einerley Umfang hat.

Weitere Ausführung der körperlichen Geometrie.

Der XXII. Abschnitt.

Von den Kugel-Schnitten.

494. §.

194. Fig. Wenn zweene Kreise *ABDE*, *AFBG* auf der Kugel Oberfläche einander schneiden, so giebt es nur zweene Durchschnittspuncte.

Beweis. Die Durchschnittspuncte müssen in den Ebenen beyder Kreise, folglich in der graden Linie AB liegen, worin die Ebenen beyder Kreise einander schneiden. Eben diese Puncte müssen zugleich in der Kugel Oberfläche liegen: folglich giebt es nur zweene solche Puncte, weil AB die Oberfläche der Kugel, nur in zweenen Puncten treffen kann (379. §.), und AB eine gemeinschaftliche Sehne beyder Kreise ist.

1. Zusatz. Zweene gröste Kreise schneiden einander allemahl, weil ihre Ebenen durch der Kugel Mittelpunct gehen. Eben diese Kreise halbiren einander: denn die Sehne zwischen beyden Durchschnittspuncten ist ihrer beyder Durchmesser (384. §.).

2. Zusatz. Umgekehrt: Zweene Kreise, die einander halbiren, sind gröste Kreise. Denn die Seh-

ne zwischen ihren Durchschnittspuncten, ist ihrer beyder Durchmesser (384. §.), und geht also durch beyder Mittelpunct. Wäre dies nun nicht zugleich der Kugel Mittelpunct, so würde eine grade Linie von der Kugel Mittelpunct durch den gemeinschaftlichen Mittelpunct beyder Kreise gezogen, auf beyder Ebenen senkrecht seyn (384. §.), welches nicht angehet. (322. §.)

3. Zusatz. Ein paar Kreise der Kugel also, die nicht beyde größte Kreise sind, können einander nicht halbiren.

495. §.

Ein Punct P auf der Oberfläche der Kugel, der 194
von allen Puncten der Peripherie AFBG eines Ku- Fig.
gelschnittes gleich weit entfernt ist, heißt ein **Pol** des Kugelschnittes, und eine grade Linie KP durch den Mittelpunct K des Schnittes, die zugleich durch seinen Pol P gehet, nennt man seine Axe.

1. Zusatz. Die Axe KP des Kugelschnittes AFBG stehet auf seiner Ebene senkrecht, und wenn sie an der andern Seite der Ebene des Schnittes die Oberfläche der Kugel in Q trift, so ist auch Q ein Pol desselben Kugelschnittes AFBG. Denn man ziehe die Durchmesser AKB, FKG und die Entfernungen AP, FP, BP, GP; so haben die Dreyecke APK, BPK, gleiche Seiten, mithin ist der Winkel AKP = BKP = R, und eben so erhellet, daß FKP, GKP rechte Winkel sind. Demnach ist KP auf AFGB senkrecht, (305. §.) und eben darum ist in den Dreyecken KAQ, KFQ, die Seite AQ = FQ, der Punct F mag in der Peripherie liegen, wo man will. (54. §.)

2. Zusatz. Eine grade Linie PQ die auf der Ebene eines Kugelschnittes AFBG im Mittelpunct K senkrecht steht, ist seine Axe: jeder Kugelschnitt hat also an jeder Seite seiner Ebene einen Pol, mithin zusammen zwey Pole, aber nicht mehrere. Denn es erhellet unmittelbar, daß alle Entfernungen wie AP, FP, so wie AQ, FQ, es mag F in der Peripherie AFBG liegen wo man will, gleich groß seyn müssen, wenn PQ auf AFBG senkrecht ist. (54. §.) Wenn es aber auf eben der Seite, wo P liegt noch einen Pol gäbe, so gäbe es noch eine Axe des Kugelschnittes, (1. Zus.) welches nicht seyn kann. (305. §.)

3. Zusatz. Eine grade Linie, die aus dem Pol P eines Kugelschnittes auf seine Ebene senkrecht herab gelassen wird, trift den Mittelpunct. Denn sonst könnte man auch PK ziehen, und PK wäre ebenfalls auf AFBG senkrecht, (1. Zus.) gegen den 305. §.

4. Zusatz. Wenn P und Q die Pole des Kugelschnittes AFBG sind, so ist P seine Axe. Denn die Axe geht durch P und Q, (1. Zus.) und zwischen P und Q kann nur eine grade Linie seyn.

5. Zusatz. Ein Kreis ABDE, der auf der Oberfläche der Kugel durch eines andern Kugelschnittes AFBG Pole gehet, steht auf dem letztern senkrecht, denn er geht durch die Axe PQ des Kreises AFBG, (315. §.). Auch halbirt ABDE den Kugelschnitt AFBG, weil die Durchschnittslinie AB durch des letztern Mittelpunct K gehet. Ueberdem ist ABDE ein größter Kreis, weil der Kugel Mittelpunct in PQ, also in dieses Kreises Ebene liegt: auch sind die Bogen AP, BP, imgleichen AQ, BQ dieses größten Kreises, zwischen dem Kreise AFBG, und einerley Pol desselben, gleich groß, weil ihre Sehnen gleich groß sind.

1. Zu-

6. Zusatz. Wenn durch die Pole P, Q eben des Kreises AFBG noch ein andrer größter Kreis PFQG geführt wird, so sind aus eben der Ursache die Bogen AP, FP, BP, GP, auch AQ, FQ, BQ, GQ gleich groß.

7. Zusatz. Wenn ein größter Kreis ABDE auf einem andern Kugelschnitt AFBG senkrecht steht; so fällt die aus dem Mittelpunct C der Kugel auf AFBG senkrecht gesetzte grade Linie CK in des größten Kreises Ebene (318. §.): also gehet der größte Kreis durch des andern Axe und Pole und halbirt ihn, wie die senkrechte Linie CK den Mittelpunct des Kugelschnittes AFBG trift. (383. §.)

8. Zusatz. Wenn ein größter Kreis ABDE einen Kugelschnitt AFBG halbirt; so geht er durch seinen Mittelpunct K, aber auch durch der Kugel Mittelpunct C, folglich geht er durch die Axe PQ, und Pole des Kreises AFBG, und steht auf ihm senkrecht. Wenn demnach ein größter Kreis einen andern schief schneidet, so halbirt er ihn nicht: denn wäre das letztere, so würde er auf ihm senkrecht stehen.

9. Zusatz. Von zweenen größten Kreisen APBQ, 195
ApBq, die auf einander senkrecht sind, geht jeder Fig.
durch des andern Axe und Pole. Die Axe PQ des einen *ApBq* fällt in die Ebene des andern APBQ, so wie des letztern Axe *pq* in die Ebene des erstern fällt (318. §.). Die Bogen AP, BP eines jeden dieser größten Kreise zwischen dem andern Kreise und seinem Pol, sind Quadranten (116. §.)

496. §.

Wenn zwey Kugelschnitte *AFBG*, *DFEG*, 195
einander in *FG* schneiden, und alsdenn ein Fig.

größter Kreis *APBQ* durch beyder Pole *P*, *Π*, gehet; so halbirt derselbe die Durchschnittslinie *FG*, und die zu dieser gemeinschaftlichen Sehne gehörigen Bogen.

Beweis. Weil beyde Ebenen AFBG, DFEG auf der Ebene APBQ senkrecht sind; so ist jene Durchschnittslinie FG auf der Ebene APBQ, folglich sowohl auf AB, des Kreises AFBG, als auch DE, des Kreises DFEG Durchmesser senkrecht (319. §.). Demnach werden die Bogen FEG, FDG mit ihrer Sehne FG von DE, imgleichen FAG, FBG und die Sehne FG von AB halbirt. (117. §.)

497. §.

196 Fig. Kreise der Kugel, deren Ebene einander parallel liegen, heissen Parallel-Kreise.

Zusatz. Parallelkreise DE, FG haben einerley Axe und Pole. Denn eine grade Linie CH aus der Kugel Mittelpunct C auf die Ebene des einen senkrecht gesetzt geht durch seinen Mittelpunct H, und Pole, P, Q (383. 495. §.); eben diese lothrechte Linie steht zugleich senkrecht auf der Ebene des andern DE (326. §.). Sie geht demnach durch seinen Mittelpunct (383. §.), und ist zugleich des Kreises DE Axe (495. §.), ihre Endpuncte P, Q, aber sind beyder Kreise Pole.

498. §.

196 Fig. Wenn zweene größte Kreise *APBQ*, *LPOQ* durch die Pole *P*, *Q* der Parallelkreise *DE*, *FG* geführt sind: so sind die Bogen *DM*, *FN*, der Parallelkreise zwischen diesen größten Kreisen einander ähnlich.

Be-

Beweis Wenn die Parallelkreise von den grösten Kreisen in den Linien DK, MK, FH, NH geschnitten werden, so sind PKD, PKM, PHF, PHN, rechte Winkel (496. §.): also ist DKM sowohl, als FHN der Neigungswinkel der Ebene PLQ gegen PAQ (313. §.), und deswegen ist DKM = FHN, und der Bogen DM ∽ FN (225. §.)

1. Zusatz. Theilt man demnach die Parallelkreise in ihre 360 Grade: so bekommen die Bogen DM, FN eine gleiche Anzahl von Graden. Deswegen ist der Bogen DM, oder auch ein ähnlicher Bogen eines andern mit DE parallelen Kreises das Maaß des Flächenwinkels, den die beyden grösten Kreise einschliessen.

2. Zusatz. Einer von den, mit DE parallelen Kreisen wird durch der Kugel Mittelpunct C gehen, und selbst ein grösster Kreis seyn, wie AB, also ist der Bogen AL dieses Kreises das Maaß des Flächen Winkels an PQ, der mit ALC einerley ist. Man wählet am bequemsten diesen Bogen, weil er zu einem Halbmesser gehört, der dem Halbmesser der Kugel gleich ist.

499. §.

Der Winkel DPM, den zweene Bogen DP, MP 196 grösster Kreise auf der Oberfläche der Kugel an der Fig. Spitze P einschliessen, heißt ein sphärischer Winkel.

1. Zusatz. Wenn P*d* in der Ebene APQ den Kreisbogen DP, und P*m* in der Ebene LPQ den Bogen MP berührt: so haben diese Tangenten die Lage gegeneinander, welche beyde Bogen DP, MP, in ihrem Durchschnittspunct P gegen einander haben.

(132. 133. §.) Daher ist der sphärische Winkel DPM mit dem Winkel dieser Tangenten dPm einerley.

2. Zusatz. Es ist aber auch dPm mit dem Neigungswinkel der Ebenen DPQ und MPQ gegen einander einerley: also wird das Maaß des sphärischen Winkels DPM eben so, wie das Maaß dieses Neigungswinkels, gefunden. Man nehme nemlich auf den Schenkeln PD und PM des sphärischen Winkels, die Bogen PA und PL $= 90°$, und lege durch die drey Puncte, A, L, C eine Ebene. Diese wird auf PQ senkrecht seyn (305. §.), und einen größten Kreis AB geben, wovon der Bogen AL zwischen den Schenkeln des sphärischen Winkels DPM dieses Winkels Maaß für den Halbmesser der Kugel abgiebt.

3. Zusatz. Nimmt man demnach auf dem einen Schenkel PL des sphärischen Winkels APL den Bogen PL $= 90°$, und legt durch CL eine Ebene LCA auf der Ebene des andern Schenkels PA senkrecht: so wird auch PA $= 90°$. Denn eine grade Linie LR auf die Ebene PCA senkrecht gesetzt fällt in die Ebene LCA (318. §.), also liegt R in dem Durchschnitt AC. Weil nun LCP $= 90°$, so ist RCP $= 90°$ (314. §.), folglich auch PA $= 90°$.

4. Zusatz. Auch umgekehrt: wenn PA $= 90°$, und die Ebene ACL auf der Ebene AP senkrecht ist: so muß PL $= 90°$ seyn. Denn das Loth LR geht durch AC (318. §.), und weil RCP $= 90°$ ist, so ist LCP $= 90°$ (314. §.) also PL $= 90°$.

500. §.

197 Fig. Wenn zweene größte Kreise der Kugel einander in F und G schneiden: so ist der sphärische Winkel EGB, oder der Neigungswinkel

der

der Ebenen beyder Kreise, so groß, als der Winkel $PC\Pi$, den die Axen PC, ΠC beyder Kreise einschliessen.

Beweis. Man nehme $GE = 90° = GB$, und lege durch B und E einen größten Kreis. Weil dieser auf beyde vorige senkrecht steht, (315. §.) so gehet er durch beyder Axen PC und ΠC. (496. §.) Weil ferner $PCB = 90° = \Pi CE$ und $\Pi CE = PCE$ ist, so wird $ECB = PCB - PCE = \Pi CE - PCE$, oder $ECB = \Pi CP$, und ECB ist mit dem sphärischen Winkel EGB einerley. (499. §.)

Zusatz. Demnach ist auch der Bogen $P\Pi =$ dem Bogen EB.

501. §.

Der kleinste Bogen eines größten Kreises $P\Pi$ zwischen zweenen Puncten auf der Oberfläche der Kugel heißt der Abstand oder die Entfernung des einen Puncts P vom andern Π auf der Oberfläche der Kugel genommen. Es ist nemlich dieser Bogen die kürzeste Linie, die man von P nach Π auf der Oberfläche der Kugel ziehen kann. Weil aber zwischen eben den Puncten P und Π zweene unterschiedene Bogen $P\Pi$, und $PBD\Pi$ eben desselben größten Kreises fallen, so ist es nöthig beyzufügen, daß von diesen beyden Bogen der kleinste $P\Pi$, der also allemahl kleiner als ein Halbkreis ist, verstanden werden müsse.

1. Zusatz. Demnach ist der Abstand der Pole zweener größten Kreise auf der Oberfläche der Kugel so groß, als das Maaß des sphärischen Winkels beyder Kreise für den Halbmesser der Kugel.

2. Zusatz. Jeder Pol eines größten Kreises ist von allen Puncten dieses Kreises um 90° entfernt.

502. §.

Ein paar Kreise auf der Oberfläche der Kugel berühren einander, wenn zwar ihre Peripherien zusammen stossen, aber so, daß der eine ganz auf der einen Seite der Ebene des andern fällt.

Zusatz. Zweene solche Kreise können sich nur in einem Punct berühren. Hätten ihre Peripherien nur zweene Puncte gemein, so wäre die grade Linie zwischen diesen Puncten, ihre gemeinschaftliche Sehne, und diese würde jede Kreisfläche in zwey Stücke schneiden, die zu beyden Seiten der andern Kreisfläche fallen würden.

503. §.

198 Fig. Durch einen Punct *B* eines Kreises *AMBN* der Kugel einen andern zu führen, der den vorigen berührt.

Aufl. Man lege einen größten Kreis ABD durch den Punct B und des Kreises AMBN Pole; so schneiden beyde einander in der graden Linie AB, und AB ist des Kreises AMBN Durchmesser. Durch B sey die grade Linie GH auf des größten Kreises Ebene senkrecht gesetzt: so fällt diese in die Ebene des Kreises AMBN (318. §.), und berührt diesen Kreis. (126. §.) Durch GH lege man eine neue Ebene, welche die Kugel schneidet, diese giebt einen Kreis BSDR, der ebenfalls auf ABD senkrecht steht, und ihn in BD schneidet, so daß BD sein Durchmesser ist (496. §.). Da nun HBD = R, so ist HG auch eine Tangente des Kreises BRDS: demnach fällt dieser Kreis ganz auf der einen Seite der Fläche des Kreises AMBN, und berühret denselben in B.

Zusatz. Man kann also durch eben denselben Punct B unzählig viele Kreise legen, die alle den Kreis AMBN in B berühren: unter diesen aber kann nur einer ein größter Kreis seyn.

Der XXIIII. Abschnitt.

Von den körperlichen Winkeln, oder Ecken.

504. §.

Wenn drey, oder auch mehr gradlinichte Winkel ACB, BCD, DCA so aneinander liegen, daß 199 Fig. ihre Spitzen bey C in einen Punct zusammen fallen, und jeder Winkel mit dem anliegenden einen Schenkel gemein hat, übrigens aber die Ebenen dieser Winkel sich in den graden Linien schneiden, welche die gemeinschaftlichen Schenkel zweener an einander liegender Winkel, abgeben; so heißt der zwar bey C rings herum begränzte, aber gegen A, B, D zu noch unbegränzte Raum, ein körperlicher Winkel, oder eine Ecke. Die Winkel ACB, BCD, u. s. f., welche die Ecke einschliessen, heissen die Seitenflächen der Ecke; die Flächen-Winkel an AC, CB u. s. f. aber, unter welchen die Seitenflächen gegen einander geneigt sind, die Winkel der Ecke.

Zusatz. Es giebt also dreyseitige, vierseitige, fünfseitige Ecken, u. s. f, weil sie den Nahmen von der Anzahl ihrer Seitenflächen bekommen. Eine dreyseitige Ecke heißt auch ein solides oder körperliches Dreyeck.

505.

505. §.

199 Fig. Wenn A, B, D, drey Puncte auf der Oberfläche einer Kugel sind, deren Mittelpunct C ist, und wenn die drey Puncte nicht in einem und eben demselben größten Kreise der Kugel liegen; so kann man zwischen B und D einen Bogen BD eines größten Kreises, und von beyden Endpuncten dieses Bogens nach dem dritten Punct A ebenfalls ein paar Bogen AD, AB größter Kreise ziehen. Das Stück der Oberfläche der Kugel, welches von diesen dreyen Bogen AD, AB, BD begränzt wird, heißt ein sphärisches Dreyeck, die Bogen selbst, heissen die Seiten dieses Dreyeckes, und die sphärischen Winkel an A, B, und D die Winkel desselben.

1. Zusatz. Man ziehe die drey Halbmesser der Kugel AC, BC, DC: so schliessen die Ebenen der drey Kreisausschnitte ACB, ACD, BCD an der Kugel Mittelpunct C ein solides Dreyeck ein (504 §.). Die Winkel des sphärischen Dreyecks ABD sind völlig einerley mit den Winkeln des soliden Dreyeckes an C, und die Bogen des sphärischen Dreyeckes sind die Maasse der Seitenflächen des soliden Dreyeckes. Will man also die Seiten des sphärischen Dreyecks nur in Graden kennen; so sind die Seiten und Winkel des sphärischen Dreyecks bekannt, wenn man die Seitenflächen und Winkel des soliden Dreyeckes kennet, und umgekehrt.

2. Zusatz. Deswegen kann man sich jedes solide Dreyeck zugleich als ein sphärisches, und umgekehrt, jedes sphärische als ein solides Dreyeck vorstellen: dieses dienet ungemein zu desto besserer Aufklärung der folgenden Lehren von diesen Dreyecken, und macht die Zeichnungen deutlicher.

506. §.

Wenn im sphärischen Dreyeck *ABD* eine Seite *BD* kleiner, als 180° ist, so ist auch der gegenüberstehende Winkel *BAD* < 180°; wenn dagegen *BD* > 180° ist, so wird auch *BAD* > 180°. 199 Fig.

Eben diese Sätze sind auch umgekehrt wahr.

Beweis. Es sey der Bogen BDE = 180°: so geht BA verlängert durch E, und es wird auch BAE = 180° (494. §). So lange nun BD < 180° ist, hat man BAD + DAE = 180°, also BAD < 180°. Fällt D über E hinaus in F, so daß BF > 180° ist, so wird auch BAF > 180°, weil BAE = 180° ist.

Zusatz. Wenn die Seite BDF > 180° ist, und man macht den Kreis wozu dieser Bogen gehört, vollständig: so entsteht ein neues sphärisches Dreyeck, welches mit dem vorigen die Seiten AB, AF gemein hat, und worin die dritte Seite BF die Seite BDF des vorigen zu 360° ergänzt. Der Winkel, welcher der Seite FB in dem einen gegenüberstehet, ergänzt ebenfalls den Winkel, welcher der Seite BDF in dem andern gegenüber steht, zu 360°: die an den gemeinschaflichen Seiten AF, AB anliegenden Winkel aber ergänzen einander zu 180°. Man pflegte deswegen die sphärischen und soliden Dreyecke wohl ganz bey Seite zu setzen, worin eine Seite, also auch ein Winkel grösser, als 180° ist Dies hat Euclides gethan, er hat auch bey den übrigen Ecken nie solche betrachtet, in welchen Winkel von mehr als 180° vorkommen, so wie er auch in der ganzen Geometrie nur von solchen gradlinichten Winkeln redet, die kleiner als 180° sind. Seine VIII Erklährung im I Buch

ist blos auf die hohlen Winkel eingeschränkt, und die Betrachtung der erhabenen Winkel ist eine Erweiterung dieser Lehre, welche neuere Theorien veranlasset haben. Dieses einzigen Umstandes wegen liesse sich Euclides gegen die sonst scharfsinnigen Erinnerungen noch wohl vertheidigen, welche ihm Herr Bärmann in seiner zu Wittenberg im Jahr 1764 herausgegebenen Commentatione de angulis solidis entgegengesetzt hat.

507. §.

199 Fig. **Wenn im sphärischen Dreyeck *ABD* jeder Winkel $< 180°$ ist, so sind jede zwo Seiten zusammen grösser, als die dritte.**

Beweis. Ist jeder Winkel $< 180°$, so ist auch jede Seite $< 180°$. Wenn nun alle drey Seiten gleich groß sind, so ist der Satz für sich klar. Ist aber $BD < AD$, also der Winkel $BCD < ACD$; so ziehe man AD, und mache $DCG = DCB$, nehme $CH = CG$, und ziehe AH, DH. Nun ist $HD = GD$ (54. §.), und $AH + HD > AG + GD$ (34. §). Folglich $AH > AG$: demnach ist der Winkel $ACH > ACG$ (63. §). Weil ferner $HCD = GCD$ gemacht ist, so wird $ACH + HCD > ACG + GCD$, oder $ACH + HCD > ACD$, folglich auch die Summe der Bogen $AB + BD >$ Bog. AD.

508. §.

200 Fig. **Wenn in einer körperlichen Ecke, deren Spitze *C* ist, jeder Winkel $< 180°$ ist: so ist auch jede Seitenfläche kleiner, als $180°$.**

Beweis. Wenn ACB, BCD ein paar an einander liegende Seitenflächen sind, die sich in CB schneiden; so schließt die Ebene durch ACD mit den

vorigen beyden eine dreyseitige Ecke ein, und die Flächen-Winkel an AC und CD werden kleiner, als 180°, weil die Ebene ACD in den körperlichen Raum der Ecke fällt. Demnach sind auch ACB, und BCD < 180° (506. §). So gilt der Beweis von jeden zwoen aneinander liegenden Seitenflächen, also von allen.

509. §.

Ist jeder Winkel einer körperlichen Ecke kleiner, als 180°: so beträgt die Summe aller Seitenflächen weniger als 4*R*, oder weniger als 360°.

Beweis. Man kann eine Ebene ABDE so legen, daß sie alle Seitenflächen der Ecke schneidet. Denn man kann durch die Spitze C eine Ebene so legen, daß alle Seitenlinien der Ecke an einer Seite dieser Ebene fallen. Diese schneidet alle Seitenlinien, also wird jede Ebene, die mit dieser parallel liegt, ebenfalls alle Seitenlinien (326. §.), folglich alle Seitenflächen der Ecke schneiden. Auf solche Art schliessen die Durchschnittslinien eine ebene gradlinichte Figur ABDE ein, die eben so viele Seitenlinien hat, als die Ecke Seitenflächen. Fig. 200

Jeder von den Winkeln dieser Figur, bey A, B, E, D ist kleiner, als 2R. Denn jeder dieser Winkel wie der bey A schließt mit zwoen durch AC liegenden Seitenflächen der Ecke C ein solides Dreyeck ein, worin der Winkel an AC < 2R ist, also ist auch BAE < 2R (506. §). Nimmt man einen Punct F innerhalb dieser Figur, und zieht nach alle Winkelpuncte A, B, D u. s. f. grade Linien FA, FB, u. s. f. so erhält man in derselben so viele Dreyecke, als die

Figur Seitenflächen hat. Demnach ist die Summe aller Winkel der Dreyecke um F so groß, als die Summe aller Winkel der Dreyecke um C (87. §.), weil um C eben so viele Dreyecke, als um F liegen. Man verstehe nun durch A, B, E, D die Winkel der ebenen Figur ABED, durch a, α, die zu den Dreyecken um C gehörigen Winkel bey A, durch b, β die bey B, eben so durch d, δ, die bey D, und durch e, ε, die bey E liegenden Winkel der Dreyecke um C: so hat man

$a+\alpha+b+\beta+d+\delta+e+\varepsilon+$ die W. um C $=$ A+B+E+D $+ 4R$

weil die Winkel um F $= 4R$ (24. §). Aber $a+\alpha \rhd$ A, $b+\beta \rhd$ B u. s. f. (507. §.): also $a+\alpha+b+\beta+d+\delta+e+\varepsilon \rhd$ A+B+E+D, folglich sind die Winkel um C kleiner als 4R (28. §. R.)

510. §.

201 Fig. Wenn man die drey Seitenlinien AC, BC, DC des dem sphärischen Dreyeck ABC zugehörigen soliden Dreyeckes an der Kugel Mittelpunct C durch C verlängert, bis sie die Oberfläche der Kugel in a, b, d wieder treffen: so schliessen die drey Bogen größter Kreise zwischen a, b, und d ein sphärisches Dreyeck ein, dessen Seiten und Winkel den Seiten und Winkeln des vorigen ABD gleich sind, so daß die gleichen Seiten den gleichen Winkeln gegenüber stehen.

Beweis. Daß die Bogen AB $= ab$, AD $= ad$, BD $= bd$ sind, erhellet aus dem 27 und 116. §. Ueberdem sind ADB und adb, DAB und dab, ABD

und

und *abd* entgegengesetzte gleich grosse Flächenwinkel (27. §.).

511. §.

Wenn zwo sphärische Dreyecke *ABD*, *αβδ*, auf einer oder gleich grossen Kugeln einen gleichen Winkel haben $C = \delta$, und zwo gleiche Seiten, die den gleichen Winkel einschliessen $AD = \alpha\delta$, $DB = \delta\beta$: so sind die übrigen den gleichen Seiten gegenüberstehenden Winkel, wie auch die übrigen Seiten gleich groß. 201 202 203 Fig.

Beweis. Es sey γ die Spitze des dem sphärischen Dreyeck $\alpha\beta\delta$ zugehörigen soliden Dreyecks an der Kugel Mittelpunct, deren Halbmesser bey dieser Untersuchung für alle sphärische Dreyecke einerley bleibt. Man legte die Seitenfläche $\beta\gamma\delta$ so auf BCD daß γ in C, $\gamma\delta$ in CD falle, so fällt δ in D, $\gamma\beta$ in CB, und $\beta\delta$ in BD.

Nun fällt entweder die Seitenfläche $\alpha\gamma\delta$ über BCD, oder unter BCD. Im ersten Fall fällt $\alpha\gamma\delta$ mit ACD zusammen (317. §.) $\gamma\alpha$ fällt in CA, α in A, $\delta\alpha$ in DA. Demnach fällt auch die Seitenfläche $\alpha\beta\gamma$ mit der Seitenfläche ABC zusammen, und $\alpha\beta$ fällt auf AB. Es paßt also das solide Dreyeck $\gamma\alpha\beta\delta$ in CABD (16. §.), die Seitenfläche $\alpha\gamma\beta$ paßt auf ACB, auch passen die Winkel an AC und $\alpha\gamma$, imgleichen an BC, und $\beta\gamma$, in einander, und alle diese in einander passende Grössen sind gleich (17. §). 201 202 Fig.

Fällt die Seitenfläche $\alpha\gamma\delta$ nicht auf eben der Seite von BCD, auf welcher ACD liegt, sondern unter derselben, wenn diese drüber liegt: so lege man den Ausschnitt $\beta\gamma\delta$ auf bCd, wie erfodert wird, wenn sie auf einander passen sollen, welches hier angehet, weil $BCD = bCd$. Da nun $\delta = D = d$, $\beta\delta = BD =$ 201 203 Fig.

bd, $\alpha\delta = AD = ad$ (510. §.); so wird das solide Dreyeck $\gamma\alpha\beta\delta$ so in das Dreyeck $Cabd$ passen, wie es im ersten Fall in CABD paßte: also ist auch in diesem Fall $\alpha\beta = ab = AB$, $\beta = b = B$, $\alpha = a = A$.

Zusatz. Ein Bogen, welcher den Winkel zwischen den gleichen Seiten eines gleichschenklichten sphärischen Dreyeckes in zweene gleiche Theile theilt, halbirt auch die gegenüberstehende Seite, und steht auf ihr senkrecht.

512. §.

Wenn im sphärischen Dreyeck ABD zwo Seiten gleich groß sind, $AD = AB$; so sind auch die gegenüberstehenden Winkel gleich groß.

Beweis. Man zeichne das solide Dreyeck $Cabd$ wie im 510. §: so ist der Winkel $a = A$, die Seite $ad = AD = AB$, und $ab = AB = AD$. Aber aus den dreyen Sätzen $a = A$, $ad = AB$, $ab = AD$ folgt, es sey $b = D$ (511. §). Nun ist auch $b = B$ (510. §), also $D = B$.

Zusatz. Im gleichseitigen sphärischen Dreyeck sind also alle drey Winkel gleich groß.

513. §.

Wenn zwo sphärische, oder solide Dreyecke $CABD$, $\gamma\alpha\beta\delta$ zwo gleiche Winkel haben $D = \delta$, $B = \beta$, und die Seiten zwischen diesen Winkeln sind ebenfalls gleich groß, $BD = \beta\delta$: so sind die übrigen beyden Seiten gleich, und die Winkel, welche den gleichen Seiten gegenüberstehen.

Be

Beweis. Der Ausschnitt $\beta\gamma\delta$ paßt auf BCD. Man lege ihn also auf BCD gehörig auf, wie im 506. §. 201 202 Fig.

Fallen nun die Seitenflächen $\alpha\gamma\delta$, $\beta\gamma\delta$ auf einer Seite von BCD mit den Seitenflächen ACD, ACB; so fällt $\alpha\gamma\delta$ in ACD, und $\alpha\gamma\beta$ in ACB (317. §): demnach fällt $\gamma\alpha$ in CA (297. §), und die Dreyecke passen in einander, so daß $\alpha = A$, $\alpha\gamma\delta \neq ACD$, $\alpha\gamma\beta = ACB$.

Fallen aber die Seitenflächen des Dreyeckes $\gamma\alpha\beta\delta$ auf der andern Seite von BCD: so kann $\gamma\alpha\beta\delta$ zwar in CABD nicht passen. Weil aber $\beta\gamma\delta$ auch auf bCd paßt, und $\beta = B = b$, $\delta = D = d$ ist; so paßt $\gamma\alpha\beta\delta$ in $Cabd$, und es wird $\alpha = a = A$, $\alpha\gamma\delta = aCd = ACD$, $\alpha\gamma\beta = aCb = ACB$ wie vorhin.

514. §.

Es können zwo sphärische Dreyecke ABC, AbC einen gleichen Winkel A haben, und zwo gleiche Seiten, wovon eine dem gleichen Winkel gegenüber stehet, ohne daß die übrigen Seiten und Winkeln gleich groß sind. 204 Fig.

Es können auch zwo sphärische Dreyecke ABC, abC eine gleiche Seite $BC = bC$ haben, und zwo gleiche Winkel $A = a$, $B = b$, wovon einer der gleichen Seite gegenüber stehet, ohne daß die Gleichheit der übrigen Seiten und Winkel daraus folgt.

Beweis d. 1 S. Wenn K der Kugel Mittelpunct ist, so lege man durch eine Seitenlinie CK des soliden, oder sphärischen Dreyeckes ABC eine Ebene CKD, auf die gegenüberstehende Seitenfläche AKD senkrecht (320. §), und die Durchschnittslinie sey KD.

Man nehme den Bogen D*b* = DB, ziehe K*b*: so giebt die Ebene CK*b* einen größten Kreis, wovon ein Bogen C*b* zwischen C und *b* fällt. Aber in den Dreyecken CDB und CD*b* sind die Winkel bey D gleich groß, überdem ist DB = D*b*, und CD beyden Dreyecken gemein: also wird CB = C*b* (511. §). Demnach haben die Dreyecke ABC, und A*b*C den Winkel A und die Seite AC gemeinschaftlich, auch sind die dem Winkel A gegenüberstehenden Seiten CB und C*b* gleich groß. Aber AB und A*b* sind nothwendig ungleich groß, so wie auch die Winkel ACB und AC*b*, und eben das gilt von den Winkeln ABC und A*b*C. Es ist nemlich A*b*C + C*b*B = 2R, aber C*b*B = ABC (511. §.), also auch A*b*C + ABC = 2K. Demnach können diese beyden Winkel nicht gleich seyn, es sey denn, daß CD mit CB zusammen falle.

Beweis des 2 S. Wenn man die beyden Bo-
205 Fig. gen AB und AC verlängert bis sie in *a* zusammenstossen: so wird der Winkel *a* = A. Man lege wie vorhin durch KC eine Ebene auf der Ebene AKB senkrecht, und nehme D*b* = DB: so wird der Bogen C*b* = CB, und der Winkel DBC = D*b*C (511. §.), also ist auch der Winkel *ab*C = ABC. Demnach ergeben sich zwo Dreyecke ABC, und *ab*C, worinnen *b*C = BC, *a* = A, und ABC = *ab*C ist. Weil nun AC + *a*C = 180°: so können diese Seiten nicht gleich seyn, es sey denn, daß beyde Quadranten wären. In diesem letzten Fall würden auch AD, und *a*D Quadranten seyn (499. §.), folglich hätte man auch AB = *ab*, und die Dreyecke ABC, *ab*C hätten lauter gleiche Seiten und Winkel (511. §). Wenn aber AC und *a*C keine Quadranten sind; so ist es auch AD nicht, (weil es sonst auch AC seyn müßte

(499.

(499. §.)): also sind AB und aB ungleich. Eben dies gilt auch von den Winkeln ACB und aCb, diese können nicht gleich seyn, weil sonst $AC = aC$ wäre (513. §.) gegen die Voraussetzung.

515. §.

Wenn im sphärischen Dreyeck ABD zweene Winkel gleich sind, $D = B$; so sind die gegenüberstehenden Seiten gleich. 201 Fig.

Beweis. Man verzeichne das Dreyeck $Cabd$, wie im 510. §; so ist $bd = BD$, überdem $d = D = B$, und $b = B = D$. Aber aus den dreyen Sätzen $bd = BD$, $d = B$, $b = D$ folgt, es sey $ab = AD$ (513. §.) Da nun auch $ab = AB$, so ist $AD = AB$.

Zusatz. Ein gleichwinklichtes sphärisches Dreyeck ist also auch gleichseitig.

516. §.

Wenn im sphärischen Dreyeck zweene Winkel ABD, ADB ungleich sind; so ist die dem grössern Winkel ABD gegenüberstehende Seite AD grösser, als die dem kleinern ADB gegenüberstehende AB. 206 Fig.

Beweis. Man lege durch BC eine Ebene BCE unter einem Winkel $EBD = ADB$, so fällt der Bogen BE zwischen BA und BD, und es wird im Dreyeck BDE die Seite $DE = BE$ (515. §). Also $DE + EA = BE + EA$, oder $AD = BE + EA$. Es ist aber $BE + EA > $ (507. §.), also auch $AD > AB$.

Zusatz Wenn demnach umgekehrt die Seite $AD > AB$ ist: so muß der Winkel $ABD > ADB$ seyn, weil weder $ABD = ADB$, noch $ABD < ADB$ seyn kann, ohne daß im ersten Fall $AD = AB$, und im

zweeten AD < AB wäre, beydes gegen die Voraussetzung.

517. §.

Wenn die drey Seiten zwoer sphärischen Dreyecke gleich groß sind; so sind auch die Winkel gleich groß, die den gleichen Seiten gegenüberstehen.

207 Fig. **Beweis.** Wenn die drey Seiten in zweyen Dreyecken CABD und CEBD gleich groß sind, so kann man allemahl ein paar Seitenflächen so an einander passen, wie hier die beyden mit einerley Buchstaben BCD bezeichneten Seitenflächen. Dann aber fallen die beyden übrigen entweder auf einer Seite, oder auf verschiedenen Seiten, welches letztere die Zeichnung vorstellt.

In diesem letztern Fall wird die Ebene ACE zwischen AC und EC einen grösten Kreisbogen AE geben, der den Bogen DB in F schneidet. Dann aber sind in den Dreyecken ADE und ABE die Winkel DAE = DEA, und BAE = BEA (512. §.), also hat man DAE + BAE = DEA = BEA. Fiele F nicht zwischen B und D über B hinaus; so wäre doch DAE − BAE = DEA − BEA, folglich in beyden Fällen BAD = BED. Aber hieraus folgt die Gleichheit der übrigen Winkel bey B und D (511. §).

Zeichnet man nun das dem Dreyeck CABD entgegengesetzte *Cabd*, wie im 510. §: so erhellet, daß CBDE in *Cbad* passe, weil vermöge des Beweises BDE = BDA = *d*, DBE = DBA = *b*, und überdem BD = *bd* (513. §). daraus erhellet ferner, daß auch die Gleichheit der Winkel folge, wenn DE und BE mit DA und BA auf einer Seite von BCD fallen.

518.

518. §.

Es ist auf der Oberfläche der Kugel ein sphärisches Dreyeck *ABD* gegeben: man soll auf eben der Kugel ein andres sphärisches Dreyeck verzeichnen, dessen Seiten die Winkel des vorigen, und dessen Winkel die Seiten des vorigen zu $2R$ ergänzen. 208 Fig.

Aufl. Auf den Schenkeln des Winkels A nehme man $AE = AF = 90°$, und lege durch E und F einen größten Kreis PR. Eben so nehme man auf des Winkels B Schenkeln $BG = BH = 90°$, und lege durch G und H den größten Kreis PQ. Wenn man ferner auf des Winkels D Schenkeln $DI = DK = 90°$ nimmt, und durch I und K den größten Kreis QR legt; so geben diese drey größten Kreyse ein Dreyeck PQR, welches das gesuchte ist.

Beweis. Weil A des Bogens PR und B des Bogens PQ Pol ist (495. §); so sind die Bogen größter Kreise PA, $PB = 90°$ (501. §), also P des Bogens AB Pol (495. §). Eben so erhellet, daß Q des Bogens BD, und R des Bogens AD Pol sey: demnach ist $PH = 90° = GQ$, und $PH + GQ = 180°$ Aber $GQ = HQ + GH$, also ist $PH + HQ + GH = 180°$, oder $PQ + GH = 180°$. Da nun GH des Winkels B Maaß ist für den Halbmesser der Kugel (509. §); so ist auch $PQ + B = 180°$, und es erhellet eben so, daß $PR + A$ und $QR + D = 180°$ sey.

Ferner ist $AE = 90° = BH$, also $AE + BH = 180°$. Da nun $AE = AB + BE$, so ist auch $AB + BE + BH = 180°$, oder $AB + EH = 180°$. Weil überdem EH des Winkels P Maaß ist (499. §),

so

so wird AB + P = 180°. Es folgt auf eben die Art, daß BD + Q, und AD + R = 180° sey,

519. §.

Die Summe aller dreyer Winkel eines sphärischen Dreyeckes *ABD* ist grösser als 2*R*, und kleiner als 6*R*.

208 Fig.

Beweis. Man verzeichne das Dreyeck PQR, wie im vor. §, so ist A = 2R − PR, B = 2R − PQ, D = 2R − QR, also A + B + D = 6R − PR − PQ − QR, und folglich A + B + D < 6R.

Weil nun PR + PQ + QR < 4R (509. §.), so ist 6R − PR − PQ − QR > 2R, oder A + B + D > 2R.

520. §.

208 209 Fig.

Wenn die drey Winkel eines sphärischen Dreyeckes *ABD* so groß sind, als die drey Winkel eines andern α, β, δ, nemlich *A* = α, *B* = β, *D* = δ: so sind auch die den gleichen Winkeln gegenüberstehenden Seiten gleich groß.

Beweis. Man verzeichne für beyde die Dreyecke PQR und *pqr*, wie im 518. §; so hat man PR = 180° − A, PQ = 180° − B, QR = 180° − D. Ueberdem *pr* = 180° − α, *pq* = 180° − β, *qr* = 180° − δ: demnach ist PR = *pr*, PQ = *pq*, QR = *qr*, weil vermöge der Voraussetzung A = α, B = β, D = δ, und hieraus folgt, es sey Q = *q*. R = *r*, P = *p* (617. §). Aber Q + BD = 180° = *q* + βδ, also BD = βδ. Ferner R + AD = 180° = *r* + αδ, also AD = αδ, überdem P + AB = 180° = *p* + αβ, also auch AB = αβ.

Der

Der XXIV. Abschnitt.

Die sphärische Trigonometrie.

521. §.

Aus den bisherigen Lehren ergiebt sich eine grosse Aehnlichkeit der Eigenschaften sphärischer Dreyecke und ebener gradlinichter Dreyecke untereinander. Drey Stücke von dem Umfange eines sphärischen Dreyecks bestimmen die übrigen, einige besondre Fälle ausgenommen: deswegen lassen sich aus dreyen solchen gegebenen Stücken die übrigen durch eine ähnliche Rechnung finden, wie aus dreyen Stücken eines gradlinichten Dreyeckes die übrigen berechnet werden können. Die Wissenschaft von den Rechnungs-Regeln, nach welchen aus dreyen Stücken von dem Umfange eines sphärischen Dreyeckes die übrigen gefunden werden, heißt die sphärische Trigonometrie. Sie kann auch die körperliche Trigonometrie heissen, weil die Seiten und Winkel körperlicher Dreyecke nach eben den Regeln berechnet werden.

522 §.

Ein sphärisches Dreyeck MNR heißt ein rechtwinklichtes, wenn ein Winkel desselben, wie MRN, ein rechter Winkel ist. Die Seiten MR, NR, welche den rechten Winkel einschliessen, heissen die Perpendiculär-Seiten, oder Catheti, und die dritte MN, welche dem rechten Winkel gegenüberstehet, wird auch hier die Hypothenuse genannt. 210 Fig.

Im

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sey in der Folge allemahl der rechte Winkel = R, die eine Perpendiculär-Seite = B, die andre = P, der Winkel an B = M, der Winkel an P = N, die Hypothenuse sey H.

523. §.

219 Fig. Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhalten sich die Sinus der Seiten wie die Sinus der gegenüberstehenden Winkel.

Beweis. Wenn die Halbmesser RC, MC, NC, der Kugel gezogen sind, auf deren Oberfläche das Dreyeck verzeichnet ist; so schliessen die Sectoren RCM, RCN, MCN am Mittelpunct C der Kugel, das dazugehörige solide Dreyeck ein. (505. §.) Aus N sey auf CR die grade Linie NG senkrecht gezogen, so steht NG zugleich auf der Ebene RCM senkrecht. (318. §.) Ferner sey NF auf CM senkrecht, und man ziehe FG, so ist auch FG auf CM senkrecht: (314. §.) demnach ist NFG = dem sphärischen Winkel M (313. 499. §.). Nun hat man CN: sin. tot = NF: sin NCF, und CN: sin. tot = NG: sin NCG, also NF: sin NCF = NG: sin NCG, oder NF: NG = sin NCF: sin NCG. Ueberdem ist NF: NG = sin tot: sin NFG, also wird sin tot: sin NFG = sin NCF: sin NCG. Da nun NFG = M, NCF = H, NCG = P; so ist sin tot: sin M = sin H: sin P, oder sin tot: sin H = sin M: sin P.

Setzt man in der Folge der Kürze wegen allemahl sin tot = r: so hat man

$$r : \sin H = \sin M : \sin P,$$

und $$r : \sin H = \sin N : \sin B,$$

folglich auch $$\sin M : \sin P = \sin N : \sin B.$$

524. §.

Der ganze Umfang des Dreyecks bestehet aus dreyen Seiten B, P, H, und dreyen Winkeln M, N, R. Wenn nun hievon drey Stücke gegeben sind, und eins gesucht wird; so werden in der Aufgabe allemahl vier Stücke vorkommen, drey gegebene, und eins, das man finden soll. Unter den gegebenen Stücken ist allemahl der rechte Winkel befindlich: deswegen werden ausser demselben in der Aufgabe noch drey andre Stücke vorkommen, wovon zwey gegeben sind, und das dritte gesucht wird. Alle hieher gehörigen Fälle lassen sich so übersehen. In der Aufgabe kommen ausser dem rechten Winkel vor

I) entweder alle drey Seiten.

II) oder nicht alle drey Seiten: also

A. zwo Seiten, und ein Winkel. Folglich

a) die beyden Perpendiculär-Seiten, und ein Winkel

b) Die Hypothenuse, eine Perpendiculärseite, und ein Winkel.

α) Die Hipothenuse, eine Perpendiculärseite, und der entgegengesetzte Winkel.

β) Die Hypothenuse, eine Perpendiculärseite, und der anliegende Winkel.

B. Nur eine Seite, und zweene Winkel. Also

a) die Hypothenuse, und zweene Winkel.

b) Eine Perpendiculär-Seite, und zweene Winkel.

525.

525. §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel von zwoen Seiten, die den rechten Winkel nicht einschliessen, und dem der Perpendiculär-Seite gegenüberstehenden Winkel, zwey Stücke gegeben, man soll das dritte finden (524. §. *litt.* α).

Aufl. Diese drey Stücke sind H, P, M, oder welches einerley ist, H, B, N. Weil nun

$$r : \sin H = \sin M : \sin P$$
$$\sin H : r = \sin P : \sin M$$
$$\text{und } \sin M : \sin P = r : \sin H,$$
$$\text{oder auch } r : \sin H = \sin N : \sin B$$
$$\sin H : r = \sin B : \sin N$$
$$\text{und } \sin N : \sin B = r : \sin H;$$

so kann man allemahl aus zweyen von diesen Stücken das dritte finden.

Man braucht hier bey der würklichen Berechnung mit noch grösserm Vortheil, als in der ebenen Trigonometrie, die Logarithmen, indem auch hier statt der Seiten ihre trigonometrischen Linien in Rechnung kommen: auch hat Neper den Gebrauch der Logarithmen würklich zuerst in der sphärischen Trigonometrie gewiesen.

Es sey $H = 30°$. $M = 23° 28' 20''$: so findet man

$$l \sin 30° = 9{,}6989700$$
$$l \sin 23° 28' = 9{,}60011181$$
$$20'' - - 968$$
$$19{,}29931849 - 10$$

Also $P = 11° 29' 14\frac{1}{2}''$.

526. §.

Da die Sinus, Cosinus, Tangenten, Cotangenten, u. s. f. verschiedener Winkel gleich groß seyn können; so wird es zuweilen zweifelhaft, ob der gesuchte Winkel spitz oder stumpf, und die gesuchte Seite kleiner oder grösser als ein Quadrant sey, wofern man es nicht aus andern Gründen, als allein aus der Grösse dieser Linien beurtheilen kann. Es ist hier eigentlich nur allemahl die Rede von solchen Dreyecken, worin keine Seite grösser, als ein Halbkreis, also auch kein Winkel grösser, als 180° ist (506. §). Wenn man demnach bey den gegebenen Stücken auch die Lage der trigonometrischen Linien in Betracht zieht, und den dreyen ersten Gliedern der Proportion die ihnen zugehörigen Zeichen + und — gehörig voran setzt; so wird dadurch das Zeichen des vierten Gliedes bestimmt, und nun kann es nur in dem Fall zweifelhaft bleiben, ob das gesuchte grösser oder kleiner als 90° sey, wenn das vierte Glied ein Sinus ist. Das ist es nun in allen Fällen des vorigen 525. §: indessen bleibt die Sache doch nur zweifelhaft, wenn das gesuchte die Hypothenuse ist, denn aus zweenen Winkeln, und einer Seite, die einem Winkel gegenüberstehet, werden die übrigen Stücke nicht bestimmt (514. §.). Wie die Sache in den übrigen beyden Fällen beurtheilet werden müsse, wird sich gleich näher zeigen.

527. §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhält sich der ganze Sinus zum Sinus einer Perpendiculär-Seite, wie die Tangente des an dieser Seite anliegenden Winkels zur Tan-

gente der gegenüberstehenden Perpendiculär-Seite.

Beweis. Wenn die Figur eben so, wie im 523 §. gezeichnet wird, so ist $CG:GN = r : \text{tang}NCG$, und $GN : GF = \text{tang}NFG : r$, also $CG : GF = \text{tang}NFG : \text{tang}NCG$ (193. §.). Da nun $CG:GF = r : \sin GCF$, so ist $r : \sin GCF = \text{tang}NFG : \text{tang}NCG$, oder $r : \sin B = \text{tang}M : \text{tang}P$, also aus eben der Ursache auch $r : \sin P = \text{tang}N : \text{tang}B$.

528. §.

Jeder von den Winkeln, die an den beyden Perpendiculär-Seiten anliegen, ist mit der gegenüberstehenden Seite von einerley Art.

Beweis. In der Proportion $r : \sin B = \text{tang}M : \text{tang}P$ sind die beyden ersten Glieder positiv, weil B nie grösser als 180° ist. Wenn also

a) $M < 90°$, so ist $+r : +\sin B = \text{tang}M : +\text{tang}P$, also $P < 90°$.

b) $M = 90°$, so ist $\text{tang}M = \infty$, also auch $\text{tang}P = \infty$, und $P = 90°$.

c) $M > 90°$, so ist $+r : +\sin B = -\text{tang}M : -\text{tang}P$, und $P > 90°$.

Diese drey Sätze gelten auch umgekehrt, weil $\sin B : r = \text{tang}P : \text{tang}M$.

Zusatz. Hieraus beurtheilet man im 525. §, ob P und M kleiner oder grösser als 90° zu nehmen sind, wenn P aus H und M, oder M aus H und P gesucht wird.

529. §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel von den beyden Perpendiculär-Seiten und noch einem Win-

Winkel zwey Stücke gegeben, man soll das dritte finden (524. §. litt. a).

Aufl. Diese drey Stücke sind B, P, M, oder B, P, N. Da nun 210 Fig.

$$r : \sin B = \tang M : \tang P,$$

oder

$$r : \sin P = \tang N : \tang B,$$

so findet man allemahl aus zweenen von diesen Stücken das dritte, wenn man nur jedesmahl die Proportion gehörig ordnet, damit das gesuchte Glied das letzte werde.

Wird B aus M und P gesucht, so ist es zweifelhaft, ob B grösser oder kleiner als 90° zu nehmen sey: denn in der Proportion

$$\tang M : \tang P = r : \sin B,$$

haben M und P allemahl einerley Zeichen (523. §.), und der positive Sinus von B gehört zu zweenen Bogen, davon einer grösser der andre kleiner als 90° ist. Die Ursache dieser Zweydeutigkeit liegt wiederum im (514. §.): in den übrigen Fällen fällt die Zweydeutigkeit weg. Das Zeichen + oder − des dritten Gliedes der Proportion bestimmt das Zeichen des vierten.

530. §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhält sich

1) der ganze Sinus zum Cosinus eines Catheti, wie der Cosinus des andern Catheti zum Cosinus der Hypothenuse.

2) Der ganze Sinus zum Cosinus eines Catheti, wie der Sinus des anliegenden Winkels zum Cosinus des gegenüberstehenden Winkels.

211 Fig.

Beweis. Beyde Proportionen schließt man aus dem 523. §. auf folgende Art. Im Dreyeck MNR, das man sich auf der Oberfläche einer Kugel, deren Mittelpunct C ist, gezeichnet vorstellen muß, verlängere man MR bis Q, und MN bis S, so daß MQ und MS Quadranten werden. Man ziehe die Halbmesser der Kugel CQ, CS: so steht MC nebst MCS und MCQ auf der Ebene QCS senkrecht (305. 315. §.), und der Bogen QS gehört zum größten Kreise, der durch des Kreises QRM Pole geht (498. §.). Aus eben der Ursache geht auch RN verlängert durch des Kreises QRM Pole. Wenn also QS, RN einander in V schneiden; so ist V des Kreises QRM Pol, und die Bogen VQ, VR sind Quadranten. Weil nun das Dreyeck VSN bey S rechtwinklicht ist, so hat man aus dem 523. §.

$$r : \sin VN = \sin SVN : \sin SN.$$

Aber $\sin VN = \cos P$, $\sin SVN = \sin QR = \cos B$, und $\sin SN = \cos H$: also ist

1) $r : \cos P = \cos B : \cos H$.

Ferner ist $r : \sin VN = \sin VNS : \sin VS$, und $\sin VNS = \sin N$, $\sin VS = \cos QS = \cos M$: also

2) $r : \cos P = \sin N : \cos M$.

531. §.

Wenn im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck beyde Perpendiculär-Seiten von einerley Art sind: so ist die Hypothenuse $< 90°$.

Sind beyde Perpendiculär-Seiten von verschiedener Art: so ist die Hypothenuse $> 90°$.

Ist eine von den beyden Perpendiculär-Seiten $= 90°$: so ist auch die Hypothenuse $= 90°$.

Beweis. Dies sind leichte Folgen aus der Proportion $r : \cos B = \cos P, \cos H$ (530. §.), worin das Zeichen des letzten Gliedes aus dem Zeichen der beyden mittlern sich so bestimmt:

$+r : + \cos B = + \cos P : + \cos H$
$+r : - \cos B = - \cos P : + \cos H$
$+r : + \cos B = - \cos P : - \cos H$
$+r : - \cos B = + \cos P : - \cos H.$

Wenn B oder $P = 90°$ ist, so ist $\cos B$ oder $\cos P = 0$, und in beyden Fällen auch $\cos H = 0$, also $H = 90°$.

Zusatz. Diese drey Sätze sind auch umgekehrt wahr, wie aus Betrachtung der Proportion leicht erhellet.

532. §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel zwo Seiten gegeben, man soll die dritte finden. (524. §. num. I.)

Aufl. Die Proportion $r : \cos B = \cos P : \cos H$ (530. §.) enthält alle drey Seiten und läßt sich in jedem besondern Fall leicht so ordnen, daß die gesuchte Seite zuletzt stehet.

Bey dieser Aufgabe giebt es gar keine zweydeutige Fälle, weil das Zeichen des vierten Gliedes allemahl durch die übrigen bestimmt wird.

533. §.

Ausser dem rechten Winkel sind von den beyden übrigen Winkeln und einer Perpendiculär-Seite zwey Stücke gegeben, man soll das dritte finden. (424. §. litt. b)

Aufl. Die Stücke M, N, P, oder M, N, B sind alle in der Proportion

$$r : \cos P = \sin N : \cot M$$

oder $r : \cos B = \sin M : \cos N$

enthalten: also findet man aus zweyen das dritte, wenn man nur die Proportion gehörig ordnet.

Wenn N aus P und M, oder M aus B und N gesucht wird, so ist es zweifelhaft, ob das gesuchte spitz, oder stumpf sey (514. §.). Die übrigen beyden Fälle sind bestimmt, da B und N, P und M allemahl von einerley Art sind.

534. §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck verhält sich

1) der ganze Sinus zur Cotangente eines der beyden übrigen Winkel, wie die Cotangente des andern Winkels zum Cosinus der Hypothenuse.

2) Der ganze Sinus zum Cosinus eines der beyden übrigen Winkel, wie die Cotangente der anliegenden Perpendiculär-Seite zur Cotangente der Hypothenuse.

211 Fig.

Beweis. Wenn die Figur eben so, wie im 530. §. gezeichnet wird, so hat man im Dreyeck SVN nach dem 527. §., $r : \sin SN = \text{tang} VNS : \text{tang} SV$. Aber $\sin SN = \cos H$, $\text{tang} VNS = \text{tang} N$, $\text{tang} SV = \cot QS = \cot M$: also ist $r : \cos H = \text{tang} N : \cot M$, oder $r : \text{tang} N = \cos H : \cot M$. Da nun $\cot N : r = r : \text{tang} N$ (417. §. n. 2.), so wird $\cot N : r = \cos H : \cot M$, oder

1) $r : \cot M = \cot N : \cos H$.

Man

Man hat überdem im Dreyeck SVN die Proportion $r : \sin SV = \text{tang} SVN : \text{tang} SN$. Aber $\sin SV = \cos M$, $\text{tang} SVN = \text{tang} QR = \cot B$, und $\text{tang} SN = \cot H$. Also wird

2) $r : \cos M = \cot B : \cot H = \text{tang} H : \text{tang} B$

535. §.

Wenn im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck beyde Winkel an der Hypothenuse von einerley Art sind, so ist die Hypothenuse $< 90°$.

Sind diese beyden Winkel von verschiedener Art, so ist die Hypothenuse $> 90°$.

Und wenn einer dieser Winkel $= 90°$ ist; so ist auch die Hypothenuse $= 90°$

Beweis. Alle drey Sätze folgen aus der Proportion $r : \cot M = \cot N : \cos H$, wenn man die Zeichen + und − gehörig voran setzt. Es wird nemlich

$$+r : + \cot M = + \cot N : + \cos H$$
$$+r : - \cot M = - \cot N : + \cos H$$
$$+r : + \cot M = - \cot N : - \cos H$$
$$+r : - \cot M = + \cot N : - \cos H.$$

Wenn M oder $N = 90°$ ist; so ist cotM oder cotN $= 0$, und in beyden Fällen $\cos H = 0$, also auch $H = 90°$.

Zusatz. Alle drey Sätze sind auch umgekehrt wahr, welches ebenfalls sehr leicht aus Betrachtung der Proportion folgt.

536. §.

Ausser dem rechten Winkel sind von den beyden übrigen Winkeln und der Hypothenuse zwey Stücke gegeben, man sucht das dritte (524. §. litt. a).

Aufl. Die Proportion

$r : \cot M = \cot N : \cos H$

ordne man so, daß das gesuchte im letzten Gliede stehet: so wird es durch die übrigen Stücke völlig bestimmt, so, daß hier gar kein zweydeutiger Fall statt hat.

537. §.

Im rechtwinklichten sphärischen Dreyeck sind ausser dem rechten Winkel von zwoen Seiten, die den rechten Winkel nicht einschliessen, nebst dem eingeschlossenen Winkel, zwey Stücke gegeben, man soll das dritte finden (524. §. litt. β).

Aufl. Bey dieser Aufgabe ist die 2te Proportion des 534. §. brauchbar. Es ist nemlich $r : \cos M = \cot B : \cot H = \tang H : \tang B$, oder $r : \cos N = \cot P : \cot H = \tang H : \tang P$, welches man in jedem besondern Fall leicht so ordnet, daß das gesuchte ins letzte Glied kommt.

Auch findet bey dieser Aufgabe keine Zweydeutigkeit statt, weil das Zeichen des letzten Gliedes es völlig bestimmt, ob das gesuchte grösser oder kleiner als 90° sey.

538. §.

Die erwiesenen sechs Proportionen (523. 527. 530. 534. §.) sind demnach hinlänglich, alle Aufgaben, die für die rechtwinklichten Dreyecke vorkommen können, aufzulösen. Setzt man den ganzen Sinus = 1: so kann man folgende Gleichungen zwischen den Seiten und Winkeln des rechtwinklichten Dreyeckes aus diesen Proportionen schliessen.

I) $1 : \sin H = \sin M : \sin P$, (523. §.)

$$\text{also } \sin H = \frac{\sin P}{\sin M}, \quad \sin P = \sin M \sin H,$$

$$\sin M = \frac{\sin P}{\sin H}.$$

II) $1 : \sin B = \text{tang} M : \text{tang} P$ (527. §.) $= \cot P : \cot M$, (417. §. n. 2.)

$$\text{also } \text{tang} P = \sin B \ \text{tang} M = \frac{\sin B}{\cot M}, \quad \sin B =$$

$$\frac{\text{tang} P}{\text{tang} M} = \text{tang} P \cot M, \quad \text{tang} M = \frac{\text{tang} P}{\sin B}.$$

III) $1 : \cos B = \cos P : \cos H$, (530 §.)

$$\text{also } \cos H = \cos B \cos P, \quad \cos B = \frac{\cos H}{\cos P},$$

$$\cos P = \frac{\cos H}{\cos B}.$$

IV) $1 : \cos B = \sin M : \cos N$, (530. §.)

$$\text{also } \cos N = \cos B \sin M, \quad \cos B = \frac{\cos N}{\sin M},$$

$$\sin M = \frac{\cos N}{\cos B}.$$

V) $1 : \cot M = \cot N : \cos H$, (534. §.)

$$\text{also } \cos H = \cot M \cot N = \frac{\cot M}{\text{tang} N} =$$

$$\frac{\cot N}{\text{tang} M}; \quad \cot M = \frac{\cos H}{\cot N} = \cos H$$

$$\text{tang} N; \quad \cot N = \frac{\cos H}{\cot M} = \cos H \ \text{tang} M.$$

VI) 1 : cosM = cotB : cotH (534. §.) = tangH : tangB, (417. §. n. 2.) also $\cot H = \cos M \cot B = \frac{\cos M}{\tan g B}$, $\cot B = \frac{\cot H}{\cos M}$; $\cos M = \frac{\cos H}{\cot B} = \frac{\tan g B}{\tan g H}$; $\tan g B = \cos M \tan g H$.

539. §.

Auch im schiefwinklichten sphärischen Dreyeck verhalten sich die Sinus der Seiten, wie die Sinus der entgegenstehenden Winkel.

212 Fig.

Beweis. Wenn ABC ein solches Dreyeck ist: so lege man durch die Spitze eines Winkels B und den Mittelpunct der Kugel eine Ebene, die auf der Ebene der entgegengesetzten Seite senkrecht ist. Diese giebt auf der Kugel Oberfläche einen Bogen eines größten Kreises BD, der auf AC senkrecht ist, und man hat statt des schiefwinklichten Dreyecks ABC zwey andre, die bey D rechtwinklicht sind. Diese geben (523. §.))

$r : \sin AB = \sin A : \sin BD$, und

$r : \sin BC = \sin C : \sin BD$, also ist

$\sin AB : \sin BC = \sin C : \sin A$ (193. §.)

oder $\sin AB : \sin C = \sin BC : \sin A$.

Wenn auch CE auf AB senkrecht ist, so folgt eben so, es sey $\sin BC : \sin A = \sin AC : \sin B$, also ist auch $\sin AB : \sin C = \sin AC : \sin B$.

540. §.

213 Fig.

Die Figur ist so gezeichnet, daß das Perpendicul BD innerhalb des Dreyecks fällt. Wenn es aber auch ausserhalb des Dreyecks fiele, so würden die übri-

übrigen Proportionen dennoch richtig seyn. Man kann übrigens in jedem vorkommenden Fall aus der Beschaffenheit der Winkel A und C beurtheilen, ob das Perpendicul innerhalb oder ausserhalb des Dreyeckes fallen werde.

Wenn beyde Winkel *A* und *ACB* von einerley Art sind: so fällt *BD* innerhalb des Dreyeckes. Denn ist A sowohl, als ACB spitz; so ist $BCd > 90°$. Nun setze man, es sey nicht BD, sondern *Bd* auf AC senkrecht: so wäre $Bd < 90°$, weil $A < 90°$, und zugleich $Bd > 90°$, weil $BCd > 90°$ (528. §), welches nicht zusammen bestehen kann. Wenn A sowohl als auch ACB stumpf, also $BCd < 90°$ wäre, so würde ein ähnlicher Widerspruch folgen. Demnach fällt das Perpendicul nothwendig innerhalb des Dreyecks. 212 Fig.

Wenn beyde Winkel *A* und *ACB* von verschiedener Art sind: so fällt das Perpendicul ausserhalb des Dreyeckes. Denn es sey $A < 90°$, und $ACB > 90°$, also $BCD < 90°$. Es sey überdem nicht BD, sondern *Bd* auf AC senkrecht: so wäre $Bd < 90°$, weil $A < 90°$, und zugleich $Bd > 90°$, weil $ACB > 90°$ (528. §), welches wiederum mit sich selbst streitet. Also fällt nun das Perpendicul nothwendig ausserhalb des Dreyecks. 213 Fig.

541. §.

Wenn *BD* auf der Grundlinie *AC* senkrecht steht: so verhalten sich die Sinus der beyden Stücke der Grundlinie umgekehrt, wie die Tangenten der anliegenden Winkel: die Cosinus der beyden Stücke der Grundlinie aber verhalten sich, wie die Cosinus der anliegenden Seiten. 212 213 Fig.

Be-

Beweis. Denn es ist $r : \sin AD = \text{tang } A : \text{tang } BD$, und $r : \sin CD = \text{tang } C : \text{tang } BD$ (527. §); also $\sin AD \text{ tang } A = \sin CD \text{ tang } C$, und $\sin AD : \sin CD = \text{tang } C : \text{tang } A$ (199. §). Ferner ist $r : \cos BD = \cos AD : \cos AB$, und $r : \cos BD = \cos CD : \cos BC$ (530. §); also $\cos AD : \cos AB = \cos CD : \cos BC$, oder $\cos AD : \cos CD = \cos AB : \cos BC$.

542. §.

212 213 Fig. Wenn BD auf der Grundlinie AC senkrecht steht; so verhalten sich die Sinus der beyden Winkel an der Spitze B, wie die Cosinus der Winkel an der Grundlinie: die Cosinus der beyden Winkel an der Spitze B aber umgekehrt wie die Tangenten der anliegenden Seiten.

Beweis. Es ist nemlich $r : \cos BD = \sin ABD : \cos A$, und $r : \cos BD = \sin CBD : \cos C$ (530. §.), also wird $\sin ABD : \cos A = \sin CBD : \cos C$, oder auch $\sin ABD : \sin CBD = \cos A : \cos C$. Ferner ist $r : \text{cot } BD = \cos ABD : \text{cot } AB$, und $r : \text{cot } BD = \cos CBD : \text{cot } BC$ (534. §.), also $\cos ABD : \text{cot } AB = \cos CBD : \text{cot } BC$, oder $\cos ABD : \cos CBD = \text{cot } AB : \text{cot } BC$, oder auch $\cos ABD : \cos CBD = \text{tang } BC : \text{tang } AB$ (417. §. n. 2).

543. §.

Aus diesen Proportionen läßt sich die Auflösung aller Fälle, welche bey den schiefwinklichten Dreyecken vorkommen können, herleiten, die man zum voraus auf folgende Art übersehen kann. Man sucht entweder einen Winkel, oder eine Seite, und in beyden Fällen müssen drey Stücke gegeben seyn.

I) Wird also ein Winkel gesucht, so können gegeben seyn
   A. Alle drey Seiten,
   B. zwo Seiten, und ein Winkel. Also
      a) zwo Seiten, die den gegebenen Winkel einschliessen,
      b) zwo Seiten, die den gesuchten Winkel einschliessen,
      c) zwo Seiten, die den dritten Winkel einschliessen.
   C. Eine Seite, und zweene Winkel. Also
      α) die Seite zwischen den gegebenen Winkeln
      β) die Seite zwischen einem gegebenen und dem gesuchten Winkel.

II) Wird eine Seite gesucht, so sind gegeben
   A. Alle drey Winkel,
   B. zweene Winkel, und eine Seite. Also
      a) zweene Winkel an der gegebenen Seite,
      b) zweene Winkel an der gesuchten Seite,
      c) zweene Winkel an der dritten Seite.
   C. Ein Winkel, und zwo Seiten. Also
      α) der Winkel zwischen den gegebenen Seiten,
      β) der Winkel zwischen einer gegebenen, und der gesuchten Seite.

544. §.

Es werden gegeben zwo Seiten *AB*, *BC*, und ein Winkel *A*, der einer Seite *BC* gegenüberstehet: man sucht den Winkel *C*, welcher der andern gegebenen Seite *AB* entgegen stehet (543. §. n. I. litt. c.)

212 Aufl. Man schliesse nach dem 539. §. $\sin BC : \sin A = \sin AB : \sin C$; also wird $\sin C = \frac{\sin AB \sin A}{\sin BC}$,

213 Fig.

und eben so $\sin B = \frac{\sin AC \sin A}{\sin BC}$, $\sin A = \frac{\sin BC \sin B}{\sin AC}$.

Der gesuchte Winkel kann hier stumpf oder spitz seyn, und er wird durch die gegebenen Stücke allein nicht weiter bestimmt (514. §).

545. §.

Es werden zweene Winkel *A*, *B* und eine Seite *BC* gegeben, die einem Winkel gegenüberstehet; mann soll die dem andern Winkel gegenüberstehende Seite *AC* finden (543. §. n, II. litt. c.)

Aufl. Es ist $\sin A : \sin BC = \sin B : \sin AC$, also $\sin AC = \frac{\sin BC \sin B}{\sin A}$. Eben so ist auch $\sin AB = \frac{\sin BC \sin C}{\sin A}$, und $\sin BC = \frac{\sin AC \sin A}{\sin B}$.

Die gesuchte Seite kann auch hier grösser oder kleiner als 90° seyn, und welches von beyden statt habe, wird durch die gegebenen Stücke allein nicht bestimmt (514. §).

546. §.

In jedem sphärischen Dreyeck *ABC* ist $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\sin AB \sin AC}$, und $\sin \frac{1}{2} A =$

$\sqrt{}$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(BC + AB - AC)\sin\frac{1}{2}(BC + AC - AB)}{\sin AB \sin AC},$$

wenn der ganze Sinus = 1 ist.

Beweis. 1. Wenn der Bogen BD auf AC senkrecht ist, so hat man $\cos CD = \frac{\cos BC \cos AD}{\cos AB}$; (541. §.) aber auch $\cos CD = \cos(AC - AD) = \cos AC \cos AD + \sin AC \sin AD$ (423. §.): also ist

$$\cos AC \cos AD + \sin AC \sin AD = \frac{\cos BC \cos AD}{\cos AB},$$

oder $\cos AC + \sin AC \operatorname{tang} AD = \frac{\cos BC}{\cos AB}$, und

$$\operatorname{tang} AD = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\cos AB \sin AC}.$$ Ferner ist

$$\operatorname{tang} AD = \cos A \operatorname{tang} AB \text{ (534. §.)} = \frac{\cos A \sin AB}{\cos AB}.$$

Also wird $\cos A \sin AB = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\sin AC}$,

und $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\sin AB \sin AC}$.

2. Nun ist vermöge des 425. §. $\sin\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{1 - \cos A}{2}}$. Also erhält man $2\sin\frac{1}{2}A^2 = 1 - \cos A$

$$= \frac{\sin AB \sin AC - \cos BC + \cos AB \cos AC}{\sin AB \sin AC} =$$

$$\frac{\cos(AB - AC) - \cos BC}{\sin AB \sin AC}$$ (423. §). Es sey

$AB - AC = \vartheta$, und $BC = \eta$; so ist $2\sin\frac{1}{2}A^2 =$

$\cos\vartheta$

$\frac{\cos\vartheta - \cos\eta}{\sin AB \sin AC}$, oder $\sin\frac{1}{2}A^2 = \frac{\sin\frac{1}{2}(\eta+\vartheta)\sin\frac{1}{2}(\eta-\vartheta)}{\sin AB \sin AC}$ (451. §). Weil nun vermöge der Voraussetzung $\eta+\vartheta = BC+AB-AC$, und $\eta-\vartheta = BC+AC-AB$: so wird $\sin\frac{1}{2}A =$

$$\sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(BC+AB-AC)\sin\frac{1}{2}(BC+AC-AB)}{\sin AB \sin AC}}.$$

547. §.

Im sphärischen Dreyeck *ABC* sind die drey Seiten gegeben, man sucht einen Winkel *A* (543. §. n. I. litt. A).

Aufl. Die am Ende des vor. §. gefundene Gleichung giebt $\sin\frac{1}{2}A^2 =$

$$\frac{\sin\frac{1}{2}(BC+AB-AC)\sin\frac{1}{2}(BC+AC-AB)}{\sin AB \sin AC}.$$ Wenn man also die Sinus der Tafeln für den Halbmesser $r = 10000000$ braucht: so giebt dies die Proportion $\sin AB \sin AC : \sin\frac{1}{2}(BC+AB-AC)\sin\frac{1}{2}(BC+AC-AB) = rr : \sin\frac{1}{2}A^2$, woraus also $l\sin\frac{1}{2}A^2$, ferner $l\sin\frac{1}{2}A$, und $\frac{1}{2}A$ selbst, also auch A gefunden werden kann.

Weil niemals $A > 180°$ ist (506. §.); so ist nie $\frac{1}{2}A > 90°$, und man muß daher allemahl den spitzen Winkel nehmen, der dem $\sin\frac{1}{2}A$ zugehört.

548. §.

214 Fig. Im sphärischen Dreyeck ABC ist $\cos AB = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$, und $\cos\frac{1}{2}AB =$

$$\sqrt{\frac{\cos\frac{1}{2}(C+B-A)\cos\frac{1}{2}(C+A-B)}{\sin A \sin B}}.$$

Be

Beweis. Man verzeichne das Dreyeck *abc*, dessen Seiten die Winkel des Dreyecks ABC, und dessen Winkel die Seiten des Dreyecks ABC zu 180° ergänzen (518. §.), so hat man aus dem (546. §.)

$$\cos a = \frac{\cos bc - \cos ab \cdot \cos ac}{\sin ab \sin ac}.$$

Es ist aber	folglich
$AB + a = 180°$	$\cos a = -\cos AB$
$C + bc = 180°$	$\cos bc = -\cos C$
$B + ab = 180°$	$\cos ab = -\cos B$
$A + ac = 180°$	$\sin ab = +\sin B$
	$\cos ac = -\cos A$
	$\sin ac = +\sin A$

also erhält man

$$-\cos AB = \frac{-\cos C - \cos A \cos B}{\sin A \sin B},$$

$$\text{oder } \cos AB = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}.$$

Weil nun $\cos \frac{1}{2} AB = \sqrt{\frac{1 + \cos AB}{2}}$ (425. §.):

so wird $2\cos \frac{1}{2} AB^2 = 1 + \cos AB =$

$$\frac{\sin A \cdot \sin B + \cos C + \cos A \cdot \cos B}{\sin A \sin B} = \frac{\cos(A - B) + \cos C}{\sin A \sin B}$$

$$(423.\ §.) = \frac{2\cos \frac{1}{2}(C + A - B) \cos \frac{1}{2}(C + B - A)}{\sin A \sin B}$$

(451. §.), und dieserwegen $\cos \frac{1}{2} AB =$

$$\sqrt{\frac{\cos \frac{1}{2}(C + A - B) \cos \frac{1}{2}(C + B - A)}{\sin A \sin B}}.$$

549. §.

Im sphärischen Dreyeck sind alle drey Winkel gegeben, man soll eine Seite finden (543. §. n. II. litt. A.)

Aufl. Aus der Gleichung $\frac{\cos\frac{1}{2}AB^2 = \cos\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C+B-A)}{\sin A \sin B}$ folgt die Proportion $\sin A \sin B : \cos\frac{1}{2}(C+A-B)\cos\frac{1}{2}(C+B-A) = rr : \cos\frac{1}{2}AB^2$, wo r den Halbmesser der Tafeln bedeutet. Hieraus findet man $l\cos\frac{1}{2}AB^2$, also auch $l\cos\frac{1}{2}AB$, woraus sich denn $\frac{1}{2}AB$, und ferner AB selbst ergiebt. Da AB nie grösser als 180° ist; so wird $\frac{1}{2}AB$ nie grösser, als 90°, obgleich wegen der Zweydeutigkeit des Wurzelzeichens durch $\frac{1}{2}AB$ hier auch ein Bogen, der grösser als ein Quadrant wäre, verstanden werden könnte.

550. §.

212 Es sind zwo Seiten *AB*, *AC*, nebst dem
213 eingeschlossenen Winkel gegeben, man soll die
Fig. dritte Seite *BC* finden (543. §. n. II. litt. α.)

I. Aufl. Aus der Gleichung $\cos A = \frac{\cos BC - \cos AB \cos AC}{\sin AB \sin AC}$ (546. §.) erhält man

$\cos BC = \cos AB \cos AC + \cos A \sin AB \sin AC.$

II. Aufl. Bey der arithmetischen Auflösung dieser und der folgenden Aufgaben, wenn man keine Gleichung findet, die eine für die Rechnung mit den Logarithmen vortheilhafte Form hat, beobachtet man die nachstehende allgemeine Regel.

Man ziehet von der Spitze eines Winkels auf die entgegengesetzte Seite einen senkrech-

ter

en Bogen, und wählt diesen Winkel so, daß eines von den beyden rechtwinklichten Dreyecken, welche man dadurch erhält, zwey von den gegebenen Stücken enthalte, um die übrigen Stücke desselben daraus zu finden. Hiemit verbindet man ferner die im 541. und 542. §. erwiesenen Proportionen, und wählt eine davon so, daß in die drey ersten Stellen schon bekannte Bogen oder Winkel kommen, in die vierte Stelle aber entweder das gesuchte selbst, oder ein Bogen oder Winkel, woraus das gesuchte durch eine leichte Addition oder Subtraction gefunden werden kann.

Bey Auflösung der hier vorgelegten Aufgabe fälle man aus B auf AC den senkrechten Bogen BD, so wird $CD = CA \pm AD$, und im rechtwinklichten Dreyeck ABD sind AB und A gegeben: also kann man AD finden aus der Proportion:

$$r : \cos A = \tang AB : \tang AD \text{ (537. §.)}$$

Wenn nun A und AB beyde kleiner, oder beyde grösser, als 90° sind; so wird in beyden Fällen AD kleiner als 90° seyn, da man dann leicht beurtheilt, ob D zwischen A und C, oder über C hinaus falle. Es ist nemlich $CD = CA - AD$, also fällt D zwischen A und C, wenn $AD < CA$, und über C hinaus, wenn $AD > CA$ ist. Wenn dagegen von A und AB das eine kleiner und das andre grösser als 90° ist; so wird $AD > 90°$ und man beurtheilet eben so, wohin der Punct D falle.

Nachdem auf diese Art AD ist gefunden worden, schliesse man $\cos AD : \cos CD = \cos AB : \cos BC$ (541. §.), so wird auch BC gefunden. Es ist aber

BD kleiner oder grösser als 90°, nachdem es A ist. Wenn also CD und A beyde kleiner, oder beyde grösser als 90° sind; so ist BC kleiner als 90°; wenn aber eins von beyden kleiner, das andre grösser als 90° ist; so wird BC > 90° seyn. (531 §.)

551. §.

Es sind wiederum zwo Seiten gegeben
212 nebst dem eingeschlossenen Winkel: man soll
Fig. einen von den übrigen beyden Winkeln finden
(543. §. n. I. litt. a)

Aufl. Wenn A, AB, AC gegeben sind, und B gesucht wird; so setze man $BC = \alpha$, $AC = \beta$, $AB = \gamma$.

Nun hat man aus dem 546. §.

$$\text{I)}\ \cos B = \frac{\cos\beta - \cos\gamma \cdot \cos\alpha}{\sin\gamma \cdot \sin\alpha}$$

$$\text{II)}\ \cos A = \frac{\cos\alpha - \cos\gamma \cdot \cos\beta}{\sin\gamma \cdot \sin\beta}$$

$$\text{und III)}\ \sin\alpha = \frac{\sin\beta \cdot \sin A}{\sin B}\ (539.\ §.).$$

Aus diesen dreyen Gleichungen kann man cos und $\sin\alpha$ wegschaffen: so erhält man eine Gleichun zwischen A, β, γ, und B.

Es wird nemlich

$$\text{I)}\ \cos\alpha = \frac{\cos\beta - \cos B \sin\gamma \sin\alpha}{\cos\gamma},$$

$$\text{und II)}\ \cos\alpha = \cos\gamma\cos\beta + \cos A \sin\gamma \sin\beta:$$

$$\text{also}\ \cos\gamma\cos\beta + \cos A \sin\gamma \sin\beta = \frac{\cos\beta - \cos B \sin\gamma \sin\alpha}{\cos\gamma}$$

ob

oder $\cos\gamma^2 \cos\beta + \cos A \sin\gamma \cos\gamma \sin\beta = \cos\beta - \cos B \sin\gamma \sin\alpha$.

Man setze $\cos\gamma^2 = 1 - \sin\gamma^2$ (405. §.) so wird

$\cos A \sin\gamma \cos\gamma \sin B = \cos\beta \sin\gamma^2 - \cos B \sin\gamma \sin\alpha$,

also $\cos A \cos\gamma \sin\beta = \cos\beta \sin\gamma - \cos B \sin\alpha$.

Man setze ferner $\sin\alpha = \frac{\sin\beta \sin A}{\sin B}$, so hat man

$\cos A \cos\gamma \sin\beta = \cos\beta \sin\gamma - \sin\beta \sin A \cot B$,

also $\cot B = \frac{\cos\beta \sin\gamma - \cos A \cos\gamma \sin\beta}{\sin\beta \sin A}$,

und $\tang B = \frac{\sin\beta \sin A}{\cos\beta \sin\gamma - \cos A \cos\gamma \sin\beta}$,

d. i. $\tang B = \frac{\sin AC \sin A}{\cos AC \sin AB - \cos A \cos AB \sin AC}$.

Wenn C der gesuchte Winkel wäre, so würde man eben so

$\tang C = \frac{\sin AB \sin A}{\cos AB \sin AC - \cos A \cos AC \sin AB}$,

oder $\text{tg. } C = \frac{\sin\gamma \sin A}{\cos\gamma \sin\beta - \cos A \cos\beta \sin\gamma}$ finden, weil sich in Ansehung des gesuchten Winkels nur anliegende und gegenüberstehende Seiten verwechseln. Bey der vorhin geführten Rechnung kann die Gleichung $\cos C = \frac{\cos\gamma - \cos\beta \cos\alpha}{\sin\beta \sin\alpha}$ anstatt der Gleichung n. I. gebraucht werden, so ergiebt sich die Formul für $\tang C$, wenn auch III) $\sin\alpha = \frac{\sin\gamma \sin A}{\sin C}$ gesetzt wird.

II. Aufl. Wenn A mit den anliegenden Seiten gegeben ist, und der Winkel C gesucht wird; so fey aus des dritten Winkels B Spitze der Bogen BD auf AC senkrecht gezogen: alsdenn hat man im rechtwinklichten Dreyeck ADB die Hypothenuse AB nebst dem anliegenden Winkel A, woraus AD nach der Proportion gefunden wird

$$r : \text{col}A = \text{tang}AB : \text{tang}AD \text{ (537. §.)}$$

wo AD gröſſer als 90° zu nehmen ist, nachdem von A und AB nur eins kleiner, das andre gröſſer ist als 90°, im Gegentheil aber ist AD < 90°.

Ferner wird CD = CA − AD, also CD negativ, wenn AD > CA ist, und nun erhält man den Winkel C aus der Proportion $\sin CD : \sin AD = \text{tang}A : \text{tang}BCD$ (541. §.), wo A und BCD allemahl von
213 einerley Art sind. Wenn aber AD > CA ist, so ist
Fig. eigentlich BCA der gesuchte Winkel, des vorigen BCD Ergänzung zu 180°; und man weis auch aus dem 540. §., daß in diesem Fall A und BCA von verschiedener Art seyn müssen.

Wenn man anstatt des Winkels ACB den Winkel ABC suchen wollte; so müßte man aus C den Bogen CE auf AB senkrecht ziehen. Das würde ein rechtwinklichtes Dreyeck ACE geben, worin AE gefunden werden kann, weil A und AC bekannt sind. Aus AE würde man hiernächst BE, und daraus weiter ABC finden. Sobald aber nur einer von diesen Winkeln gefunden ist, hat man nicht weiter nöthig, den andern auf eben dem Wege zu suchen, weil derselbe nun vermittelst der Proportion

$$\sin AB : \sin ACB = \sin AC : \sin ABC$$

kürzer gefunden wird.

552. §.

Es sind zweene Winkel gegeben, und eine Seite, die zwischen den beyden Winkeln liegt, man soll den dritten Winkel finden (543. §. n. Fig. I. litt. α) 212 213

I. Aufl. Wenn A, B, AB gegeben sind, und C gesucht wird; so hat man die Gleichung $\cos AB = \frac{\cos C + \cos A \cos B}{\sin A \sin B}$ (548. §.), und daraus folgt 212 Fig.

$$\cos C = \sin A \sin B \cos AB - \cos A \cos B.$$

II. Aufl. Wenn man aus B auf AC den Bogen BD senkrecht setzt, so erhält man statt des Winkels B zweene andre, ABD, CBD, und es wird CBD = CBA − ABD. Den Winkel ABD giebt die Proportion

$$\cot A : r = \cos AB : \cot ABD \text{ (536. §.)}$$

Ferner hat man

$$\sin ABD : \sin CBD = \cos A : \cos BCD \text{ (542. §.)}$$

wo A und BCD wiederum allemahl von einerley Art sind, nur in dem Fall, wenn ABD > CBA ist, wird eigentlich ACB = 180° − BCD gesucht. 213 Fig.

553. §.

Es ist wiederum eine Seite nebst den beyden anliegenden Winkeln gegeben: man sucht eine von den übrigen Seiten (543. §. n. II. litt. a).

I. Aufl. Wenn wiederum A, B, und AB = γ gegeben sind, und BC = α gesucht wird; so hat man folgende drey Gleichungen: 212 213 Fig.

$$\text{I) } \cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$$

$$\text{II)}\ \cos\gamma = \frac{\cos C + \cos A\ \cos B}{\sin A\ \sin B}\ \text{(548. §.)}$$

$$\text{III)}\ \sin C = \frac{\sin A\ \sin\gamma}{\sin\alpha}\ \text{(539. §.)}$$

wo $BC = \alpha$ ist, wie im 551. §. Aus diesen Gleichungen schaffe man $\cos C$, und $\sin C$ weg: so erhält man eine Gleichung zwischen A, B, α und γ. Es wird aber

$$\text{I)}\ \cos C = \frac{\cos\alpha \sin B \sin C - \cos A}{\cos B},$$

$$\text{II)}\ \cos C = \cos\gamma\ \sin A \sin B - \cos A\ \cos B,$$

$$\text{also}\ \frac{\cos\alpha \sin B \sin C - \cos A}{\cos B} = \cos\gamma \sin A\ \sin B$$

$$- \cos A\ \cos B$$

Hieraus folgt,

$$\cos\alpha \sin B \sin C - \cos A = \cos\gamma \sin A \sin B \cos B$$

$$- \cos A\ \cos B^2, \text{ also ferner}$$

$$\cos\alpha \sin B \sin C = \cos\gamma \sin A \sin B \cos B + \cos A$$

$\sin B^2$, wenn $\sin B^2$ anstatt $1 - \cos B^2$ gesetzt wird, oder $\cos\alpha \sin C = \cos\gamma \sin A \cos B + \cos A \sin B$. Nun setze man $\sin C = \frac{\sin A \sin\gamma}{\sin\alpha}$, so wird

$$\cot\alpha \sin A \sin\gamma = \cos\gamma \sin A \cos B + \cos A \sin B,$$

$$\text{und}\ \cot\alpha = \frac{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos\gamma}{\sin A \sin\gamma},$$

$$\text{oder}\ \tang\alpha = \frac{\sin A \sin\gamma}{\cos A \sin B + \sin A \cos B \cos\gamma}.$$

Will man anstatt $BC = \alpha$ die Seite $AC = \beta$ für die gesuchte annehmen, so verwechseln sich in Ansehung dieser Seite nur der anliegende und gegenüber-

stehen-

stehende Winkel: also ist tang $\beta = \frac{\sin B \sin \gamma}{\cos B \sin A + \sin B \cos A \cos \gamma}$. Anstatt der Gleichung n. I. kann man $\cos \beta = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$, und anstatt n. III. die Gleichung $\sin C = \frac{\sin B \sin \gamma}{\sin \beta}$ in Rechnung bringen, so wird die angezeigte Gleichung für tang B gefunden.

II. Aufl. Es sey der Bogen BD auf der dritten Seite AC senkrecht, so hat man

$\cot A : r = \cos AB : \cot ABD$ (536. §).

Ferner $CBD = CBA - ABD$, und $\cos CBD : \cos ABD = \tang AB : \tang BC$ (542. §). Wenn BD und CD, folglich A und CBD (528. §.) von einerley Art sind: so ist $BC < 90°$, widrigenfalls aber grösser als $90°$ (531. §).

554. §.

Es sind zwo Seiten gegeben, und ein Winkel, der einer Seite entgegensteht; man soll die dritte Seite finden (543. §. n. II. litt. β.) 212 213 Fig.

1. Aufl. Wenn $BC = \alpha$, $AC = \beta$, mit dem Winkel A gegeben sind, und $AB = \gamma$ gesucht wird; so kann man allemahl auch B als gegeben ansehen, weil $\sin B = \frac{\sin A \sin \beta}{\sin \alpha}$ ist.

Nun hat man aus dem 551. §.

I) $\tang B = \frac{\sin B}{\cos B} = \frac{\sin A \sin \beta}{\cos \beta \sin \gamma - \cos A \cos \gamma \sin \beta}$

II) $\tang A = \frac{\sin A}{\cos A} = \frac{\sin B \sin \alpha}{\cos \alpha \sin \gamma - \cos B \cos \gamma \sin \alpha}$:

und daraus folgt

I) $\sin B \cos\beta \sin\gamma - \sin B \cos A \cos\gamma \sin\beta = \sin A \sin\beta \cos B$

II) $\sin A \cos\alpha \sin\gamma - \sin A \cos B \cos\gamma \sin\alpha = \sin B \sin\alpha \cos A$.

Man multiplicire die erste Gleichung mit $\cos A$, die zweyte mit $\cos B$, und subtrahire die letzte von der ersten; so wird $\cos A \sin B \cos\beta \sin\gamma - \cos B \sin A \cos\alpha \sin\gamma + \sin A \cos B^2 \cos\gamma \sin\alpha - \sin B \cos A^2 \cos\gamma \sin\beta = (\sin A \sin\beta - \sin B \sin\alpha) \cos A \cos B = 0$, weil $\sin A \sin\beta = \sin B \sin\alpha$ (539. §): also ist

$(\sin A \cos B^2 \sin\alpha - \sin B \cos A^2 \sin\beta) \cos\gamma = (\cos B \sin A \cos\alpha - \cos A \sin B \cos\beta) \sin\gamma$.

Ferner findet man $\sin A \cos B^2 \sin\alpha = \sin A \sin\alpha (1 - \sin B^2)$, $\sin B \cos A^2 \sin\beta = \sin B \sin\beta (1 - \sin A^2)$, und die Differenz ist $\sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta$, weil $\sin B \sin\beta \sin A^2 = \sin A \sin\alpha \sin B^2 = \sin B \sin A (\sin\beta \sin A - \sin\alpha \sin B) = 0$ war: also erhält man $(\sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta) = (\cos B \sin A \cos\alpha - \cos A \sin B \cos\beta) \sin\gamma$, und daraus folgt

$$\frac{\sin\gamma}{\cos\gamma} = \tan g\,\gamma = \frac{\sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta}{\cos B \sin A \cos\alpha - \cos A \sin B \cos\beta}.$$

Nimmt man $AB = \gamma$, $BC = \alpha$ mit dem Winkel A als gegeben, und $AC = \beta$ für die gesuchte Seite an, so verwechseln sich nur die Seiten β und γ, und man findet

$$\tan g\,\beta = \frac{\sin A \sin\alpha - \sin C \sin\gamma}{\cos C \sin A \cos\alpha - \cos A \sin C \cos\gamma}.$$

Eben diese Formul wird gefunden wenn man anstatt der n. l. für tang B gebrauchten Gleichung die Formul

$$\text{mul tang } C = \frac{\sin\gamma \sin A}{\cos\gamma \sin\beta - \cos A \cos\beta \sin\gamma}$$

(451. §.) anwendet: da dann zugleich C als gegeben angesehen wird, weil $\sin C = \frac{\sin\gamma \sin A}{\sin\alpha}$ ist.

II. Aufl. Wenn A, AB, und BC gegeben sind, und AC gesucht wird, so fälle man aus B auf AC den senkrechten Bogen BD, und man hat im rechtwinklichten Dreyeck BAD die Proportion $r : \cos A = \text{tang AB tang AD}$ (537. §). Ferner hat man $\cos AB : \cos BC = \cos AD : \cos CD$ (541. §.), und aus AD und CD wird $AC = AD \pm DC$ gefunden. Wofern also $BC < AB$, folglich $DC < AD$ ist, so wird AC nicht bestimmt, und man kann sowohl $AC = AD + DC$, als auch $AC = AD - DC$ für die gesuchte Seite nehmen (514. §). Wäre aber $BC > AB$, also auch $DC > AD$, so wird $AB = AD + DB$ gefunden.

555. §.

Es sind zweene Winkel, und eine Seite gegeben die einem Winkel entgegen steht, man sucht den dritten Winkel (443. §. n. I. litt. β.)

I. Aufl. Es sey gegeben A, B, und α, man sucht C. In diesem Fall kann man wiederum β als gegeben ansehen, weil $\sin\beta = \frac{\sin\alpha \sin B}{\sin A}$ ist. Es wird aber aus dem 548. §.

I) $\cos\beta = \frac{\cos B + \cos A \cos C}{\sin A \sin C}$,

II) $\cos\alpha = \frac{\cos A + \cos B \cos C}{\sin B \sin C}$ gefunden,

und

und das giebt

I) $\sin A \sin C \cos\beta - \cos A \cos C = \cos B$

II) $\sin B \sin C \cos\alpha - \cos B \cos C = \cos A$

Wenn die erste Gleichung mit $\cos A$, die andre mit $\cos B$ multiplicirt, und hiernächst die erste von der letzten subtrahirt wird, so giebt das

$$(\sin B \cos B \cos\alpha - \sin A \cos A \cos\beta) \sin C + (\cos A^2 - \cos B^2) \cos C = 0,$$

und daraus folgt

$$\frac{\sin C}{\cos C} = \operatorname{tang} C = \frac{\cos B^2 - \cos A^2}{\sin B \cos B \cos\alpha - \sin A \cos A \cos\beta}$$

$$= \frac{\sin A^2 - \sin B^2}{\sin B \cos B \cos\alpha - \sin A \cos A \cos\beta} =$$

$$\frac{(\sin A^2 : \sin B) - \sin B}{\cos B \cos\alpha - (\sin A : \sin B) \cos A \cos\beta}.$$

Ferner ist $\sin A : \sin B = \sin\alpha : \sin\beta$; also erhält man

$$\operatorname{tang} C = \frac{(\sin A \sin\alpha : \sin\beta) - \sin B}{\cos B \cos\alpha - (\sin\alpha : \sin\beta) \cos A \cos\beta}, \text{ oder}$$

$$\operatorname{tang} C = \frac{\sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta}{\cos B \cos\alpha \sin\beta - \cos A \sin\alpha \cos\beta}.$$

Wenn man die Winkel A und C mit der Seite $BC = \alpha$ als gegeben, und den Winkel B für den gesuchten annimmt; so verwechseln sich nur die Winkel B und C, und man findet $\operatorname{tang} B =$

$$\frac{\sin A \sin\alpha - \sin C \sin\gamma}{\cos C \cos\alpha \sin\gamma - \cos A \sin\alpha \cos\gamma} : \text{ da dann } \gamma$$

aus der Gleichung $\sin\gamma = \frac{\sin\alpha \sin C}{\sin A}$ bekannt ist.

212 II. Aufl. Es sey A, C, und BC gegeben, man
213 Esucht B. In dieser Absicht sey der Bogen BD auf
AC

AC senkrecht gesetzt, so wird BD innerhalb des Dreyeckes fallen, wenn die Winkel A und C von einerley Art sind (540. §). Nun hat man im rechtwinklichten Dreyeck BCD die Proportion

$$\cot C : \operatorname{col} BC = r : \cot CBD \text{ (536. §.)}$$

und überdem

$$\operatorname{col} C : \operatorname{col} A = \sin CBD : \sin ABD \text{ (542. §).}$$

Wenn also C und A von einerley Art sind; so wird $B = ABD + DBC$, im Gegentheil aber $B = ABD - DBC$.

556. §.

Es sind zwo Seiten gegeben, und ein Winkel, der einer Seite entgegen stehet, man soll den Winkel finden, den beyde Seiten einschliessen (543. §. n. I. litt. b.)

I. Aufl. Wenn α, β, B gegeben sind, und C gesucht wird; so kann man auch A als gegeben ansehen, weil $\sin A = \frac{\sin B \sin \alpha}{\sin \beta}$. Dann aber giebt die im vor. 555. §. gefundene Gleichung die Auflösung eben dieser Aufgabe: es ist nemlich

$$\operatorname{tang} C = \frac{\sin A \sin \alpha - \sin B \sin \beta}{\sin \beta \operatorname{col} \alpha \operatorname{col} B - \sin \alpha \operatorname{col} \beta \operatorname{col} A}.$$

Nimmt man α, γ, C, als gegeben, und B als das gesuchte an; so ist auch $\operatorname{tang} B =$

$$\frac{\sin A \sin \alpha - \sin C \sin \gamma}{\operatorname{col} C \operatorname{col} \alpha \sin \gamma - \operatorname{col} A \sin \alpha \operatorname{col} \gamma}.$$

II. Aufl. Wenn A, AB, BC gegeben sind und B oder ABC gesucht wird; so sey BD auf AC senkrecht, und man hat im rechtwinklichten Dreyeck ADB 212 213 Fig.

$$\cot A : \operatorname{col} AB = r : \cot ABD \text{ (536. §).}$$

Hier-

Hierauf schließt man weiter aus dem 542. §.

tang BC : tang AB = cos ABD : cos DBC.

Wenn nun BC < AB ist; so bleibt B = ABD ± DBC unbestimmt: aber wenn BC > AB ist; so wird B = ABD + DBC gefunden.

557. §.

Es sind zweene Winkel gegeben, und eine Seite, die einem Winkel gegenüber stehet; man sucht die Seite zwischen den gegebenen Winkeln (543. §. n. I. litt. b.)

I. Aufl. Es sind gegeben A, B, und β, man sucht γ. Weil $\sin\alpha = \frac{\sin\beta \sin A}{\sin B}$ ist, so sieht man auch hier die Seite α als gegeben an, und dann ist aus dem 554. §.

$$\tang\gamma = \frac{\sin A \sin\alpha - \sin B \sin\beta}{\sin A \cos B \cos\alpha - \cos A \sin B \cos\beta},$$

Wären A, C, und γ gegeben, die Seite β = AC aber die gesuchte; so wäre auch $\sin\alpha = \frac{\sin\gamma \sin A}{\sin C}$ gegeben, und man würde

$$\tang\beta = \frac{\sin A \sin\alpha - \sin C \sin\gamma}{\cos C \sin A \cos\alpha - \cos A \sin C \cos\gamma}$$ finden.

212 II. Aufl. Wenn A, C, und AB gegeben sind:
213 so sey BD auf AC senkrecht, und man hat
Fig. $r : \cos A = \tang AB : \tang AD$ (537. §).

Ferner kann man ansetzen

tang C : tang A = sin AD : sin CD (541. §).

Nachdem nun A und B von einerley oder verschiedener Art sind: nachdem wird AC = AD + DC, oder AC = AD − DC (540. §.) gefunden.

Der

Der XXV. Abschnitt.

Allgemeine Theorie von den eckigten Körpern.

558. §.

Ein Körper, der von lauter ebenen Flächen auf allen Seiten eingeschlossen ist, heißt ein eckigter Körper, und die graden Linien, worin diese Ebenen einander schneiden, sind zugleich die Seitenlinien des Körpers. Auf der Oberfläche eines solchen Körpers muß es Puncte geben, durch welche mehr, als zwo Seitenflächen geführt sind (299. §.): diese Puncte sind alsdenn zugleich die Spitzen körperlicher Ecken auf der Oberfläche des Körpers, wovon er den Nahmen eines eckigten Körpers führt.

559. §.

Die Anzahl aller Winkel auf der Oberfläche eines eckigten Körpers ist wenigstens dreymahl so groß, als die Anzahl aller Ecken des Körpers. Denn zu jeder Ecke gehören wenigstens drey Winkel als Seitenflächen. Ist also die Anzahl der Winkel $= w$, die Anzahl der Ecken $= a$, so ist w nie kleiner als $3a$; aber $w = 2l$, wenn l die Anzahl der Seitenlinien ist, (301. §.) also $2l$ nie kleiner als $3a$.

560. §.

Ein Körper kann nicht weniger als vier Ecken haben. Denn drey Ebenen können zwar eine Ecke,

aber

aber noch keinen Körper einschliessen (299. §.): es muß wenigstens eine vierte Ebene hinzu kommen, welche alle drey Seitenflächen dieser Ecke; und zugleich alle drey Seitenlinien derselben schneidet. Auf solche Art ergiebt sich an jeder Seitenlinie eine Ecke, und also erhält man mit der ersten zusammen in allen vier dreyseitige Ecken, und der Körper, welcher auf solche Art herausgebracht wird, ist eine dreyseitige Pyramide.

561. §.

In einer jeden Pyramide ist die Anzahl der Seitenlinien zweymahl so groß, als die Anzahl der Seitenlinien der Grundfläche. Denn es geht von der Spitze eines jeden Winkels der Grundfläche eine Seitenlinie der Pyramide bis zu ihrer Spitze, und die Grundfläche hat so viele Winkel, als Seitenlinien. (31. §.)

1. Zusatz. Die Anzahl der Seitenflächen, (die Grundfläche mitgerechnet, welche in der Folge als eine Seitenfläche allemahl mit verstanden wird) ist in jeder Pyramide eben so groß, als die Anzahl der Ecken, nemlich um eins grösser; als die Anzahl der Seitenlinien oder Winkel der Grundfläche. Es liegt nemlich an jedem Winkel der Grundfläche eine Ecke, und hiezu kommt die Ecke an der Spitze der Pyramide.

2. Zusatz. Wenn also die Anzahl der Ecken $= a$, der Seitenflächen $= h$, der Seitenlinien $= l$, und die Anzahl der Seitenlinien der Grundfläche $= m$ gesetzt wird: so ist $a = m + 1$, $h = m + 1$, also $a + h = 2m + 2$. Aber $l = 2m$, also $a + h = l + 2$, und $l = a + h - 2$.

562.

562. §.

Wenn man an der Pyramide ABCDEF eine andre ADEGH so anlegt, daß ein paar Seitenflächen dieser Pyramiden in ADE zusammen fallen, so behält der dadurch zu Stande gebrachte Körper ABCDHGEF eben die Eigenschaft, daß $l = a + h - 2$ ist. Denn ist m die Anzahl der Seiten der Grundfläche DEGH, so kommen hiedurch $2m$ Seitenlinien zu der vorigen Anzahl hinzu, und es werden die drey Seitenlinien der gemeinschaftlichen Seitenfläche ADE nur einmahl gezählt: also kommen eigentlich $2m - 3$ Seitenlinien hinzu. Weil nun ADEGH $(m + 1)$ körperliche Ecken hat, so würden $m + 1$ Ecken hinzu kommen, wenn nicht wieder bey A, D, E aus zwoen Ecken nur eine würde, also wächst a um $m + 1 - 3$ Ecken. So würden auch $m + 1$ Seitenflächen hinzu kommen, wenn nicht die beyden gemeinschaftlichen Seitenflächen ADE abgiengen: demnach wächst h um $m + 1 - 2$ Seitenflächen. Es ist aber $2m - 3 = m + 1 - 3 + m + 1 - 2$, und in der Pyramide ABCDEF ist $l = a + h - 2$ (561. §. 2. Zus.), also wird $l + 2m - 3 = (a + m + 1 - 3) + (h + m + 1 - 2) - 2$. Wenn also $l + 2m - 3 = L$, $a + m + 1 - 3 = A$, $h + m + 1 - 2 = H$ gesetzt wird: so bleibt für den herausgebrachten Körper $L = A + H - 2$. 215

563. §.

Man setze an dem Körper ABCDHGEF noch eine Pyramide AFEGI an, deren Grundfläche m Seitenlinien hat, so daß zwey Paar an einander liegender Seitenflächen in beyden Körpern in AEF und AEG zusammen fallen: so bleibt wiederum in dem neuen

Körper die vorige Eigenschaft. Es kommen nemlich $2m - 2 \times 3$ Seitenlinien, $m + 1 - (2 + 2)$ Ecken, und $m + 1 - 2 \times 2$ Seitenflächen hinzu. Wenn AFEGI mit dem vorigen Körper drey Seitenflächen gemein hätte, so würden $2m - 3 \times 3$ Seitenlinien, $m + 1 - (3 + 2)$ Ecken, und $m + 1 - 3 \times 2$ Seitenflächen hinzu kommen.

Hätte AFEGI mit dem vorigen Körper überhaupt n Seitenflächen gemein: so würden $2m - n \times 3$ Seitenlinien, $m + 1 - (n + 2)$ Ecken, und $m + 1 - n \times 2$ Seitenflächen hinzu kommen. Weil nun $2m - 3n = m + 1 - (n + 2) + m + 1 - 2n$: so ist $L + 2m - 3n = (A + m + 1 - (n + 2)) + (H + m + 1 - 2n) - 2$, wenn vorher $L = A + H - 2$ war.

Demnach bleibt in jedem Körper diese Eigenschaft, wenn man ihn aus mehrern Pyramiden dergestalt zusammensetzt, daß ihre Spitzen und so viel Seitenflächen, als man will, zusammen fallen.

564. §.

Wenn ABCDHGIF ein eckigter Körper ist, der die Eigenschaft hat, daß $l = a + h - 2$; und man trennet von ihm eine Piramide AFEGI, deren Grundfläche FEGI mit einer Seitenfläche des Körpers einerley ist, und deren Spitze in die Spitze einer gegenüberstehenden Ecke fällt; so ist für den übrig bleibenden Körper ABCDHGEF ebenfalls $l = a + h - 2$. Denn wofern m die Anzahl der Seitenlinien von der Grundfläche der abgetrennten Pyramide, und n die Anzahl der Seitenflächen ist, welche diese Pyramide mit dem übrigbleibenden Stück gemein hat: so erhält man nun $2m - 3n$ Seitenlinien, $m + 1$

$-(n+2)$ Ecken, und $m+1-2n$ Seitenflächen we-
iger als vorhin, und es bleibt $l-(2m-3n) = a$
$-(m+1-(n+2))+h-(m+1-2n)-2$.

565. §.

In jedem eckigten Körper ist die Anzahl der Ecken und Seitenflächen zusammen um zwey grösser, als die Anzahl der Seitenlinien.

Beweis. 1. Wenn der Körper BCDEFGHI 216
eine andre, als auswärts gehende Ecken hat, so Fig.
kann man in seinem inwendigen Raum einen Punct A annehmen, und nach allen Ecken-Spitzen die grade Linien AB, AC, AD, u. s. f. ziehen, so daß diese ganz in den inwendigen Raum des Körpers fallen. Hiedurch wird der Körper in so viele Pyramiden ABCDE, ABCGH u. s. f. getheilt, als er Seitenflächen hat, die A zur gemeinschaftlichen Spitze haben, und so, wie im 563. §. zusammengesetzt sind. Also hat der ganze Körper die Eigenschaft, daß $l = a + h - 2$ ist.

2. Wenn unter den Flächen-Winkeln des Körpers einwärtsgehende sind; so kann man den Punct A zuweilen so nicht annehmen, daß alle grade Linien von A bis an die Spitze der Ecken des Körpers ganz in den inwendigen Raum desselben fallen. In diesem Fall aber kann man den 564. §. mit dem vorigen Beweise verbinden. Hat der Körper ABCDEFGHI 216
eine einwärtsgehende Ecke bey A, wozu die Seiten- Fig.
linien AB, AC, AD, AE u. s. f. gehören, so kann man die Puncte B, C, D, E u. s. f. mit graden Linien BC, CD, u. s. f. zusammenziehen: alsdenn werden die ebenen der Dreyecke CBD, BDE, u. s. f., wenigstens nicht so grosse einwärts gehende Flä-

chen-Winkel einschliessen, als die Seitenflächen de einwärtsgehenden Ecke bey A, einschliessen. Wen demnach der Körper auch mehr einwärtsgehende Ecke hätte: so könnte man mit einer jeden eben so umg hen, und auf solche Art einen Körper zu Wege bri gen, auf welchen sich der vorige Beweis anwende läßt. Man trenne nun von dem Körper nach un nach wieder die Pyramiden BCDA, BEDA, u. s. f. so behält das übrig bleibende Stück die Eigenschaf daß $l = a + h - 2$ sey (564. §.).

566. §.

Es ist nie $2l < 3h$ (300. §.), aber $h = l - a + 2$ also ist nie $2l < 3l - 3a + 6$, folglich ist nie $3a < l + 6$, oder $a < \frac{1}{3}l + 2$.

Ferner ist auch nie $2l < 3a$ (559. §.), und $a = l = +2$, folglich auch nie $3h < l + 6$, oder $h < \frac{1}{2}l + 2$.

Wenn man $a + h - 2$ statt l setzt, so folgt au dem ersten Satz, es sey nie $2a < h + 4$ oder $a < \frac{1}{2}h + 2$, und aus dem zweyten Satz, es sey nie $2h < a + 4$, oder $h < \frac{1}{2}a + 2$.

Demnach ist auch niemahls $h > 2a - 4$; so wi nie $> 2h - 4$ seyn kann.

567. §.

Wenn von den dreyen Zahlen a, h, l, zwo ge geben sind, so ist die dritte bestimmt. Aber es kön nen auch nicht jede zwo von diesen Zahlen willkühr lich angenommen werden, wie die jetzt erwiesene Sätze ergeben: vielmehr bestimmt jedesmahl ein dieser Zahlen die Gränzen, zwischen welchen die an dre fallen muß.

Folgende Tafel dienet, alle Fälle kurz zu über sehen.

Es sey gegeben	so fällt	zwischen den Gränzen
l	h	$\frac{2}{3}l$ und $\frac{1}{3}l+2$
	a	$\frac{2}{3}l$ und $\frac{1}{3}l+2$
h	l	$3h-6$ und $\frac{3}{2}h$
	a	$2h-4$ und $\frac{1}{2}h+2$
a	l	$3a-6$ und $\frac{3}{2}a$
	h	$2a-4$ und $\frac{1}{2}a+2$

Diese Tafel giebt die kleinsten und größten Werthe, die für die beyden übrigen Zahlen statt haben können, wenn eine von den dreyen Zahlen l, h, a, bestimmt ist. Uebrigens aber ist zu merken, daß diese drey Zahlen allemahl ganze Zahlen seyn müssen. Wenn also die gefundenen Gränzen Brüche sind, so können nur diejenigen ganzen Zahlen statt haben, die zwischen diesen Gränzen fallen, da sonst diese Gränzen selbst, wofern sie ganze Zahlen sind, auch mit unter die möglichen Fälle gehören.

568. §.

Kein eckigter Körper kann weniger, als 6 Seitenlinien haben. Denn es muß wenigstens $h=4$ seyn (299. §.), und dann fällt l zwischen den Grenzen 6 und 6, also ist in diesem Fall $l=6$. Uebrigens können für l alle übrige Zahlen, die grösser als 6 sind, angenommen werden, die einzige Zahl 7 ausgenommen. Wäre nemlich $l=7$, so müßten h und a zwischen den Gränzen $4\frac{2}{3}$ und $4\frac{1}{3}$ enthalten seyn. Aber zwischen diese Gränzen fällt keine ganze Zahl, also kann die Voraussetzung $l=7$ nicht statt haben.

569. §.

Kein eckigter Körper kann von lauter solchen Seitenflächen begränzt seyn, die sechs oder mehr Seitenlinien haben.

Auch können nicht alle Ecken des Körpers von sechs oder mehr Seitenflächen eingeschlossen seyn.

Beweis des 1 S. Hätten alle Seitenflächen 6 oder mehr Seitenlinien, so wäre entweder $w = 6h$ oder $w \triangleright 6h$, wenn w die Anzahl aller Winkel bedeutet (301. §.). Nun ist $l = \frac{1}{2}w$ (301. §.), also wäre entweder $l = 3h$, oder $l \triangleright 3h$. Aber l fällt allemahl zwischen den Gränzen $\frac{3}{2}h$ und $3h - 6$ (567. §.) deswegen kann nie $l = 3h$ oder $l \triangleright 3h$ seyn.

Beweis des 2 S. Wenn alle Ecken des Körpers 6 oder mehr Seitenflächen hätten, so wäre $w = 6a$, oder $w \triangleright 6a$. Da nun $l = \frac{1}{2}w$, so wäre entweder $l = 3a$, oder $l \triangleright 3a$, welches wiederum nicht seyn kann, weil l zwischen den Gränzen $\frac{3}{2}a$ und $3a - 6$ fallen muß (567. §.).

570. §.

Die Summe aller Winkel auf der Oberfläche eines jeden eckigten Körpers beträgt $(4a - 8)R$, wenn R einen rechten Winkel, und a die Anzahl aller Ecken des Körpers bedeutet.

Beweis. Es sey λ die Anzahl aller Seitenlinien aller Seitenflächen, und l die Anzahl der Seitenlinien des Körpers; so ist $\lambda = 2l$. Aber die Summe aller Winkel, die zu einer Seitenfläche gehören, beträgt zweymahl soviel rechte Winkel, als diese Seitenfläche Seitenlinien hat, weniger vier rechte Winkel (89. §.). Nun mag der Körper so viel Seitenflächen haben, als er wolle, so nehme man an, daß die Buchstaben α, β, γ, δ, u. s. f. die Anzahl der Seitenlinien bedeuten, die zur Isten, IIten, IIIten

IIten, IVten, Seitenfläche u. s. f. gehören, so hat man für diese Seitenflächen nach der Ordnung folgende Summen der dazu gehörigen Winkel

Für die Iste	$2\alpha . R - 4R$
Für die IIte	$2\beta . R - 4R$
Für die IIIte	$2\gamma . R - 4R$
Für die IVte	$2\delta . R - 4R$
u. s. f.	

Ist nun h die Anzahl der Seitenflächen des Körpers, so wird die Summe aller Winkel $= 2(\alpha+\beta+\gamma+\delta$ etc.) $R - 4h . R$. Es ist aber $\alpha + \beta + \gamma + \delta +$ etc. $= \lambda$, also die Summe aller Winkel $= 2\lambda . R - 4h . R$. Nun ist $\lambda = 2l$; setzt man also diese Summe $= S$, so wird $S = 4(l - h)R$. Ferner wird vermöge des 565. §. $l - h = a - 2$, folglich $S = (4a - 8)R$.

571. §.

Es kann die Summe aller Winkel nie kleiner, als $2h.R$, und nie grösser, als $(8h - 24)R$ seyn.

Beweis. Es ist nie $l < \frac{3}{2}h$ (567. §.), also nie $l - h < \frac{3}{2}h - h$, folglich ist auch nie $4(l - h) < 2h$. Da nun $S = 4(l - h)R$ (570. §.), so ist nie $S < 2h.R$. Ferner ist nie $l > 3h - 6$ (567. §.), also nie $l - h > 2h - 6$, folglich auch nie $4(l - h) > 8h - 24$, und eben deswegen kann niemahls $S > (8h - 24)R$ seyn.

572. §.

In der ebenen Geometrie lassen sich die gradlinichten Figuren ohne Schwierigkeit in Klassen eintheilen, und der Grund der Eintheilung wird aus der Anzahl der Seitenlinien oder der Winkel hergenommen, in-

dem hier die Anzahl der Seitenlinien und der Winkel allemahl einerley ist. Will man die eckigten Körper in Klassen eintheilen, so kann der Grund der Eintheilung entweder aus der Anzahl der Seitenflächen, oder der Ecken, oder der Seitenlinien hergenommen werden. Aber zu jeder Hauptklasse werden alsdenn mehr besondre Arten gehören, weil wenn eine von diesen Zahlen bestimmt ist, für die übrigen beyden noch verschiedene Bestimmungen möglich bleiben. Die Anzahl der Seitenflächen bestimmt noch nicht die Anzahl der Ecken, beyde Zahlen zusammen aber bestimmen die Anzahl der Seitenlinien. Daher kann man jedem eckigten Körper füglich einen solchen Nahmen geben, der beydes zugleich die Anzahl der Ecken und Seitenflächen ausdrückt. Der Körper heißt ein Tetraedrum, Pentaedrum, Hexaedrum, Heptaedrum, u. s. f. nachdem er von vier, fünf, sechs, sieben Seitenflächen eingeschlossen ist; und von der Anzahl der Ecken kann er die Nahmen Tetragonum, Pentagonum, Hexagonum, Heptagonum, u. s. f. führen. Der Nahme Polyhedrum ist diesen Körpern überhaupt gemein, wenn sie mehr als vier Seitenflächen haben. Demnach wäre ein Hexaedrum pentagonum ein solcher Körper, der sechs Seitenflächen und fünf Ecken hat. Man setze nach einander $h = 4$, $h = 5$, $h = 6$, u. s. f. so weiß man, daß für jede dieser Bestimmungen die Anzahl der Ecken a nicht ausser den Gränzen $2h - 4$ und $\frac{1}{2}h + 2$ falle. Eine Tafel, welche die möglichen Arten der Eckigten Körper vorstellig machen sollte, würde man also folgendergestalt einrichten können.

Anzahl

Anzahl der Seitenflächen	Anzahl der Ecken	Anzahl der Seitenlinien	Nahmen der Cörper	
4	4	6	TETRAEDRUM	tetragonum
5	5	8	PENTAEDRUM	pentagonum
	6	9	- -	hexagonum
6	5	9	HEXAEDRUM	pentagonum
	6	10	- -	hexagonum
	7	11	- -	heptagonum
	8	12	- -	octogonum
7	6	11	HEPTAEDRUM	hexagonum
	7	12	- -	heptagonum
	8	13	- -	octogonum
	9	14	- -	enneagonum
	10	15	- -	decagonum

u. s. f.

Diese bisher angeführte allgemeine Theorie von den eckigten Körpern gehört zu denjenigen Erweiterungen der Geometrie, womit Hr. Euler diese Wissenschaft in zwoen Abhandlungen bereichert hat, die man unter dem Titel: Elementa doctrinæ solidorum, und Demonstratio nonnullarum insignium proprietatum, quibus solida hedris planis inclusa sunt prædita, im IV Tomo der Nov. Comment. Petrop. 109. u. f. S. antrift.

573. §.

Wenn alle Seitenflächen eines eckigten Körpers gleiche und ähnliche reguläre Figuren, und alle Ecken desselben einander gleich und ähnlich sind: so heißt er ein regulärer, sonst aber ein irregulärer Körper.

Zusatz. Es ist kein Körper möglich, der lauter einwärts gehende Flächenwinkel hätte: also muß ein regulärer Körper lauter auswärts gehende Flächenwinkel haben.

574. §.

Wenn die Seitenflächen des regulären Körpers gleichseitige Dreyecke, und seine Ecken dreyseitige seyn sollen; so muß der Körper vier Seitenflächen haben.

Beweis. Zu jeder Seitenfläche gehören drey Winkel, und zu jeder Ecke ebenfalls. Nun sey w die Anzahl der Winkel, a der Ecken, h der Seitenflächen, und l der Seitenlinien: so muß $w = 3a$, und $w = 3h$, also $a = h$ seyn. Da nun $l = a + h - 2$ ist (565. §): so wird $l = 2h - 2$. Zu jeder Seitenfläche gehören drey Seitenlinien, und die Anzahl aller Seitenlinien des Körpers ist halb so groß (300. §): deswegen wird $l = \frac{3h}{2}$, also $\frac{3}{2}h = 2h - 2$, und dies giebt $h = 4$.

575. §.

Wenn die Seitenflächen Dreyecke bleiben, und jede Ecke vier Seitenflächen haben soll: so bekommt der Körper acht Seitenflächen.

Beweis. Es bleibt $w = 3h$, und es soll $w = 4a$ seyn, also ist $3h = 4a$, oder $a = \frac{3}{4}h$: das giebt $l = \frac{3}{4}h + h - 2$, oder $4l = 7h - 8$. Weil nun auch $l = \frac{3}{2}h$: so wird $6h = 7h - 8$, oder $h = 8$.

576 §.

Wenn die Seitenflächen Dreyecke bleiben, und die Ecken fünf Seitenflächen haben sollen: so bekommt der Körper 20 Seitenflächen.

Beweis. Es bleibt noch $w = 3h$, und es soll $w = 5a$ seyn, also wird $a = \frac{3}{5}h$, und $l = \frac{3}{5}h + h - 2$, oder $5l = 8h - 10$. Ueberdem bleibt $l = \frac{3}{2}h$, also ist $\frac{3}{2}\frac{5}{}h = 8h - 10$, oder $15h = 16h - 20$, und $h = 20$.

577.

577. §.

Es sind nicht mehr, als dreyerley Arten regulärer Körper möglich, deren Seitenflächen Dreyecke sind.

Beweis. Die Ecken eines solchen Körpers können dreyseitige, vierseitige, fünfseitige seyn, und im ersten Fall ist es ein Tetraëdrum im zweyten ein Octaëdrum, im dritten ein Icosaëdrum (574. 575. 576. §.). Mehr als fünf Seiten können die Ecken des Körpers nicht haben. Denn die Grösse jeder Seite beträgt 60°, also würden 6 Seiten schon 360°, und mehr als 6 Seiten allemahl über 360° betragen, und solche Ecken giebt es nicht, wenn jeder von ihren Winkeln kleiner, als 180° seyn soll, wie hier erfordert wird (509. §). Eben dieser Satz folgt auch aus dem 569. §.

578. §.

Wenn die Seitenflächen des regulären Körpers Quadrate sind: so kann jede Ecke nicht mehr, als drey Seitenflächen haben, und der ganze Körper hat sechs Seitenflächen.

Beweis. Jeder Winkel eines Quadrats ist $= 90°$: also betragen ihrer vier schon 360°, und mehr als 4 allemahl mehr als 360°. Deswegen kann keine Ecke mehr, als drey Seiten haben. Nun hat man $w = 4h$, und $w = 3a$, also $a = \frac{4}{3}h$, und $l = \frac{4}{3}h + h - 2$, oder $3l = 7h - 6$. Ueberdem ist $l = \frac{4}{2}h = 2h$, also $3.2h = 6h = 7h - 6$, oder $h = 6$.

579. §.

Wenn die Seitenflächen reguläre Fünfecke sind: so kann jede Ecke wiederum nicht mehr, als

als 3 Seiten haben, und der ganze Körper hat zwölf Seitenflächen.

Beweis. Jeder Winkel des regulären Fünfecks ist $> 90°$, also ihrer vier, und noch mehr, allemahl über $360°$: deswegen kann keine Ecke mehr als drey Seiten bekommen. Uebrigens ist $w = 5h$, und $w = 3a$, also $a = \frac{5}{3}h$. Ferner $l = \frac{2}{3}h + h - 2$, oder $3l = 8h - 6$, und $l = \frac{5}{2}h$, also $\frac{15}{2}h = 8h - 6$, oder $15h = 16h - 12$, und $h = 12$.

580. §.

Mehr als fünf Seitenlinien können die Seitenflächen eines regulären Körpers nicht haben.

Beweis. Im regulären Sechseck ist jeder Winkel $= 120°$, und wenn die Anzahl der Seiten grösser, als 6 ist; so ist der Polygonwinkel grösser, als $120°$. Aber es ist schon $3 \times 120° = 360°$, und drey Winkel eines jeden Polygons, das mehr, als 6 Seiten hat, betragen über $360°$, also kann daraus gar keine Ecke gemacht werden. Folglich kann man aus Sechsecken, und solchen Polygonen, die mehr, als 6 Seitenlinien haben, keinen regulären Körper zusammensetzen. Eben dies folgt aus dem 569. §.

Demnach sind überhaupt nicht mehr, als fünf reguläre Körper möglich (577. 578. 579. §), die auch die Platonischen Körper von ihrem Erfinder heissen.

Der XXVI. Abschnitt.

Anwendung der sphärischen Trigonometrie auf die Berechnung des Inhalts und der Oberfläche der Prismen, Pyramiden, und der regulären Körper.

581. §.

Die Oberfläche eines eckigten Körpers ist aus ebenen gradlinichten Figuren, die sich unter gewissen Winkeln schneiden, zusammengesetzt, und eine solche Oberfläche kann eine gebrochene Fläche heissen. Da man nun den Inhalt einer jeden ebenen gradlinichten Figur nach den Regeln des XI. und XIX. Abschnittes finden kann; so läßt sich die Oberfläche eines jeden eckigten Körpers nach eben diesen Regeln berechnen. Wenn nemlich alle Seitenlinien des Körpers, und die Winkel seiner Seitenflächen bekannt sind; so kann man jede Seitenfläche besonders berechnen, und zuletzt alles in eine Summe bringen. Hiebey lassen sich aber, nachdem die Körper mehr, oder weniger regulär sind, verschiedene Rechnungs-Vortheile anbringen, wie die folgenden Aufgaben zeigen werden.

582. §.

Wenn die drey Seitenlinien $AB=a$, $AD=b$, $AE=c$ die in einer Ecke A des Parallelepipedi AG zusammenstossen, nebst den Seiten dieser Ecke $BAD=\alpha$, $BAE=\beta$, $EAD=\gamma$ gegeben sind: 217 Fig.

sind: die Oberfläche nebst dem körperlichen Inhalt des Parallelepipedi zu finden.

Aufl. Es ist die Seitenfläche $AC = ab \sin\alpha$ $= EG$, die Seitenfläche $AF = ac \sin\beta$, die Seitenfläche $AH = bc \sin\gamma$, also die ganze Oberfläche $= 2(ab \sin\alpha + ac \sin\beta + bc \sin\gamma)$. Ferner sey ER auf der Grundfläche AC senkrecht: so ist des Winkels an

$$AB\ \text{Cosinus} = \frac{\cos\gamma - \cos\alpha\cos\beta}{\sin\alpha\sin\beta},$$ und der Sinus

seiner Hälfte $= \sqrt{\frac{\sin\frac{1}{2}(\gamma+\alpha-\beta)\sin\frac{1}{2}(\gamma+\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta}}$

(546. §). Es sey dieser Winkel $= \psi$: so findet man $\sin EAR = \sin\psi \sin\beta$ (523. §), also die Höhe des Körpers $ER = c \sin EAR = c \sin\psi \sin\beta$, und der Inhalt ist $= abc \sin\alpha \sin\beta \sin\psi$.

583. §.

218 Fig. Den Inhalt, und die Oberfläche eines dreyseitigen Prisma *ABDEFH* zu finden, wenn die drey Seitenlinien der Ecke um *A*, nebst ihren Seitenflächen gegeben sind.

Aufl. Wenn die Bezeichnungen des vor. §. bleiben, so ist der Inhalt $= \frac{1}{2}abc \sin\alpha \sin\beta \sin\psi$ (343. §.) Um die Oberfläche zu finden, muß man die Seitenlinie $BD = e$, und den Winkel $DBF = \vartheta$ zuförderst berechnen: man findet aber $BD = \sqrt{(aa - 2ab\cos\alpha + bb)}$ (453. §). Ferner ist $\tang ABD = \frac{b\sin\alpha}{a - b\cos\alpha}$, also hat man $ABD = \eta$, und es ist in dem körperlichen Dreyeck an B, dessen Seitenlinien BA, BD, BF sind, der Winkel an $AB = \psi$ bekannt, nebst den Seiten die ihn einschliessen, η und $180° - \beta$, woraus DBF

=

$= \vartheta$ nach dem 550. §. berechnet wird. Weil nun das Dreyeck ABD $= \frac{1}{2} ab \sin\alpha$, AF $= ac \sin\beta$, AH $= bc \sin\gamma$, und DF $= ec \sin\vartheta$; so ist die Oberfläche $= ab \sin\alpha + ac \sin\beta + bc \sin\gamma + ec \sin\vartheta = a(b \sin\alpha + c \sin\beta) + c(b \sin\gamma + e \sin\vartheta)$.

584. §.

Den Inhalt und die Oberfläche eines vielseitigen Prisma zu finden, wenn die drey Seitenlinien und Seitenflächen einer Ecke um *A* nebst den Winkeln und übrigen Seiten der Grundfläche gegeben sind. 218 Fig.

Aufl. Aus den Winkeln und Seiten der Grundfläche berechnet man ihren Inhalt nach dem 462. §. Wenn die Bezeichnungen des vor. §. bleiben, so wird die Höhe ER $= c \sin\psi \sin\beta$, und der Inhalt $= hh.c \sin\psi \sin\beta$, wenn *hh* der Inhalt der Grundfläche ist (349. §). Um die Oberfläche zu finden, muß man zuförderst die Winkel der übrigen Seitenflächen suchen, und man fängt damit an, daß man zuerst aus α, β, γ, wie im 546. §. den Flächenwinkel an AB sucht. Wenn nun dieser $= \psi$ ist; so findet man aus ABF $= 180° - \beta$, aus ABC, und dem eingeschlossenen Winkel ψ den Winkel FBC, und den Neigungswinkel an BC $= \eta$. Hierauf wird aus η und den beyden anliegenden Winkeln GCB $= 180° -$ FBC, und BCI, ferner der Winkel GCI nebst dem Neigungswinkel an CI gefunden. Auf solche Art kann man durch den ganzen Umfang des Prisma fortgehen, und die Winkel für jede Seitenfläche finden. Daraus ergiebt sich der Inhalt jeder Seitenfläche nach dem 460. §., und ihre Summe zur doppelten Grundfläche addirt giebt die ganze Oberfläche des Prisma.

Wenn

Wenn $\beta = \gamma = 90°$, also das Prisma ein senkrechtes ist, so wird die Oberfläche, die Grundfläche mitgerechnet, = (AB + BC + CI + DI etc.) AE: also ist die Oberfläche eines senkrechten Prisma, die Grundflächen abgerechnet, so groß, als ein Rechteck, davon eine Seite der Höhe, die andre aber dem Umfange der Grundfläche des Prisma gleich ist.

585. §.

219 Fig. Den Inhalt, und die Oberfläche einer Pyramide *ABCDEF* zu finden, wenn die Seiten und Winkel der Grundfläche nebst den dreyen Seitenlinien *BC*, *BF*, *BA*, und Seitenflächen *ABC*, *ABF* einer Ecke *B* an der Grundfläche gegeben sind.

Aufl. Aus den Seiten und Winkeln der Grundfläche findet man ihren Inhalt nach dem 463. §. Dieser sey = *hh*. Wenn nun CBF = α, ABC = β, ABF = γ ist; so findet man den Flächen-Winkel ψ an BC wie im 584. §. beym Prisma. Ist nun AG die Höhe, so wird ABG und AG aus ψ und ABC ebenfalls wie im 584. §. beym Prisma gefunden, und sodann hat man den Inhalt = $\frac{1}{3}hh$. AG (360. §). Aus dem Winkel ABC, AB und BC hat man den Inhalt des Dreyecks ABC = $\frac{1}{2}$BC. AB sinβ. Aus AB, BC und ABC = α findet man überdem BCA, und AC, da denn ferner aus BCA, ψ, und BCD der Winkel ACD nebst dem Flächenwinkel an CD = η, gefunden wird. Aber aus ACD, AC, und CD giebt sich der Inhalt des Dreyecks ACD, nebst dem Winkel ADC, und der Seite AD. Weiter hat man aus dem Winkel an CD = η, ADC, und CDE, den Winkel

ADE

ADE, nebst dem Flächenwinkel an DE, da dann aus AD, DE, und ADE sich der Inhalt des Dreyeckes ADE ergiebt, nebst der Seite AE, und dem Winkel AED. Auf solche Art findet man für jedes folgende Dreyeck ausser der gegebenen Grundlinie die anliegende Seite nebst dem eingeschlossenen Winkel, die zur Berechnung des Inhalts erforderlich sind. Die Summe aller Dreyecke nebst der Grundfläche giebt den Inhalt der ganzen Oberfläche der Pyramide.

586. §.

Eine Pyramide, die ein reguläres Polygon zur Grundfläche, und gleiche und ähnliche gleichschenklichte Dreyecke zu Seitenflächen hat, soll in der Folge der Kürze wegen eine **gleichseitige Pyramide** heissen. 219 Fig.

Wenn aus dem Mittelpunct G des um das reguläre Polygon BCDEF beschriebenen Kreises eine grade Linie GA auf der Ebene des Polygons senkrecht gesetzt ist, und hiernächst von A nach allen Winkelpuncten des Polygons die graden Linien AB, AC, AD u. s. f. gezogen werden; so sind das die Seitenlinien einer gleichseitigen Pyramide, die A zur Spitze, und das Polygon zur Grundfläche hat.

Alle Neigungswinkel der Seitenflächen gegen einander sind in einer solchen Pyramide gleich groß, auch sind die Neigungswinkel der Seitenflächen gegen die Grundfläche von gleicher Grösse. Denn die Ecken an der Grundfläche werden insgesammt solche körperliche Dreyecke, worin die Seiten der einen den Seiten aller übrigen gleich, also auch die Winkel gleich groß sind (517. §).

Wenn die Pyramide ABCDEF gleichseitig ist, und von der Spitze A eine grade Linie AG auf die Ebene der Grundfläche senkrecht gezogen wird, so gehet diese durch den Mittelpunct des um die Grundfläche zu beschreibenden Kreises. Denn wenn man BG, CG, DG zieht; so ist $BG = \sqrt{(AB^q - AG^q)}$, $CG = \sqrt{(AC^q - AG^q)}$, $DG = \sqrt{(AD^q - AG^q)}$. Weil nun $AB = AC = AD$, so ist $BG = CG = DG$, also ist G der Mittelpunct des Kreises um BCDEF.

587. §.

Wenn man durch alle Seitenlinien *BC, CD* u. s. f. eines regulären Polygons *BCDEF* ebene Flächen legt, die gegen die Ebene des Polygons, unter gleichen spitzen Winkeln geneigt sind: so schliessen diese mit dem Polygon eine gleichseitige Pyramide ein, die das Polygon zur Grundfläche hat.

219 Fig.

Beweis. In den dreyseitigen Ecken an B, C, u. s. f. ist $FBC = BCD$, und die Winkel an diesen Seitenflächen sind gleich; also sind auch die übrigen Seiten dieser Ecken gleich (513. §.). Ueberdem sind die Ecken an B, C, D u. s. f. alle gleichschenklicht (515. §): also machen die Durchschnittslinien dieser Ebenen mit den Seitenlinien der Grundfläche an B, C, D, u. s. f. gleiche Winkel. Wenn nun BH und CI ein paar zunächst nach einander folgende Durchschnittslinien sind; so werden sich diese nothwendig irgendwo in A schneiden. Denn man halbire die Flächenwinkel an BH und CI mit einem Paar Ebenen, welche die Grundfläche in BK, CL schneiden: so halbiren diese Linien die Winkel der Grund-

fläche

fläche: (511. §.) also müssen sie durch den Mittelpunct G des Kreises um die Grundfläche gehen. Demnach gehen auch beyde Ebenen durch G, und schneiden einander in der graden Linie AG. Ueberdem stehen die Ebenen HBG, ICG auf der Grundfläche senkrecht (511. §.), und es wird vorausgesetzt, daß die Winkel an BC, CD u. s. f. spitze sind: also sind auch die Winkel HBG, ICG spitze (528. §.). Aber AG ist auf der Ebene der Grundfläche senkrecht, also müssen BH und CI mit AG zusammenstossen, und zwar in einem und eben demselben Punct A, weil HBG = ICG wird (515. §.). Es erhellet eben so, daß alle übrige Durchschnittslinien durch D, E, F u. s. f. durch A gehen müssen: demnach wird ABCDEF eine gleichseitige Pyramide.

588. §.

Wenn alle Seitenlinien *AB*, *AC*, *AD* u. s. f. einer gleichseitigen und gleichwinklichten körperlichen Ecke um *A* gleich groß sind; so liegen die Puncte *B*, *C*, *D*, *E*, u. s. f. in einer Ebene, und sind die Winkelpuncte eines regulären Polygons von eben so viel Seitenlinien als die Ecke Seitenflächen hat. 219 Fig.

Beweis. Man ziehe BC, CD, DE, u. s. f. und auf der Ebene BCD sey AG senkrecht: so halbirt die Ebene ACG den Winkel BCD. Man ziehe BG, GC, GD: so wird BG = GC = GD (78. §.), also ist GDC = GCB, die Winkel an GC und GD sind rechte, und ADG = ACG. Demnach machen ADG, ADC an AD, und ACG, ACB, an AC gleiche Flächenwinkel, und ADG halbirt den zur Ecke A gehörigen Winkel an AD: also ist auch GDE = GDC

(511. §.). Man ziehe GE, so wird GE = GC = GD (54. §.), also $AE^q = AD^q = AG^q + GD^q = AG^q + GE^q$, folglich ist AGE = R (112. §.), und die Ebene BCD geht durch GE (306. §.). Demnach erhellet, wie vorhin, daß AGE den Winkel an AE halbire, und hieraus ferner, daß GF = GE, und GF auf AG senkrecht sey, folglich auch F in der Ebene BCDE liege.

589. §.

Den Inhalt und die Oberfläche einer gleichseitigen Pyramide *ABCDEF* nebst der Länge ihrer gleichen Seitenlinien zu finden, wenn die Polygon-Seite $BC = a$, nebst dem Polygonwinkel $= \Phi$ der Grundfläche, und überdem der Winkel ψ gegeben ist, unter welchem die Seitenflächen die Grundfläche schneiden.

Aufl. Wenn AG auf der Grundfläche lothrecht, und überdem BG gezogen ist; so hat man $BG = \frac{a}{2 \operatorname{col} \frac{1}{2}\Phi}$ (444. §.), und die Höhe $AG = BG \operatorname{tang} ABG$ (439. §.). Da nun $\operatorname{tang} ABG = \sin \frac{1}{2}\Phi \operatorname{tg}.\psi$ (529. §.), so wird $AG = \frac{1}{2}a \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Phi \operatorname{tg}.\psi$, und das giebt die Seitenlinie $AB = \frac{1}{2}a \frac{\sqrt{(1 + \sin \frac{1}{2}\Phi^2 \operatorname{tang}.\psi^2)}}{\operatorname{col} \frac{1}{2}\Phi}$ (283. §.).

Wenn nun die Grundfläche *n* Seitenlinien hat; so ist ihr Inhalt $= \frac{1}{4}naa \operatorname{tang} \frac{1}{2}\Phi$ (462. §.), und dies mit $\frac{1}{3}AG = \frac{1}{6}a \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Phi \operatorname{tg}.\psi$ multiplicirt, giebt der Pyramide Inhalt $= \frac{1}{2}\frac{1}{4}na^3 \operatorname{tg} \frac{1}{2}\Phi^2 \operatorname{tg} \psi$. Weil nun ABG schon gefunden ist, so hat man $\sin ABC =$

sin

$\frac{\sin ABG}{\sin \psi}$ (523. §.): demnach wird des Dreyeckes ABC Inhalt $= \frac{1}{2} BC . AB \sin ABC$. Es ist aber

$$\operatorname{cosec} ABG = \sqrt{\left(1 + \frac{1}{\sin \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2}\right)}$$ (417. §.) n. 2 $= \frac{\sqrt{(1 + \sin \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2)}}{\sin \frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\psi}$, also $\sin ABG = \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\psi}{\sqrt{(1 + \sin \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2)}}$, (417. §. n. 3.) und das giebt $\sin ABC = \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\psi}{\sin\psi \sqrt{(1 + \sin \frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2)}}$. Demnach ist des Dreyeckes ABC Inhalt $= \frac{1}{4} aa \frac{\sin \frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\psi}{\operatorname{cos} \frac{1}{2}\varphi}$

$= \frac{\frac{1}{4} aa \sin \frac{1}{2}\varphi}{\operatorname{cos}\psi \operatorname{cos} \frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{4} aa \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi \operatorname{sec}\psi$, also die ganze Oberfläche der Pyramide $= \frac{1}{4} n\, aa \operatorname{sec} \frac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\psi + \frac{1}{4} n\, aa \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{4} n\, aa \operatorname{tang} \frac{1}{2}\varphi (1 + \operatorname{sec}\psi)$.

Die Oberfläche einer gleichseitigen Pyramide, die Grundfläche ungerechnet, ist einem Dreyeck gleich, davon die Höhe so groß ist, als die Höhe jeder von den gleichen Seitenflächen der Pyramide, und die Grundlinie so groß, als der Umfang ihrer Grundfläche.

Die Höhe dieses Dreyecks ist demnach kleiner, als jede von den gleichen Seitenlinien der Pyramide.

590. §.

Wenn man alle Flächenwinkel eines regulären Körpers mit ebenen Flächen halbirt: so wird der ganze Körper dadurch in so viele glei-

che und ähnliche gleichseitige Pyramiden getheilt, als der Körper Seitenflächen hat, wovon diese Seitenflächen die Grundflächen werden.

Die Spitzen aller dieser Pyramiden fallen in einen Punct innerhalb des Körpers zusammen, und dies ist der Mittelpunct, jede Seitenlinie dieser Pyramiden aber der Halbmesser einer Kugel, in deren Oberfläche alle Spitzen von den Ecken des Körpers liegen.

Beweis. Weil alle Flächenwinkel des Körpers gleich groß, und kleiner, als 2R sind; so legt man auf solche Art durch alle Seitenlinien der Polygone, welche die Seitenflächen des Körpers abgeben, ebene Flächen, die gegen diese Seitenflächen, auf der inwendigen Seite unter gleichen spitzen Winkeln geneigt sind: also kommt auf jeder Seitenfläche eine gleichseitige Pyramide zu stehen (587. §.), und alle diese Pyramiden passen in einander (338. §.) so wie alle ihre Seitenflächen gleich und ähnlich sind. Jede Seitenfläche einer solchen Pyramide ist zugleich eine Seitenfläche einer anliegenden Pyramide; also fallen alle Spitzen in einen Punct zusammen. Weil nun alle Seitenlinien, die sich von diesem Punct bis an die Ecken des Körpers erstrecken, gleich groß sind, so liegen die Spitzen dieser Ecken alle in einer Kugelfläche, welche die gemeinschaftliche Spitze der Pyramiden zum Mittelpunct, und einen der Seitenlinien gleichen Halbmesser hat.

Demnach ist jeder reguläre Körper einer Pyramide gleich, deren Grundfläche so groß, als die ganze Oberfläche des Körpers, und deren Höhe so groß ist, als die Entfernung der Seitenflächen des Körpers

vom

vom Mittelpunct der um denselben zu beschreibenden Kugel.

591. §.

Es ist eine Seitenlinie des regulären *Tetraë-* 220
dri = *a* gegeben; man soll die Grösse der Flä- Fig.
chenwinkel des Körpers, den Halbmesser *r*, oder Durchmesser *d* der um das *Tetraëdrum* zu beschreibenden Kugel, und den körperlichen Inhalt desselben finden.

Aufl. Weil alle Winkel der Seitenflächen = 60° sind, so ist der Cosinus eines jeden Flächenwinkels

$$= \frac{\cos 60° - \cos 60° . \cos 60°}{\sin 60° \sin 60°} \text{ (546. §.)} =$$

$\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$: also ist der Logarithme der Tafeln dieses Cosinus = $10 - l3 = 9{,}5228787$, und der Winkel selbst = 70° 31′ 44″. Nun gehört das Tetraëdrum ABCD in die Classe der gleichseitigen Pyramiden, also kann man den Inhalt so finden. Man setze im 589. §. $\varphi = 60°$, $\psi = 70° 31' 44''$, und $n = 3$, so wird $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\text{tang}\psi = \sqrt{8}$, also die Höhe AG des Tetraëdri = $\frac{1}{2} a \, \text{tg}\frac{1}{2}\varphi$.

$\text{tang}\psi = \frac{1}{2}a \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \sqrt{8} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} a$, und der

Inhalt = $\frac{1}{2}\frac{1}{4} n a^3 \, \text{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 \text{tg}\psi = \frac{1}{8} . a^3 . \frac{1}{3} . \sqrt{8} = \frac{1}{3\sqrt{8}}$

$$a^3 = \frac{1}{2.3.\sqrt{2}} a^3.$$

Um den Durchmesser der zugehörigen Kugel zu finden, sey das Tetraëdrum wie im 590. §. in vier

Pyramiden getheilt, die gemeinschaftliche Spitze dieser Pyramiden sey K, so ist K der Mittelpunct der um das Tetraëdrum beschriebenen Kugel, und KB ein Halbmesser. Es wird aber jeder Flächenwinkel an der Grundfläche nun die Hälfte des Winkels, der vorhin mit ψ bezeichnet war, also $= 35° 15' 52''$. Demnach sey nun $\frac{1}{2}\psi = \gamma$, so ist $\text{col}\gamma = \sqrt{\frac{(1+\frac{1}{3})}{2}}$

$= \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\text{sin}\,\gamma = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (425. §.) $\text{tang}\gamma = \sqrt{\frac{1}{2}}$. Ueberdem $\varphi = 60°$, $\text{sin}\,\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$, $\text{col}\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{3}{4}}$, $\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi\ \frac{1}{\sqrt{3}}$, also $\sqrt{(1 + \text{sin}\frac{1}{2}\varphi^2\ \text{tg}\gamma^2)} = \sqrt{(1 + \frac{1}{8})} =$ $\frac{3}{\sqrt{8}} = \frac{2}{2\sqrt{2}}$. Wenn demnach r der Halbmesser und d der Durchmesser der zugehörigen Kugel ist; so hat man $r = \text{KB} = \frac{1}{2}a \cdot \frac{\sqrt{(1 + \text{sin}\frac{1}{2}\varphi^2\ \text{tang}\gamma^2)}}{\text{col}\frac{1}{2}\varphi}$

(589. §.) $= \frac{1}{2}a \cdot \frac{3}{2\sqrt{2}} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}a$.

Demnach ist $2r = d = a\sqrt{\frac{3}{2}}$, und es verhält sich das Quadrat der Seitenlinie des Tetraëdri zum Quadrat des Durchmessers der zugehörigen Kugel, wie 2 : 3. Der Inhalt fände sich nun $= 4 \cdot \frac{1}{2}\frac{1}{4}\pi a^2$ $\text{tang}\,\frac{1}{2}\varphi^2\ \text{tg}\gamma = \frac{1}{2}a^3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2 \cdot 3\sqrt{2}}a^3$, wie vorhin.

Der Abstand der Seitenflächen des Teraëdri vom Mittelpunct der zugehörigen Kugel KG ist $= \frac{1}{2}a\,\text{tg}\frac{1}{2}\varphi$ $\text{tg}\gamma$

$$\text{tg}\,\gamma = \tfrac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot a = \frac{1}{2 \cdot 3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} a$$

$= \frac{1}{3}r$: und wenn ϱ der Halbmesser des um die Seitenfläche des Tetraëdri zu beschreibenden Kreises ist;

so hat man $\varrho = \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\Phi} = \frac{1}{\sqrt{3}}a = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot d = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} d$; also $2\varrho = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{9}} d$.

Wenn also der Durchmesser d, oder Halbmesser r, einer Kugel gegeben ist; so kann man auf folgende Art in der Kugel ein reguläres Tetraëdron verzeichnen. In der Entfernung $= \frac{1}{3}r$ vom Mittelpunct schneide man die Kugel mit einer Ebene, diese giebt einen Kreis der Kugel, dessen Halbmesser $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{9}} d$ ist, worin sich ein gleichseitiges Dreyeck verzeichnen läßt, dessen Seite $= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d$ ist, und derjenige Pol dieses Kreises, welcher mit dem Mittelpunct der Kugel auf einer Seite liegt, ist die Spitze der vierten Ecke des Tetraëdri, wovon das Dreyeck die drey übrigen giebt.

592. §.

Aus der gegebenen Seite a des *Octaëdri* die Grösse seiner Flächenwinkel, den Halbmesser r, oder Durchmesser d, der um dasselbe zu beschreibenden Kugel, und den körperlichen Inhalt desselben zu finden.

Aufl. Die Ecke um A sey eine Ecke des Octaëdri. 221 Fig. Man nehme $AB = AC = AD = AE = a$; so wird BCDE

BCDE ein Quadrat (588. §.), also EBC = 90°. Weil nun ABC = ABE = 60°: so wird des Winkels an AB Cosinus $= \frac{\cos 90° - (\cos 60°)^2}{(\sin 60°)^2} = -\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4} : \frac{3}{4} = -\frac{1}{3}$. Also ist dieser Winkel = 109° 28′ 16″. Es sey dieser Winkel = α, und $\psi = \frac{1}{2}\alpha$: so hat man $\sin\psi = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{2}{3}}$, $\cos\psi = \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{2}} = \sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\text{tang}\psi = \sqrt{2}$.

Man setze 60° = φ, also $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{3}{4}}$, $\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ferner $\sqrt{(1 + \sin\frac{1}{2}\varphi^2 \, \text{tg}\psi^2)} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Es sey das Octaëdrum wie im 590. §. in acht Pyramiden getheilt: so ist die Höhe dieser Pyramiden $= \frac{1}{2} a \, \text{tg}\frac{1}{2}\varphi \, \text{tg}\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} \cdot a = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot a$, der Inhalt des Octaëdri $= 8 \frac{1}{2} \frac{1}{4} n a^3$

$\text{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 \, \text{tg}\psi = \frac{\sqrt{2}}{3} a^3$, und $r = \frac{1}{2} a$.

$$\frac{\sqrt{(1 + \sin\frac{1}{2}\varphi^2 \, \text{tg}\psi^2}}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} \cdot a$$

$= \frac{\sqrt{2}}{2} a$, oder $d = a\sqrt{2}$. Es wird also $\varrho = \frac{1}{\sqrt{3}} a = \frac{1}{\sqrt{3}\sqrt{2}} d$ und $2\varrho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d$.

In der Pyramide ABCDE ist des Winkels an BC

$$\text{Cosinus} = \frac{\cos 60° - \cos 60° \cos 90°}{\sin 60° \sin 90°} =$$

cos 60°

$$\frac{\text{col}\,60^\circ}{\text{sin}\,60^\circ} = \frac{1}{2} : \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \text{col}\,\tfrac{1}{2}\alpha.$$

Wenn also eine neue Pyramide FBCDE, die der vorigen ABCDE gleich und ähnlich ist, an der Grundfläche BCDE so gesetzt wird, daß die Spitzen A und F auf verschiedenen Seiten der Grundfläche liegen: so wird der aus beyden zusammengesetzte Körper, ein reguläres Octaëdrum.

Eine senkrechte Linie AG von A auf die Ebene BCDE geht durch den Mittelpunct des um BCDE beschriebenen Kreises (586. §.), und geht verlängert zugleich durch F: also sind A und F die Pole des Kreises um BCDE auf der Oberfläche der zugehörigen Kugel, und AF ist ihr Durchmesser. Weil nun AG = FG, so ist G ihr Mittelpunct, und der Kreis um BCDE ein größter Kreis. Hieraus ergiebt sich folgende Art, in der Kugel ein reguläres Octaëdrum zu beschreiben. Man verzeichne in einem größten Kreise der Kugel ein Quadrat: so sind die Winkelpuncte dieses Quadrats, nebst den beyden Polen dieses größten Kreises, die Spitzen der Ecken des Octaëdri.

593. §.

Wenn die Seite des *Icosaëdri* gegeben ist, die Grösse der Flächenwinkel, den Halbmesser, oder Durchmesser der um dasselbe zu beschreibenden Kugel, und den körperlichen Inhalt desselben zu finden.

Aufl. Es sey A eine Ecke des Icosaëdri, und AB = AC = AD = AE = AF; so ist BCDEF ein re- Fig. guläres Fünfeck (388. §.), also FBC = 108° = 222

90°

$90° + 18°$, und $\cos FBC = -\sin 18° = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ (444. §.). Dies giebt des Winkels an AB Cosinus $= \frac{\cos FBC - \cos ABC \cos ABF}{\sin ABC \sin ABF} = \frac{\cos FBC - (\cos 60°)^2}{(\sin 60°)^2}$

$= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{1}{4}\right) : \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{4} : \frac{3}{4} = -\frac{\sqrt{5}}{3}$: also giebt die Rechnung

$l5 = 0{,}6989700$

$l \sin tot + l\sqrt{5} = 10{,}3494850$

$l3 = 0{,}4771213$

$9{,}8723637$

und der gesuchte Winkel ist $= 138° 11' 23''$. Ist nun dieser Winkel an $AB = \alpha$, so hat man $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{5}}{3}$, und $\cos\frac{1}{2}\alpha = \sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}} = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$.

Es sey $\psi = \frac{1}{2}\alpha$: so wird $\cos\psi = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}}$,

$\sin\psi = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}}$, und $\text{tang}\psi = \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}}$.

Es bleibt überdem $\sin\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{2}$, $\cos\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{3}{4}}$,

$\text{tang}\frac{1}{2}\varphi = \frac{1}{\sqrt{3}}$; also wird

$\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \text{ tang}\psi^2 = \frac{3+\sqrt{5}}{4(3-\sqrt{5})}$,

$\sqrt{(1 + \sin\frac{1}{2}\varphi^2 \text{ tg}\psi^2)} = \frac{\sqrt{(15-3\sqrt{5})}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}} =$

$\sqrt{}$

$\frac{\sqrt{3}\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}}, \frac{\sqrt{(1+\sin\frac{1}{2}\varphi^2\,\mathrm{tg}\psi^2)}}{\cos\frac{1}{2}\varphi} =$

$\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$,

und $r = a \cdot \frac{\sqrt{(5+\sqrt{5})}}{2\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$, oder $d = a \cdot \frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}$.

Demnach ist $d : a = \sqrt{(5-\sqrt{5})} : \sqrt{(3-\sqrt{5})} = \frac{\sqrt{5}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}} : \frac{\sqrt{3}-\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$, und der Kugel Durchmesser verhält sich zur Seite des Icosaëdri, wie die Seite des regulären Fünfeckes zur Seite des in eben dem Kreise beschriebenen Zehneckes (447. 444. §.).

Es ist also auch $d = \frac{\sqrt{(\frac{5}{2}-\sqrt{\frac{5}{4}})}}{\sqrt{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}}} a$.

Der Abstand der Seitenflächen vom Mittelpunct ist $= \frac{1}{2} a\,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi\,\mathrm{tg}\psi = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}} a$;

und weil $a = \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} d$; so ist dieser Abstand $= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} d =$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}\sqrt{(3+\sqrt{5})}} d =$

$\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}} d = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{\sqrt{(5+\sqrt{5})}} . d.$

Der Inhalt des Icosaëdri ist $=$

$20 \frac{1}{2}\frac{1}{4} n a^3 \,\mathrm{tg}\frac{1}{2}\varphi^2\,\mathrm{tg}\psi = \frac{5}{6} \cdot \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}} . a^3 = \frac{5}{6} .$

√

$$\frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{(3-\sqrt{5})}} \cdot \frac{(3-\sqrt{5})\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{(5-\sqrt{5})\sqrt{(5-\sqrt{5})}} d^3 = \frac{(3-\sqrt{5})\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{(5-\sqrt{5})\sqrt{(5-\sqrt{5})}} d^3.$$

Wenn durch die Seitenlinien BC, CD, DE, EF, FB des Fünfeckes BCDEF die Seitenflächen BCG, CDH, DEI, FEK, BFL des Icosaëdri gelegt sind: so erhellet, daß die Puncte G, H, I, K, L, insgesamt von A gleich weit entfernet sind. Zieht man demnach GH, HI, IK, KL, GL; so ergeben sich 15 Seitenflächen des Icosaëdri und GHIKL ist wieder ein reguläres Fünfeck, das dem Fünfeck BCDEF gleich und ähnlich ist, und dessen Ebene mit BCDEF parallel liegt. Man setze demnach unterwärts an dem Fünfeck GHIKL eine Pyramide MGHIKL, die der Pyramide ABCDEF gleich und ähnlich ist: so hat man das ganze Icosaëdrum, und die grade Linie AM ist ein Durchmesser der Kugel, der auf beyden Ebenen BCDEF, und GHIKL senkrecht steht.

Der Halbmesser $RB = \varrho$ des Kreises um BCDEF ist $= \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}FBC}$, und $\cos\frac{1}{2}FBC = \frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{2\sqrt{2}}$:

$$\text{also } \varrho = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} a = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} \cdot \frac{\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{\sqrt{(5-\sqrt{5})}} d = \frac{\sqrt{2}\sqrt{(3-\sqrt{5})}}{5-\sqrt{5}} d.$$

Durch die Axe AM, und alle übrige 10 Winkelpuncte des Icosaëdri kann man ebene Flächen legen; diese werden so viele größte Kreise geben, die sich unter Winkeln von 36° schneiden. Ihre Durchschnittspuncte mit den Parallelkreisen durch BCDEF und

GHIKL

GHIKL bestimmen die Winkelpuncte des Icosaëdri auf der Oberfläche der Kugel.

594. §.

Die Seite des regulären *Hexaëdri* ist gegeben: man soll die Grösse der Flächenwinkel den Durchmesser, oder Halbmesser, der um dasselbe zu beschreibenden Kugel, nebst dem Verhältniß des körperlichen Inhalts gegen den Würfel des Durchmessers der Kugel finden.

Aufl. Wenn A eine Ecke des Hexaëdri ist, und AB, AC, AD die drey Seitenlinien an dieser Ecke sind; so sind die Flächenwinkel an AB, AC, AD u. s. f. rechte Winkel. Denn es wird eines jeden dieser 223 Fig.

$$\text{Winkel Cosinus} = \frac{\cos 90° - (\cos 90°)^2}{(\sin 90°)^2} = \frac{0}{1} = 0,$$

also jeder Winkel $= 90°$. Demnach wird $\psi = 45°$,

$$\sin\psi = \cos\psi = \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}, \text{ und } \operatorname{tang}\psi = 1;$$

überdem ist $\varphi = 90°$, also auch $\sin\frac{1}{2}\varphi = \sqrt{\frac{1}{2}} = \cos\frac{1}{2}\varphi$, und $\operatorname{tang}\frac{1}{2}\varphi = 1$. Dies giebt $\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2 = \frac{1}{2}$,

$$\sqrt{(1 + \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2)} = \sqrt{(1 + \tfrac{1}{2})} = \sqrt{\tfrac{3}{2}},$$

$$\frac{\sqrt{(1 + \sin\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2)}}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \sqrt{\tfrac{3}{2}} : \sqrt{\tfrac{1}{2}} = \sqrt{3},$$

und $r = \frac{1}{2}a\sqrt{3}$, oder $d = a\sqrt{3}$.

Das Hexaëdrum ist mit dem Würfel (334. §.) einerley, also weiß man den Inhalt ohnehin zu berechnen. Es wird aber auch hier dieser Inhalt $= 6 \times \frac{1}{2}\frac{1}{4} na^3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi = a^3$, wie dem 350. §. gemäß

mäß ist, oder auch $= \frac{1}{3\sqrt{3}} d^3$, weil $a = \frac{1}{\sqrt{3}} d$.

Die Ebenen ADEH und BCFG schneiden einander in LM, so, daß LM auf den beyden Seitenflächen DEEG, ACHB senkrecht steht; und wenn KM $=$ KL ist: so ist K von allen Winkelpuncten des Körpers gleich weit entfernt: folglich ist K der Mittelpunct der um den Würfel zu beschreibenden Kugel. Die Ebenen ADEH und BCFG geben ein paar größte Kreise, die sich senkrecht schneiden, und ihre Durchschnittspuncte mit den Parallelkreisen durch DFEG und ACHB bestimmen die Winkelpuncte des Würfels auf der Oberfläche der Kugel. Es ist aber

$KL = \frac{1}{2}LM = \frac{1}{2}AD = \frac{1}{2}a = \frac{1}{2\sqrt{3}} d$, und DL

$= \frac{a}{2\cos\frac{1}{2}\varphi} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) . a = \frac{\sqrt{2}}{2} . \frac{1}{\sqrt{3}} d$,

also $DE = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} d$, oder $d = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}} DE$.

595. §.

Die Seite des *Dodecaëdri* ist gegeben, man soll die Grösse der Flächen-Winkel, den Durchmesser der Kugel, die sich um das *Dodecaëdrum* beschreiben läßt, und den körperlichen Inhalt desselben finden.

224 Fig.

Aufl. Ist A eine Ecke des Dodecaëdri: so ist jede Seitenfläche dieser Ecke $= 108°$. Da nun $\cos 108° = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$ (445. §.) und $\sin 108° = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{8}}$

$=$

$= \frac{\sqrt{(10+2\sqrt{5})}}{4}$: so wird des gesuchten Flächen-

winkels an AB Cosinus $= \left(\frac{1-\sqrt{5}}{4} - \frac{(1-\sqrt{5})^2}{4^2}\right)$:

$\frac{10+2\sqrt{5}}{16} = \frac{4-4\sqrt{5}-1+2\sqrt{5}-5}{16} : \frac{10+2\sqrt{5}}{16}$

$= -\frac{2+2r5}{10+2\sqrt{5}} = -\frac{1+\sqrt{5}}{5+\sqrt{5}}$. Man setze die-

sen Winkel $= \alpha$; so ist $\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = \frac{(\sin 54°)^2}{(\sin 180°)^2}$,

und man findet

$l\sin 54° = 9{,}9079576$

$l(\sin 54°)^2 + lr^2 = 39{,}8159152$

$l\sin 108° = 9{,}9782063$

$l(\sin 108°)^2 = 19{,}9564126$

$l\sin\frac{1}{2}\alpha^2 = 19{,}8595026$

$l\sin\frac{1}{2}\alpha = 9{,}9297513$,

also $\frac{1}{2}\alpha = 58°\ 16'\ 57''$

und $\alpha = 116°\ 33'\ 54''$.

Man setze nun $\frac{1}{2}\alpha = \psi$: so wird $\sin\psi =$

$\sqrt{\left(1+\frac{1+\sqrt{5}}{5+r5}\right)}:2 = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}+1+\sqrt{5}}{2\ (5+r5}}$

$= r\frac{3+r5}{5+r5}$, und $\cos\psi = r\left(1-\frac{1+r5}{5+r5}\right):2$

$= r\frac{5+r5-1-r5}{2(5+r5)} = r\frac{4}{2(5+r5)} =$

$\frac{r^2}{r(5+r5)}$, also $\operatorname{tg}\psi = \frac{r(3+r5)}{r^2}$. Ferner

wird $\varphi = 108°$, also $\sin\frac{1}{2}\varphi = r\left(1 - \frac{1-r5}{4}\right):2$

$= r\frac{4-1+r5}{8} = r\frac{3+r5}{8}$, $\cos\frac{1}{2}\varphi =$

$\sqrt{\left(1 + \frac{1-r5}{4}\right):2} = r\frac{(5-r5)}{8}$, also

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\varphi = \frac{r(3+r5)}{r(5-r5)}.$$

Man erhält demnach

$$\sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2 = \frac{3+r5}{8}\cdot\frac{3+r5}{2} = \frac{7+3r5}{8}$$

$$r(1 + \sin\tfrac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2) = r\frac{15+3r5}{8}, \text{ und}$$

$$\frac{r(1+\sin\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi^2)}{\cos\frac{1}{2}\varphi} = \frac{r(15+3r5)}{r(5-r5)}, \text{ also}$$

$$r = \tfrac{1}{2}a\frac{r15+3r5}{r(5-r5)}, \text{ oder}$$

$$d = a\frac{r15+3\sqrt{5}}{r(5-r5)}, \text{ und } a = \frac{r(5-r5)}{r(15+3r5)}d.$$

Der Abstand der Seitenflächen vom Mittelpunct

$$\text{ist } \tfrac{1}{2}a \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\varphi \operatorname{tg}\psi = \tfrac{1}{2}a\frac{r(3+r5)}{r(5-r5)}\cdot\frac{r(3+r5)}{r2}$$

$$= \tfrac{1}{2}a\frac{3+r5}{r2(5-r5)} = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{r2}\cdot$$

$$\frac{3+\sqrt{5}}{r(15+3r5)}d = \tfrac{1}{2}\cdot\frac{1}{r2}\cdot\frac{1}{r3}\cdot$$

$\frac{3+r5}{r(5+r5)}d$, wie beym Icosaëdro.

Der

Der körperliche Inhalt wird $= \frac{60}{24} a^3 \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi^2 \operatorname{tg}\psi$

$= \frac{5}{2} \cdot \frac{3+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}} \cdot \frac{\sqrt{(3+\sqrt{5})}}{\sqrt{2}} a^3$, und weil $a =$

$\frac{\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{\sqrt{3}\sqrt{(5+\sqrt{5})}} d$, also $a^3 = \frac{(5-\sqrt{5})\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{3(5+\sqrt{5})\sqrt{3}\sqrt{(5+\sqrt{5})}} d^3$:

so wird dieser Inhalt $= \frac{5}{6} \cdot \frac{(3+\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}\sqrt{(5-\sqrt{5})}}{(5+\sqrt{5})^{\frac{3}{2}}\sqrt{6}}$.

Es sey ABCDE eine Seitenfläche des Dodecaëdri, und ABGMF, BGNHC ein paar an der vorigen anliegende: so erhellet, daß die graden Linien AF, BG, CH, u. s. f. auch die hinterwärts durch D und E gehenden Seitenlinien DI, EK, gegen die Ebene ABCDE unter gleichen Winkeln geneigt sind (511. §.). Weil nun AF = BG = CH u. s. f.; so sind die graden Linien, welche von F, G, H, u. s. f. auf die Ebene ABCDE senkrecht fallen, gleich groß: folglich sind die Puncte F, G, H, I, K in einer mit ABCDE parallelen Ebene. Eine grade Linie MZ, die von M auf AB senkrecht fällt, halbirt AB; und wenn X des Kreises um ABCDE Mittelpunct ist, so geht eine Linie XZ von X auf AB senkrecht gezogen ebenfalls durch Z, so daß MZX der Flächenwinkel des Dodecaëdri ist, und zugleich der Neigungswinkel der Linie MZ gegen ABCDE. Die senkrechten Linien von N auf BC, von O auf CD, von P auf DE, von L auf AE sind gleich groß, und ihr Neigungswinkel gegen ABCDE ist = MZX: also sind auch L, M, N, O, P von der Ebene ABCDE gleichweit entfernet, und liegen in einer, mit ABCDE parallelen Ebene. Mit diesen Ebenen ist auch QRSTV parallel.

Eine Ebene durch AF auf ABCDE senkrecht gesetzt halbirt den Winkel BAE (511. §.), und die Durchschnittslinie geht durch X (139. §.). Man hat aber in dem rechtwinklichten soliden Dreyeck bey A, dessen Seitenlinien AB, AF, AX sind, $\text{col}FAX = \frac{\text{col}FAB}{\text{col}BAX} = \frac{\text{col}\,108^\circ}{\text{col}\,\frac{1}{2}108^\circ} = \frac{1-r5}{4} : \frac{\sqrt{(5-r5)}}{2r2} = \frac{1-r5}{4} : \frac{r(5-r5)r2}{4} = \frac{1-r5}{r(5-r5)r2}$

Weil nun FAX stumpf ist, so ist sein Nebenwinkel FAW spitz, und $\text{col}FAW = \frac{r5-1}{r(5-r5)r2}$:

also wird $\text{sin}FAW = r\left(1 - \frac{(r5-1)^2}{2(5-r5)}\right) = r\frac{10-2r5-5+2r5-1}{2(5-r5)} = \frac{2}{r2r(5-r5)}$,

und FW, des Puncts F oder der Ebene FGHIK Abstand von der Ebene ABCDE, wird = AF.

$\text{sin}FAW = \frac{2a}{r2r(5-\sqrt{5})}$: oder weil $a = \frac{r(5-r5)}{r3r(5+r5)}d$ ist, so wird $WF = \frac{2d}{r2r3r(5+r5)}$. Nun war die Ebene ABCDE vom Mittelpunct der Kugel um die Distanz $\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\cdot\frac{3+r5}{\sqrt{(5+r5)}}d$ entfernt.

Diese

Diese sey = D: so ist die Ebene FGHIK vom Mittelpunct um die Distanz D — WF entfernt. Diese wird also = $\frac{1}{r^2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{1}{r(5+r5)}$

$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2} - 2\right) d = \frac{\sqrt{5}-1}{2\sqrt{2}\sqrt{3}\sqrt{(5+\sqrt{5})}} d.$

Eben so weit ist die Ebene LMNOl' auf der andern Seite vom Mittelpunct der Kugel entfernt.

Man kann also in einer gegebenen Kugel auf folgende Art das Dodecaëdrum verzeichnen. Durch eine willkührliche Axe der Kugel lege man auf beyden Seiten vom Mittelpunct zwo senkrechte Ebenen in den Entfernungen D und D — WF vom Mittelpunct. Durch die Axe lege man fünf ebene Flächen unter gleichen Winkeln von 36°, diese werden so viele gröste Kreise geben, welche jeden der vier Parallelkreise in zehn Puncten schneiden. Wenn man nun in jedem dieser Parallelkreise 5 Puncte nimmt, die um 72° von einander abstehen, so daß wechselsweise je zweene und zweene in einerley grösten Kreise liegen; so hat man die 20 Winkelpuncte des Dodecaëdri.

Der XXVII. Abschnitt.

Von der Cylinder- und Kegel-Fläche.

596. §.

Wenn AC ein graber Cylinder ist, in dessen Grundfläche AB man ein reguläres Polygon beschrieben hat; wenn man ferner durch alle Winkelpuncte A, 225 Fig.

E, B, u. s. f. des Polygons die graden Linien AD, EF, u. s. f. mit der Axe des Cylinders parallel ziehet, welche den Umfang der entgegengesetzten Grundfläche, in D, F, C u. s. f. treffen: so schliessen die Ebenen dieser Parallellinien nach der Ordnung genommen AF, EC u. s. f. ein senkrechtes im Cylinder beschriebenes Prisma ein, wie im 368. §.

Durch die Cylinder-Fläche soll in der Folge der Kürze wegen allemahl die krumme Oberfläche des graden Cylinders, ohne die Grundflächen, durch die prismatische Fläche im Cylinder aber die Oberfläche des im Cylinder beschriebenen Prisma ohne dessen Grundflächen verstanden werden.

Wäre um die Grundfläche des graden Cylinders ein reguläres Polygon durch die Berührungspuncte A, E, B, u. s. f. beschrieben, und man legte durch alle Seitenlinien desselben ebene auf der Grundfläche senkrechte Flächen; so würden diese mit der erweiterten Ebene der entgegengesetzten Grundfläche ein senkrechtes um den Cylinder beschriebenes Prisma einschliessen, wie im 368. §.

Die Oberfläche dieses Prisma, seine Grundflächen ungerechnet, soll hinführo die prismatische Fläche um den Cylinder heissen.

597. §.

Die Prismatische Fläche im Cylinder ist allemahl kleiner, aber die prismatische Fläche um den Cylinder, allemahl grösser, als die Cylinderfläche.

598. §.

Die Oberfläche eines graden Cylinders ist so groß, als ein Rechteck, dessen eine Seite dem

dem Umfang der Grundfläche, die andre aber der Höhe des Cylinders gleich ist.

Beweis. Es sey des Rechteckes GI Grundlinie GH dem Umfang der Grundfläche AB, die Höhe GK der Höhe AD des Cylinders gleich, und die Cylinderfläche sey = C. Wofern nun C < GI ist; so nehme man GI:C = GH:GL, und es wird GL < GH sey. Man ziehe LM # HI: so ist GH : GL = GI:GM, also wird GI:C = GI:GM, und C = GM. Da nun GH = dem Umfang der Grundfläche AB: so ist GL kleiner, als dieser Umfang. Man beschreibe demnach im Kreise AB ein reguläres Polygon AEBZ, dessen Umfang grösser, als GL ist (221. §.), und dieser Umfang sey = GN: so muß GN < GH seyn (138. §.). Auf diesem Polygon, als der Grundfläche, beschreibe man ein Prisma im Cylinder, und dessen Fläche ohne die Grundflächen sey = P. Wenn nun NO mit HI parallel ist, so wird GO = P (584. §.), also P > GM, oder P > C, welches dem 597. §. entgegen ist. 225 Fig.

Wäre C > GI, so nehme man GI:C = GH:GQ und es wird GQ > GH seyn. Man ziehe QR # HI: so ist GH:GQ = GI:GR, und C = GR. Weil GQ grösser, als des Kreises GH Umfang ist; so beschreibe man um den Kreis AB ein reguläres Polygon, dessen Umfang kleiner, als GQ ist (222. §.). Dieser Umfang sey = GS, und ST # HI: so ist GS < GQ (144. §.), und GT < GR. Auf dem Polygon um den Kreis AB als der Grundfläche beschreibe man ein Prisma um den Cylinder (596. §.) und dessen Fläche, ohne die Grundflächen, sey = Π: so wird GT = Π seyn (584. §.). Also ist Π < GR, folglich auch Π < C, welches mit dem 597. §. streitet.

Kann aber die Cylinderfläche weder gröſſer, noch kleiner, als GI seyn: so ist sie diesem Rechteck gleich.

1. Zusatz. Wenn also der Grundfläche Durchmesser $= d$, des Cylinders Höhe $= a$ ist: so wird die Cylinderfläche $= \pi ad$ (466. 276. §).

2. Zusatz. Ungleich hoher Cylinder Flächen verhalten sich wie der Cylinder Höhen, wenn die Grundflächen gleich sind (245. §.).

3. Zusatz. Gleich hoher Cylinder Flächen verhalten sich wie die Peripherien oder Halbmesser der Grundflächen (244. 223. §.).

599. §.

225 Fig. Die Cylinder-Fläche ist einem Kreise K gleich, dessen Halbmesser R die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen des Cylinders Höhe A, und der Grundfläche Durchmesser D ist.

Beweis. Es sey $GV = 2GK$: so ist das Dreyeck $GHV = GI = C$. Wenn nun $GW =$ dem Halbmesser ϱ der Grundfläche AB ist; so wird das Dreyeck $GHW = AB$ (150. §.): demnach ist $C : AB = GHV : GHW$ (158. §.) $= GV : GW$ (245. §.) Da nun $GV : GK = D : \varrho$, oder $D \times GK = D \times A = \varrho . GV$, ferner $A : R = R : D$, oder $A . D = R^2$ ist, vermöge der Voraussetzung; so wird $\varrho . GV = R^2$, oder $GV : R = R : \varrho$. Demnach ist $GV : \varrho = R^2 : \varrho^2$ (235. 236. §.) $= GV : GW$, und $C : AB = R^2 : \varrho^2$. Aber auch $K : AB = R^2 : \varrho^2$ (255 §.), also $C : AB = K : AB$ und $C = K$.

600. §.

225 Fig. Wenn eine Ebene den graden Cylinder durch die Axe schneidet: so ist die Durchschnittsfigur ein Rechteck

cke ABCD, dessen eine Seite AB dem Durchmesser der Grundfläche, die andre Seite AD des Cylinders Höhe gleich ist (364. §.). Dies soll der Kürze wegen das Rechteck durch die Axe heissen.

Zusatz. Die Oberflächen ungleicher Cylinder verhalten sich, wie die Rechtecke durch ihre Axe. Denn sie verhalten sich wie die ihnen gleichen Kreise, und diese, wie die Quadrate ihrer Halbmesser, und diese Quadrate sind den Rechtecken durch die Axe gleich (248. §.).

601. §.

Wenn in des senkrechten Kegels ABD Grundfläche ein reguläres Polygon BCDE beschrieben ist, und man ziehet die Seiten des Kegels AB, AC, AD, u. s. f.; so erhält man eine gleichseitige im Kegel beschriebene Pyramide ABCDE. Wenn aber um die Grundfläche BD eines graden Kegels ein reguläres Polygon FGHI beschrieben ist, dessen Seitenlinien des Kegels Grundfläche in B, C, D, u. s. f. berühren, und man ziehet die Seiten des Kegels AB, AC, AD u. s. f.: so schliessen die Ebenen durch jede Polygonseite der Grundfläche, und die zugehörige Seite des Kegels, eine gleichseitige um den Kegel beschriebene Pyramide ein. 226 Fig.

Durch die Kegel-Fläche wird in der Folge die krumme Oberfläche des graden Kegels ohne die Grundfläche, und durch die Pyramiden-Fläche in und um den Kegel ebenfalls die Oberfläche der in oder um den Kegel beschriebenen Pyramide, die Grundfläche ungerechnet, verstanden werden.

602. §.

Die Pyramidenfläche im Regel ist allemahl kleiner; die Pyramidenfläche um den Regel aber grösser, als die Regelfläche.

603. §.

226 227 Fig. Die Regelfläche *ABD* ist einem Dreyeck *FGH* gleich, dessen Grundlinie *FG* so groß, als der Umfang der Grundfläche *BD* des Kegels, die Höhe *FH* aber so groß, als die Seite *AB* des Kegels ist.

226 Fig. Beweis. Die Kegelfläche kann weder grösser noch kleiner als das Dreyeck FGH seyn. Es sey nemlich die Kegelfläche = C, und man setze zuerst, daß C > FGH sey. Man nehme FGH:C = FG:FI: so ist FI > FG. Ziehet man nun HI, so ist FGH:FIH = FG:FI, also FGH:C = FGH:FIH, und C = FIH. Da nun FI grösser ist, als FG, d. i. grösser, als der Umfang der Grundfläche BD; so beschreibe man um dieselbe ein reguläres Polygon, dessen Umfang < FI ist, und setze auf demselben als der Grundfläche eine um den Kegel ABD beschriebene Pyramide. Wenn nun FK diesem Umfang gleich ist, so muß FK > FG seyn (144. §.). Man ziehe HK, so ist daß Dreyeck FHK = der Pyramidenfläche um den Kegel (589. §.). Aber es ist FHK < FHI (244. §.): also die Pyramidenfläche um den Kegel kleiner als die Kegelfläche, welches dem 602. §. zuwider ist.

227 Fig. Man nehme nun fürs zweyte an, daß C < FGH sey und FGH:C = FG:FP: so wird FP < FG. Es sey ferner FI zwischen FG und FP eine mittlere geometrische

trische Proportionallinie, so, daß EG:FI = FI:FP ist, und man ziehe IK mit GH parallel; so wird das Dreyeck FKI ∽FGH, und FGH:FKI = FG²:FI² (250. §.). Aber FG²:FI² = FG:FP (235.236.§.), also FGH:FKI = FGH:C, und FKI = C. Wenn nun C der Mittelpunct von der Grundfläche des Kegels und CB ihr Halbmesser ist; so nehme man ferner FG:FI = CB:CE, und beschreibe mit dem Halbmesser CE, der kleiner als CB seyn wird, einen Kreis ES aus dem Mittelpunct C. Im Kreise BD aber beschreibe man ein reguläres Polygon, dessen Seiten vom Mittelpunct C weiter, als um die Distanz CE entfernt sind (138. §.). Eine Seite dieses Polygons sey MN, und MN sey bey O in zweene gleiche Theile getheilt. Durch den Punct O, und des Kegels Axe lege man eine Ebene ACO: so steht ihr Durchschnitt CO mit der Grundfläche auf MN senkrecht. Nun treffe CO verlängert den Umfang der Grundfläche in B, so ist AB eine Seite des Kegels. Durch E sey EL mit AB parallel, und überdem AO und OL gezogen. Weil nun vermöge der Voraussetzung FG:FI = CB:CE, und CB:CE = Umfang BD:Umfang ES; so ist FG:FI = Umf. BD: Umf. ES, und FI = Umf. ES. Weil ferner CB:CE = AB:EL, und FG:FI = FH:FK, so ist auch AB: EL = FH:FK, und EL = FK. Es erhellet aber daß AB > AO, AO > OL, OL > LE sey (76. §.). Nimmt man also FQ = AO: so fällt Q zwischen K und H. Ueberdem ist der Umfang des in dem Kreise BD beschriebenen Polygons, wovon MN eine Seite war, grösser als der Umf. ES, und kleiner als der Umf. BD. Nimmt man also FR = dem Umfang dieses Polygons, so fällt R zwischen I und G.

Man

Man ziehe QR: so ist das Dreyeck FQR ▷ FKI. Es sey auf dem Polygon, als der Grundfläche, eine Pyramide im Kegel ABD beschrieben (601. §.), und ihre Fläche ohne die Grundfläche = P: so ist P = FQR (589. §.), also P ▷ FKI, oder P ▷ C, welches wiederum mit dem 602. §. streitet.

Kann aber die Kegel-Fläche weder grösser, noch kleiner als FGH seyn, so ist sie diesem Dreyeck gleich.

604 §.

227 Fig. Man nehme nun FT = CB dem Halbmesser der Grundfläche des Kegels: so ist das Dreyeck FGT der Grundfläche gleich (150. §.). Also verhält sich die Kegelfläche zur Grundfläche des Kegels = Dr. *FGH*: Dr. *FGT* = *FH*: *FT*, d. i. wie die Seite des Kegels zum Halbmesser der Grundfläche.

605. §.

226 Fig. Die Kegelfläche *C* ist einem Kreise *K* gleich, dessen Halbmesser *R* die mittlere geometrische Proportionallinie zwischen der Seite des Kegels, und dem Halbmesser ϱ der Grundfläche *BD* ist.

Beweis Es ist C: BD = AB: ϱ (604. §.). Weil nun AB: R = R: ϱ, wie vorausgesetzt wird: so ist AB: $\varrho = R^2 : \varrho^2$ (235. 236. §.), und $C : BD = R^2 : \varrho^2$. Da aber überdem $R^2 : \varrho^2 = K : BD$ (255. §.): so wird C: BD = K: BD, und C = K.

606. §.

Ein Rechteck, dessen eine Seite dem Halbmesser der Grundfläche, die andre aber der Seite des Kegels

gels gleich ist, soll der Kürze wegen das Rechteck der Kegelfläche heissen.

1. Zusatz. Die Flächen ungleicher Kegel verhalten sich, wie die Rechtecke dieser Flächen. Denn sie verhalten sich, wie die ihnen gleiche Kreise, und diese wie die Quadrate ihrer Halbmesser, aber diese Quadrate sind so groß, als die Rechtecke der den Kreisen gleichen Kegelflächen (248. §.).

2. Zusatz. Die Fläche eines Cylinders verhält sich zur Fläche eines Kegels, wie das Rechteck durch des Cylinders Axe zum Rechteck der Kegelfläche. Denn auch diese Flächen verhalten sich, wie die ihnen gleichen Kreise, also wie die Quadrate der Halbmesser dieser Kreise, oder die denselben gleichen Rechtecke (248. §.).

607. §.

Wenn eine Ebene DE den graden Kegel mit der Grundfläche BC parallel schneidet: so heißt das Stück BDEC dieses Kegels, was zwischen den parallelen Ebenen DE, BC liegt, ein abgekürzter Kegel. Die Durchschnittsfigur DE ist ein Kreis, und die beyden parallelen Kreise BC, DE heissen die Grundflächen des abgekürzten Kegels. Das Stück BD der Seite AB des ganzen Kegels zwischen den beyden Grundflächen, wird die Seite des abgekürzten Kegels, und FG das Stück der Axe AF des ganzen Kegels zwischen diesen Grundflächen die Axe des abgekürzten Kegels genant: letztere ist mit der Höhe desselben einerley. Ein Rechteck, dessen eine Seite der Summe der Halbmesser beyder Grundflächen, die andre aber der Seite des abgekürzten Kegels gleich ist, kann kurz das Rechteck der abgekürzten Kegelfläche heissen. 228 Fig.

Zu-

Zusatz. Der Schnitt durch die Axe des abgekürzten Kegels ist ein Trapezium, und jede von den beyden parallelen Seiten BD, CE macht mit den übrigen beyden inwärts der Figur gleich grosse Winkel. Dies Trapezium wird von der Axe GF in zwo andre BDGF, CEGF getheilt, und in jedem derselben stehen beyde parallele Seiten auf einer der übrigen senkrecht. Man kann sich die Vorstellung machen, der abgekürzte Kegel entstehe, indem sich das Trapezium BDEC um seine Axe GF drehet, bis EC in BD, und BD hinwiederum in EC kommt. Auf solche Art beschreibt BDGF die eine, und CEGF die andre Hälfte des abgekürzten Kegels, die Seite BD aber die eine Hälfte, und CE die andre Hälfte der krummen Oberfläche. Diese letzte wird allemahl ohne den Grundflächen verstanden, wenn in der Folge von der abgekürzten Regelfläche die Rede ist.

608 §.

228 Fig. Den körperlichen Inhalt des abgekürzten Regels $BDEC$ zu finden, wenn der Halbmesser $FB = r$ der grössern Grundfläche, und die Höhe des Körpers $GF = a$, nebst dem Neigungswinkel $DBF = \varphi$ der Seite gegen die Grundfläche gegeben sind.

Aufl. Wenn die verlängerte Seite BD die Axe FG in A schneidet; so ist AF die Höhe des zugehörigen ganzen Kegels, und GA die Höhe des abgeschnittenen Theils. Nun ist der ganze Kegel ABC $= \frac{1}{3}\pi rr$. AF, und der Kegel ADE $= \frac{1}{3}\pi$. DG^2. AG (373. §.): also ist der abgekürzte Kegel BDEC $= \frac{1}{3}\pi rr$. AF $- \frac{1}{3}\pi$ DG^2. AG. Nun sey DY auf BF senkrecht: so wird BY $= a \cot\varphi$, und FY $=$ DG $= r - a\cot\varphi$. Ferner ist AF $= r\,\mathrm{tang}\varphi$, und AG $= r$

tang

$\text{tang}\varphi - a = \frac{1}{\cot\varphi}(r\,\text{tang}\varphi - a)\cot\varphi = \text{tang}\varphi(r - a\cot\varphi)$: also wird des abgekürzten Kegels BDEC Inhalt $= \frac{1}{3}\pi(r^3\,\text{tg}\varphi - (r - a\cot\varphi)^3\,\text{tg}\varphi) = \frac{1}{3}\pi\,\text{tang}\varphi\,(r^3 - (r - a\cot\varphi)^3)$.

Zusatz. Es sey $DG = \varrho$, so ist $r - a\cot\varphi = \varrho$ $\cot\varphi = \frac{r-\varrho}{a}$, und $\text{tang}\varphi = \frac{a}{r-\varrho}$. Das giebt den abgekürzten Kegel $= \frac{1}{3}\pi \cdot \frac{a}{r-\varrho}\cdot(r^3 - \varrho^3)$.

Diese Formul dient, wenn anstatt φ der Halbmesser ϱ gegeben wäre.

609. §.

Die abgekürzte Kegelfläche *BDEC* verhält sich zur Fläche eines jeden ganzen Kegels *STW*, wie das Rechteck der abgekürzten Kegelfläche zum Rechteck der ganzen Kegelfläche. 228 229 Fig

Beweis. Wenn AB die Seite des ganzen Kegels ist, wovon BDEC ist abgeschnitten worden; so sey HI = AB, und HK = BF auf HI senkrecht. Ferner KL ∥ HI, IL ∥ HK: so ist HKLI das Rechteck der ganzen Kegelfläche ABC. Ferner sey KM = DG, also HM = BF + DG, und HN = BD, also NI = AD; überdem MO ∥ HN, NO ∥ HM: so wird HMON das Rechteck der abgekürzten Kegelfläche BDEC. Man ziehe IK, welche NO in P schneidet, und durch P mit HI die Linie QR parallel: so ist HI : NI = HK : NP, oder AB : AD = BF : NP, also NP = AD × BF : AB = DG = MK. Weil nun MO = HN, so wird das Rechteck HP = KO (105. §.) =

PL (108. §.) und NR ist das Rechteck der Kegelfläche ADE, weil $NI = HI - HN = AB - BD = AD$, und $NP = DG$ ist. Nun ist die Kegelfläche ABC: Kegelfläche $ADE = HL : NR$ (606. §.), also $ABC - ADE : ADE = HL - NR : NR$ (189. §.). Ferner ist ABC – ADE = der abgekürzten Kegelfläche BDEC, überdem $HL = KN + NR + PL = KN + NR + KO$, also $HL - NR = KN + KO = HMON$: folglich wird $BDEC : ADE = HMON : NR$, oder $BDEC : ADE = BD \times (BF + DG) : AD \times DG$. Endlich ist auch $ADE : STW = AD \times DG : ST \times TV$ (606. §.), also $BDEC : STW = BD \times (BF + DG) : ST \times TV$.

610. §.

228 Die abgekürzte Kegelfläche *BDEC* ist einem
229 Kreise *K* gleich, dessen Halbmesser *R* die mit-
Fig. lere geometrische Proportionallinie ist zwi-
schen der Seite *BD* der Kegelfläche, und der Summe der Halbmesser ihrer Grundflächen *BF* und *DG*.

Beweis. Es sey Q ein Kreis, dessen Halbmesser ϱ zwischen der Seite ST und dem Halbmesser TV der Grundfläche des ganzen Kegels STW die mittlere Proportionallinie ist: so hat man $R^2 = BD \times (BF + DG)$ und $\varrho^2 = ST \times TV$ (248. §.). Es ist aber BDEC: Kegelfl. $STW = BD \times (BF + DG) : ST \times TV$ (589. §.) $= R^2 : \varrho^2 = K : Q$ (255. §.); und weil die Kegelfläche $STW = Q$ (605. §.), so wird $BDEC = K$.

611. §.

Abgekürzte Kegelflächen verhalten sich wie ihre Rechtecke. Denn sie verhalten sich wie die

ihnen

ihnen gleichen Kreise. also wie die Quadrate der Halbmesser dieser Kreise, denen jene Rechtecke gleich sind (248. §.).

Eine abgekürzte Kegelfläche verhält sich zur Cylinderfläche, wie das Rechteck jener Kegelfläche zum Rechteck durch des Cylinders Axe. Denn auch diese Flächen verhalten sich, wie die ihnen gleichen Kreise, also wie die Quadrate der Halbmesser dieser Kreise, folglich wie die genannten Rechtecke (248. §.).

612. §.

Es sey AB ein Durchmesser des Kreises, dessen Mittelpunct C ist, und DE ein andrer Durchmesser, der auf dem vorigen senkrecht steht. In dem verlängerten Halbmesser CD sey ein Punct F genommen, und durch denselben ziehe man ein paar Tangenten des Kreises, FH, und FK (126. §.) so, daß G und I die Berührungspuncte sind. Man nehme auf der andern Seite dieser Berührungspuncte GH = IK, und ziehe HK; so wird FHK ein gleichschenklichtes Dreyeck (127. §.) dessen Grundlinie von CF senkrecht in O halbirt wird. Die Sehne GI wird ebenfalls von CF bey N senkrecht halbirt. 230 Fig.

Wenn nun der Kreis sich nebst dem Dreyeck um die Axe EF drehet: so beschreibt der Kreis eine Kugel (389. §.), und das Dreyeck einen senkrechten Kegel (366. §.), GI aber wird der Durchmesser eines Parallelkreises der Kugel, dessen Umfang zugleich in der Kugel- und Kegelfläche liegt. Uebrigens aber fällt jeder andre Punct der Kegelfläche, der nicht im Umfang des Parallelkreises liegt, ausserhalb der Kugel. Denn ein solcher Punct wie H mag in der Kegelflä-

che liegen, wo er wolle: so lege man durch ihn, und die Axe FE, eine Ebene, diese schneidet die Kegelfläche in einer graden Linie HF. Nun mag H entweder mit F auf einer, oder verschiedenen Seiten des Parallelkreises liegen: so trift doch HF den Umfang des Kreises irgendwo in einem Puncte, wie G. Denn aber ist CG auf FH senkrecht, weil CG so, wie auch FG mit der Ebene des Parallelkreises allemahl gleiche Winkel macht, wo auch der Punct G im Umfang desselben genommen wird. Demnach ist CH > CG, und H fällt ausserhalb der Kugel.

Die Kegelfläche stößt also auf ihrer inwendigen hohlen Seite mit der Kugelfläche so zusammen, daß kein Punct von ihr innerhalb der Kugel fällt, und man sagt in dem Fall, daß beyde Flächen einander berühren. In dem jetzt erwogenen Fall wird die Kegelfläche von der Kugel von innen berührt. Sonst kann die Kugel auch die Kegelfläche von aussen berühren, und man siehet leicht, daß beyde Flächen in dem letzten Fall nur einen Punct gemein haben können, da sie sich gegentheils in dem ersten Fall in einem Kreise berühren, der eben deswegen der **Berührungskreis** genannt wird.

613. §.

Wenn eine Kugel die Kegelfläche von innen so berührt, daß die Ebene des Berührungskreises die Axe der Kegelfläche halbirt: so ist die Kegelfläche einer eben so hohen Cylinderfläche gleich, die eine dem grösten Kreise der Kugel gleiche Grundfläche hat.

230 Fig. **Beweis.** Wenn in der Zeichnung des vor. §. GH = GF, also auch IK = IF genommen wird: so wird

auch

auch ON=NF, und die Ebene des Berührungskreises halbirt die Höhe OF des Kegels. Man ziehe auch durch A und B Tangenten des Kreises, welche HK in P und Q schneiden, und durch F eine grade Linie LM mit AB parallel, welche diese beyde Tangenten in L und M schneidet; so stellet PLMQ den Schnitt durch die Axe eines graden Cylinders vor, dessen Höhe = OF, und dessen Grundfläche Durchmesser PQ dem Durchmesser der Kugel AB gleich ist.

Es sey HV mit dem Durchmesser GT parallel, und werde von DE in V geschnitten: so hat man FG: FH=GC:HV, folglich ist HV=2GC=AB=PQ Ueberdem wird HV:HO=HF:FO (214. §.), oder PQ:HO=HF:PL, also PQ×PL=HO×HF (199. §.). Demnach ist das Rechteck der Cylinderfläche dem Rechteck der gleich hohen Kegelfläche gleich, woraus beyder Flächen Gleichheit folgt (606. §.).

614. §.

Die abgekürzte Kegelfläche ist einer eben so hohen Cylinderfläche gleich, wenn die Grundfläche des Cylinders dem grösten Kreise der Kugel gleich ist, welche die Kegelfläche von innen berührt, und der Berührungskreis die Höhe der abgekürzten Kegelfläche halbirt. 231 Fig.

Beweis. Wenn AB, ED wie vorhin, ein paar senkrechte Durchmesser des Kreises um C sind, so ziehe man durch einen beliebigen Punct G des Quadranten AD eine Tangente, und nehme auf derselben GH = GR; die Sehne GI sey mit AB parallel, durch I ebenfalls eine Tangente gezogen, und auf derselben IK = IS = GH genommen. Man ziehe

HK, und RS; so ist RS ∥ GI ∥ HK. Ueberdem ist der Winkel RGI = GIS = RHK = HKS, und das Trapezium stellet den Schnitt durch die Axe eines abgekürzten Kegels vor (607. §.), dessen Fläche die Kugel, wovon ADBE ein gröster Kreis ist, berührt. Des Berührungskreises Durchmesser ist GI, und die Ebene desselben halbirt die Höhe OF des abgekürzten Kegels bey N. Wenn nun auch durch A und B ein paar Tangenten gezogen sind, welche HK in P und Q, RS aber in L und M schneiden: so ist PLMQ der Schnitt durch die Axe eines senkrechten Cylinders, dessen Höhe = OF, und dessen Grundfläche so groß, als der gröste Kreis der berührenden Kugel ist, weil PQ = AB. Es sey nun RV auf HK senkrecht, so wird CGN + NGR = R = CGN + GCN, also NGR = RHV = GCN, und das Dreyeck HRV ∽ CGN; folglich HR : RV = CG : GN = GT : GI (181. §.), oder HR : PL = PQ : OH + FR (206. §.) und HR × (OH + FR) = PL × PQ. Demnach sind die Rechtecke der Kegel- und Cylinderfläche, folglich die Flächen selbst gleich (611. §.).

Der XXVIII. Abschnitt.

Von der Kugelfläche und den Abschnitten und Ausschnitten der Kugel.

615. §.

232 Fig. Es sey EDM ein Kreisbogen, den man bey D halbirt hat, und jede Hälfte sey aufs neue in den Puncten F, G, H, I, K, L in eine beliebige gra-

de

de Anzahl gleicher Theile getheilt. Durch den ersten Theilungspunct F ziehe man eine Tangente des Kreises, welche den Halbmesser CE in N schneidet; so ist FN des Bogens FE Tangente (407. §.). Man nehme FO = FN, und ziehe durch O die zweyte Tangente (126. §.): so geht diese durch H, und FO wird des Bogens FG, HO des Bogens HG Tangente. Man nehme wiederum HP = HO, und ziehe durch P die zweyte Tangente: so geht diese durch I. Nimmt man wieder IQ = IP, und fährt mit Verzeichnung der Tangenten auf eben die Art fort, so wird die Tangente durch den letzten Theilungspunct L den Halbmesser CM in R so schneiden, daß auch LR = FN = FO, u. s. f. wird.

Weil nun die Anzahl der Theile von E bis D grade ist, so geht keine von den Tangenten durch D. Wenn nemlich E nicht mitgezählt wird, so geht durch den 1sten, 3ten, 5ten Theilungspunct eine Tangente allemahl durch einen solchen, der von E um eine ungrade Anzahl von Theilen entfernt ist. Demnach ist D kein Berührungspunct: allein der Halbmesser CD geht durch den Durchschnittspunct P der beyden durch H und I gezogenen Tangenten.

Nun sey der Durchmesser AB auf CD senkrecht, und man ziehe durch A und B ein paar Tangenten, durch P aber VX mit AB parallel. Endlich ziehe man die Linien NR, OQ u. s. f., welche die durch A und B gezogenen Tangenten in S, T, Y, Z schneiden: so giebt sich ein Rechteck SVXT. Drehet sich nun die ganze Figur um die Axe CP: so wird aus dem Dreyeck OPQ ein Kegel, aus NOQR ein abgekürzter Kegel, u. s. f. aus SVXT aber ein Cylinder, dessen Grundfläche dem grösten Kreise der Kugel

gleich ist, seine Höhe aber der Höhe aller Conischen Körper, die die Kugel umgeben, zusammengenommen.

Die Cylinderfläche *SVXT* ist so groß, als die Summe aller Conischen Flächen *NOPQR* zusammen. Denn es ist die Fläche OPQ = YVXZ (613. §.), die Fläche NOQK = SYZT (614. §.) u. s. f.: also die Summe der Conischen gleich der ganzen Cylindrischen Fläche.

616. §.

Die Sehne EM in der Zeichnung des vor. §. wird der Durchmesser eines Parallelkreises, und CD geht durch seinen Mittelpunct W. Das Stück der Kugel zwischen dem Parallelkreis EM, und dem von EDM beschriebenen Theil der Kugelfläche, heißt ein Abschnitt der Kugel, und das Stück DW der Axe des Parallelkreises EM, so in diesen Abschnitt fällt, die Höhe des Kugelabschnitts. Die Conischen Flächen NOPQR kann man um den Kugel-Abschnitt *EDM* beschriebene, nennen.

1. Zusatz. Die Summe *NOPQR* der um den Kugel Abschnitt beschriebenen Conischen Flächen ist grösser, als die Kugelfläche *EDM* des Abschnitts. Weil nemlich FN > FE ist (127. §.); so siehet man leicht, daß das Stück der Conischen Fläche zwischen den Kreisen FL, und NR, grösser seyn werde, als das Stück der Kugelfläche zwischen FL, und EM, u. s. f.

2. Zusatz. Wäre mit dem Halbmesser CN ein Kreisbogen durch die Puncte N, O, P, Q, R beschrieben, als der Schnitt durch die Axe eines neuen Kugel-Abschnitts: so würde die Summe der in

dies

diesem Kugel-Abschnitt beschriebenen Conischen Flächen *NOPQR* kleiner seyn, als die Kugelfläche dieses neuen Kugel-Abschnitts, dessen Halbmesser *CN* ist.

617. §.

Wenn der Kugel-Abschnitt *EDM* kleiner als die Halbkugel ist: so ist das zugehörige Stück der Kugelfläche so groß, als eine Cylinderfläche von eben der Höhe, deren Grundfläche dem grösten Kreise der Kugel gleich ist.

Beweis. In der letzten Zeichnung schneide EM die Tangente durch A und B in α und β, und durch D sey die Tangente $\gamma\delta$ gezogen: so giebt sich ein Rechteck $\alpha\gamma\delta\beta$, als der Schnitt durch die Axe eines Cylinders, dessen Höhe = WD, und dessen Grundfläche dem grösten Kreise der Kugel um C gleich ist. 232 Fig.

Nun sey die Kugelfläche des Abschnitts EDM = S, und $S \rhd$ die Cylinderfläche $\alpha\gamma\delta\beta$. Wenn demnach $\alpha\gamma\delta\beta : S = \alpha\gamma : \alpha\varepsilon$ ist, so wird $\alpha\varepsilon \rhd \alpha\gamma$ seyn. Man ziehe $\varepsilon\zeta$ mit $\alpha\beta$ parallel: so wird das Rechteck $\alpha\varepsilon\zeta\beta$ der Schnitt durch die Axe eines Cylinders, der mit $\alpha\gamma\delta\beta$ einerley Grundfläche, aber eine grössere Höhe hat. Also ist $\alpha\gamma : \alpha\varepsilon = \alpha\gamma\delta\beta : \alpha\varepsilon\zeta\beta$, und $S = \alpha\varepsilon\zeta\beta$. Nun ist auch $A\varepsilon \rhd A\gamma$, oder $A\varepsilon \rhd AC$: man halbire also den Bogen ED so lange, bis man auf ein Stück EF kommt, dessen Secante $CN < A\varepsilon$ ist (422. §. 5. Zus.). Man nehme FO = FN, und ziehe die übrigen Tangenten, wie im 615. §., so ist auch $CP < A\varepsilon$, und $WP < \alpha\varepsilon$, weil $CW = A\alpha$. Durch P sey $VX \# \alpha\beta$: so giebt $\alpha VX\beta$ einen Cylinder, die Tangenten durch F, H, u. s. f. aber werden

um den Kugel-Abschnitt beschriebene Conische Flächen, wenn sich die Figur um die Axe CP drehet. Es fällt aber α nothwendig unter S, weil DE < Quadrant ist, also ist SV < αV, und αV, oder WP < $\alpha\varepsilon$, also auch SV < $\alpha\varepsilon$, folglich die Cylinderfläche SVXT < $\alpha\varepsilon\zeta\beta$. Da nun SVXT = NOPQR (615. §.) und $\alpha\varepsilon\zeta\beta$ = S; so wäre NOPQR < S, welches dem 616. §. 1. Zus. zuwider ist.

233 Fig. Es sey nun S < $\alpha\gamma\delta\beta$, und man setze, es sey $\alpha\gamma\delta\beta$: S = CA : CN, so ist CN < CA. Mit dem Halbmesser CN sey nun ein Kreis NOP beschrieben, und NI, PK durch N und P mit CD parallel gezogen. Wenn nun EM von NI und PK in H und L geschnitten wird; so stellet HIKL den Schnitt durch die Axe eines neuen Cylinders vor, und man hat CA : CN = die Fläche $\alpha\gamma\delta\beta$: HIKL (598. §.) also $\alpha\gamma\delta\beta$: S = $\alpha\gamma\delta\beta$: HIKL, und S = HIKL. Man halbire den Bogen ED so oft, bis man auf ein Stück EF kommt, dessen Cosinus CG > CN wird (422. §. 5. Zus.). Sein Sinus EG wird durch den folgenden Theilungspunct η gehen, und man kann die Sehne Eη halb so vielmahl in dem Bogen EDM herum tragen, als man Theilungspuncte hat. Mit dem Halbmesser CG beschreibe man einen Kreis QRS. Dieser wird alle Sehnen in G, T, u. s. f. berühren, so daß EG = Gη = ηT u. s. f. wird. Durch Q und S sey QX und SV mit CD parallel, QX schneide $\alpha\beta$ in Y, SV aber in Z, so ist die Fläche HIKL < YXVZ, und YXVZ = den Conischen Flächen Eη Dμ M, also HIKL < Eη Dμ M, oder S < Eη Dμ M, welches ebenfalls dem 616. §. entgegen ist.

618. §.

Die krumme Oberfläche der Halbkugel ist der krummen Oberfläche eines Cylinders gleich, der mit ihr gleiche Grundfläche und Höhe hat. (Die ebenen Grundflächen dieser Körper werden hier, wie bisher allemahl geschehen ist, nicht gerechnet).

Beweis. Wenn in der 232 F. im vor. §. DE ein Quadrant ist: so fällt E in A, M in B, und die Figur leidet keine andre wesentliche Veränderung, als daß die Puncte E, α, und S in A, so wie M, β und T in B zusammen fallen. Demnach bleibt in der ersten Abtheilung des Beweises alles übrige, wie vorhin; nur wird $SV = \alpha V$, weil aber noch αV, oder $WP < \alpha\varepsilon$, so bleibt auch $SV < \alpha\varepsilon$, und alle übrige Schlußfolgen bleiben stehen. In der zweyten Abtheilung des Beweises leidet die 233 F. keine andre Veränderung, als daß wiederum E in A, B in M, und die Puncte α, Y, H, L, Z, β, nach der Ordnung in A, Q, N, P, S, B, fallen, und alle Schlußfolgen lassen sich ungeändert auf diesen Fall anwenden. 232 233 Fig.

619. §.

Die ganze Kugelfläche ist so groß, als eine Cylinderfläche, die den grösten Kreis der Kugel zur Grundfläche, und den Durchmesser zur Höhe hat.

Auch ist eines jeden Kugel-Abschnitts Oberfläche, wenn er gleich die Grösse einer Halbkugel übertrift, so groß, als die Oberfläche eines Cylinders, dessen Grundfläche dem grösten Kreise, und dessen Höhe der Höhe des Abschnitts gleich ist.

234 Fig.

Beweis. Um den Kreis, dessen senkrechte Durchmesser AB, DG sind, sey das Quadrat LHIK beschrieben, die grade Linie MEOFN aber sey mit AB parallel, und die Figur drehe sich um die Axe DG. Nun ist die Halbkugelfläche ADB = der Cylinderfläche AHIB, also die ganze Kugelfläche ADBG = der Cyl. Fläche HIKL. Da nun überdem die Fläche des Abschnitts EGF = der Fläche LMNK ist, so wird ADBG − EGF = HIKL − LMNK, oder die Fläche des Abschnitts EADBF = der Cyl. Fläche HMNI.

620. §.

Die ganze Kugelfläche ist viermahl grösser, als die Fläche ihres grösten Kreises.

234 Fig.

Beweis. Die mittlere geometrische Proportinallinie zwischen LH und LK ist = AB, weil sowohl LH, als auch LK selbst = AB ist. Nun ist die Cylinderfläche HIKL, also auch die Kugelfläche ADBG (619. §.) einem Kreise gleich, dessen Halbmesser = AB (599. §.) dessen Durchmesser also = 2AB ist. Da nun Kreise sich wie die Quadrate ihrer Durchmesser verhalten: so verhält sich die Kugelfl. ADBG : Kreisfl. APBQ = $(2AB)^2 : AB^2 = 4AB^2 : AB^2 = 4 : 1$, und es wird die Kugelfl. ADBG = 4APBQ.

Zusatz. Wenn also d der Durchmesser und p die Peripherie des grösten Kreises ist; so ist die Kugelfläche = $pd = \pi dd$: oder wenn r den Halbmesser bezeichnet, so ist eben die Kugelfläche = $4\pi rr$.

621. §.

Die Oberfläche eines Kugel-Abschnittes *EADBF* ist so groß als ein Kreis, dessen Halbmesser gefunden wird, wenn man einen grö-

sten

sten Kreis *DAGB* durch die zur Grundfläche *ERFS* gehörigen Pole führt, und die Sehne *DE* des Bogens *DAE* ziehet, welcher zwischen dem Pol des Abschnitts *D*, und dem Umfange der Grundfläche enthalten ist.

Beweis. Man ziehe auch EG, so ist DEG = R (123. §.), also das Dreyeck DEG ∽ DEO, und DG:DE = DE:DO (214. §.), oder MN:DE = DE:HM. Demnach ist ein Kreis mit dem Halbmesser DE beschrieben der Cylinderfläche MHIN, (579. §.) folglich auch der Fläche des Kugel-Abschnitts EADBF gleich (617. 619. §.).

Zusatz. Es sey der Winkel DCE = α, so ist EO = $r\sin\alpha$, CO = $r\cos\alpha$, DO = $r\sin v\alpha$, mithin $DE^2 = r^2(\sin\alpha^2 + \sin v\alpha^2)$, und wenn die Fläche des Abschnittes EADBF = S gesetzt wird, so ist S = $\pi DE^2 = \pi r^2(\sin\alpha^2 + \sin v\alpha^2)$. Aber $\sin v\alpha^2 = 1 - 2\cos\alpha + \cos\alpha^2$, also $S = 2\pi r^2(1 - \cos\alpha) = 2\pi r^2 \sin v\alpha$: mithin auch $S = 4\pi r^2 \sin\frac{1}{2}\alpha^2$ (431. §. n. 2.).

622. §.

Ein Stück der Kugelfläche, das zwischen zweenen Parallelkreisen APBQ, ERFS enthalten ist, wird eine Zone der Kugelfläche genannt. 234 Fig.

1. Zusatz. Die Oberfläche einer solchen Zone ist der Oberfläche des Cylinders AMNB gleich, der mit der Zone einerley Höhe AM, und den grösten Kreis der Kugel zur Grundfläche hat. Denn es ist die Oberfl. ALKB = AGB, MLKN = EGF, also ALKB − MLKN = AGB − EGF, oder AMNB = AEFB.

2. Zusatz. Man setze wie vorhin die Fläche des Abschnittes EADBF = S, die Fläche des Abschnittes ADB = *s*, und S − *s* = Z. Ferner sey

DAE

DAE = α, DCA = β, so findet man $Z = 2\pi r^2 (\text{sinv}\alpha - \text{sinv}\beta)$. (621. §. Zus.) Es ist aber $\text{sinv}\alpha - \text{sinv}\beta = \text{cos}\beta - \text{cos}\alpha = 2\sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$, (451. §.) also auch $Z = 4\pi r^2 \sin\frac{1}{2}(\alpha+\beta)\sin\frac{1}{2}(\alpha-\beta)$.

623. §.

235 236 Fig.

Man kann in, und um jeden Kugel-Abschnitt XDY eben so, wie in und um die Halbkugel im 389. §. so viel gleich hohe Cylinder beschreiben, daß ihr Unterscheid von dem Kugel-Abschnitt kleiner wird, als jeder gegebene Körper.

1. Zusatz. Wenn also ein Körper kleiner, als der Kugel-Abschnitt ist; so kann man in demselben so viele gleich hohe Cylinder beschreiben, daß ihre Summe gröſſer, als dieser Körper wird.

2. Zusatz. Ist aber ein Körper gröſſer, als der Kugel-Abschnitt; so kann man um denselben so viel gleich hohe Cylinder beschreiben, daß ihre Summe kleiner als dieser Körper wird.

624 §.

Der körperliche Inhalt eines Kugel-Abschnitts *HEI*, der kleiner ist als die Halbkugel, ist so groß, als der Unterscheid zwischen dem Inhalt eines graden Cylinders *KFGL* und abgekürzten Kegels *FMNG*, wenn alle drey Körper gleich hoch sind, des Cylinders und Kegels Grundfläche dem gröſten Kreise der Kugel gleich, und der Neigungswinkel *MFG* der Seite des abgekürzten Kegels gegen die Grundfläche ein halber rechter Winkel ist.

235 Fig.

Beweis. Es sey ADBE ein gröſter Kreis durch die Axe ED des Kugel-Abschnitts AB in dieses grö-

sten

sten Kreises Ebene auf ED senkrecht, und F*ab*G ein Quadrat um diesen Kreis. Ziehet man nun die Linien CF, CG, welche HI, der Grundfläche des Abschnitts Durchmesser, in der Ebene ADBE in M und N schneiden, und verlängert HI bis an die Seiten des Quadrats in K und L; so stellt FKLG des Cylinders, und FMNG des abgekürzten Kegels Schnitt durch die Axe EZ vor, und die Dreyecke FKM, NLG die Durchschnittsfigur eines Körpers, der übrig bleibt, wenn der abgekürzte Kegel FMNG aus dem Cylinder FKLG ausgeschnitten wird. Er ist also die Differenz zwischen dem Cylinder, und abgekürzten Kegel, und daß eben dieser Körper dem Kugel-Abschnitt EHI gleich sey, erhellet auf folgende Art.

Dafern der Körper FKMNLG < EHI ist, so nehme man $D\lambda = EZ$, und ziehe XY durch λ mit HI parallel; so wird XDY der Schnitt durch die Axe eines Kugel-Abschnitts, der dem vorigen EHI gleich ist. Man beschreibe in diesem Kugel-Abschnitt so viele gleich hohe inwendige Cylinder ST, VW u. s. f. daß ihre Summe *S* grösser, als *EKMNLG* werde (623. §. 1. Zus.). Die Höhe EZ des Abschnittes EHI theile man bey ι, $\varkappa$, u. s. f. in eben so viel gleiche Theile, als man in $D\lambda$ hat, und ziehe durch die Theilungspuncte mit HI Parallellinien, welche AF in O, Q, MF in α, β, NG in γ, δ, LG in P, R schneiden. Aus α, β, γ, δ ziehe man über OP, QR senkrechte Linien aufwärts bis an die nächste Parallele, nemlich $\alpha\varepsilon$, $\beta\zeta$, $\gamma\eta$, $\delta\vartheta$ u. s. f.: so stellen $O\varepsilon\eta P$, $O\zeta\vartheta R$, Schnitte durch die Axe Cylindrischer Röhren vor, wie im 393. §., und man erhält ihrer so viele als im Kugel-Abschnitt XDY inwendige Cylinder vorhanden sind. Nun ist $W\nu^2$

=

= Dν × νE (214. §.) und Dν = Eκ = FQ = Qβ, also auch νE = βR, und Wν² = Qβ × βR. Ferner ist Tμ² = Dμ × μE, (214. §.) und Dμ = Eι = OF = Oα, also auch μE = αP, und Tμ² = Oα × αP. Demnach ist

Cyl. VW = Röhre QζϑR
Cyl. ST = Röhre OεηP,

also wäre S = der Summe aller Röhren, und S < FKMNLG, welches mit der Voraussetzung streitet.

236 Fig. Wäre der Körper FKMNLG > EHI; so beschreibe man um den Kugel-Abschnitt XDY = EHI so viele auswendige Cylinder, daß ihre Summe S kleiner, als FKMNLG wird. (623. §. 2. Zus.) Nachdem nun EZ in eben so viele gleiche Theile wie Dλ getheilt ist, und die Parallellinien OP, QR u. s. f., wie vorhin sind gezogen worden: so ziehe man nun durch M, α, β, N, γ, δ die senkrechten Linien Mε, αζ, βη, Nϑ, γπ, δϱ unterwärts, bis an die nächste Parallele, da man denn so viele Röhren erhält, als auswendige Cylinder um die Halbkugel XDY vorhanden sind. Es erhellet aber wie vorhin daß der

Cyl. VW = Röhre FβδG
Cyl. TV = Röhre QαγR
Cyl. XS = Röhre OMNP

also S = der Summe aller Röhren, folglich S > FKMNLG sey, welches wiederum der Voraussetzung entgegen ist.

Weil diesen Schlüssen gemäß beyde Voraussetzungen nicht bestehen können, so folgt daraus, daß der Körper FKMNLG den Kugel-Abschnitt EHI gleich sey.

625.

625 §.

Wenn ein Kugel-Abschnitt *EHI* kleiner ist, als die Halbkugel: so ist der köperliche Inhalt einem Kegel gleich, dessen Grundfläche so groß ist, als des Abschnitts Grundfläche, die Höhe aber so groß, als die Summe der Höhe *EZ* des Abschnitts, und der vierten Proportionallinie zur Höhe *DZ*, des andern Abschnitts, so den vorigen zur ganzen Kugel ergänzt, zum Halbmesser der Kugel r, und der eigenen Höhe *EZ* des Abschnitts. 235 Fig.

Beweis. Es ist der Abschnitt EHI = Cyl KFGL − abg. Keg. FMNG (624. §.). Man setze $EZ = a$; so ist $DZ = 2r - a$, und $HZ = \sqrt{EZ \times DZ} = \sqrt{(2ar - aa)}$. Nun hat man Cyl. KFGL $= \pi arr$, und der abg. Kegel FMNG $= \frac{1}{3}\pi(r^3 - (r-a)^3) = \frac{1}{3}\pi(3arr - 3aar + a^3) = \pi arr - \pi aar + \frac{1}{3}\pi a^3$ (608. §.), weil hier $\varphi = 45°$ (624. §.), also $\tang\varphi = \cot\varphi = 1$ ist. Dies giebt den Inhalt EHI $= \pi aar - \frac{1}{3}\pi a^3 = \frac{1}{3}\pi a(3ar - aa) = \frac{1}{3}\pi a(2r - a) \times \frac{3ar - aa)}{2r - a} = \frac{1}{3}\pi(2ar - aa) \times \left(a + \frac{ar}{2r-a}\right)$,

Weil nun $2ar - aa = HZ^2$, so wird der Inhalt EHI $= \frac{1}{3}\pi . HZ^2 . \left(EZ + \frac{EZ.r}{DZ}\right)$, wo $\pi . HZ^2$ der Inhalt der Grundfläche HI des Abschnitts ist, und $\frac{EZ.r}{DZ}$ die vierte Proportionallinie zur Höhe des Abschnittes HDI, dem Halbmesser der Kugel, und des Abschnittes HEI Höhe. Ein Kegel aber auf

eben

eben der Grundfläche in der Höhe EZ + $\frac{EZ.r}{DZ}$ hat eben den Inhalt (373. §.).

626. §.

Der Satz des vor. §. gilt auch für Abschnitte die grösser als Halbkugeln sind.

Beweis. Es ist die ganze Kugel $= \frac{4}{3}\pi r^3$ (394. §.), also der Abschnitt DHI $= \frac{4}{3}\pi r^3 - \pi aar + \frac{1}{3}\pi a^3$, wo $a = 2r - DZ$ ist. Man setze $DZ = b$, so ist $a = 2r - b$, $aa = 4rr - 4br + bb$ und $a^3 = 8r^3 - 12r^2b + 6rbb - b^3$. Daraus folgt $\frac{1}{3}\pi a^3 = \frac{8}{3}\pi r^3 - 4\pi r^2 b + 2\pi rbb - \frac{1}{3}\pi b^3$. Man addire $\frac{4}{3}\pi r^3$, so erhält man $\frac{4}{3}\pi r^3 + \frac{1}{3}\pi a^3 = 4\pi r^3 - 4\pi r^2 b + 2r\pi bb - \frac{1}{3}\pi b^3$. Ferner subtrahire man $\pi aar = 4\pi r^3 - 4\pi r^2 b + \pi rbb$, so findet man $\frac{4}{3}\pi r^3 - \pi aar + \frac{1}{3}\pi a^3 = \pi b^2 r - \frac{1}{3}\pi b^3$ als die Fläche des Abschnittes DHI. Demnach ist auch DHI $= \frac{1}{3}\pi(2br - bb)\frac{3br - bb}{2r - b} = \frac{1}{3}\pi(2br - bb) \times \left(b + \frac{br}{2r - b}\right)$, oder DHI $= \frac{1}{3}\pi HZ^2 \times \left(DZ + \frac{DZ.r}{EZ}\right)$.

627. §.

237 Fig. Wenn PQ eine Axe der Kugel ist, worin zweene grösste Kreise PAQ, und PDQ einander schneiden; so kann das Stück der Kugel zwischen den Ebenen zweener halben grösten Kreise PAQ und PDQ, und dem dazugehörigen Stück der Kugelfläche PAQD ein keilförmiger Ausschnitt der Kugel heissen. Wenn überdem ADB ein Kreis ist, dessen Ebene auf der Axe PQ senkrecht steht; so kann man das Stück der

Ku-

Kugel zwischen den Ebenen ACP, DCP, und ACD ein Pyramidenförmiges Kugelstück nennen, da dann CP die Höhe, und ACD die Grundfläche desselben ist.

628. §.

Keilförmige Ausschnitte von einerley Kugel *PAQCD*, *PAQCE*, und Pyramidenförmige Stücke von einerley Kugel, die gleiche Höhen haben, wie *ACDP*, und *ACEP*, verhalten sich, wie die Winkel *ACD*, *ACE* unter welchen sich die Seitenflächen an der Axe der Kugel schneiden.

Auch die krummen Oberflächen dieser Körper verhalten sich eben so gegen einander.

Beweis. Wenn AF der Kreisbogen AD und AE gemeinschaftliches Maaß ist, und AF = FG = GD = DH u. s. f.; so lege man durch F, G, H, u. s. f. ebenfalls größte Kreise, und es erhellet, daß hiedurch sowohl die keilförmigen Ausschnitte, als auch die Pyramidenförmige Kugelstücke, nebst ihren krummen Oberflächen, in eben so viele gleiche Theile vertheilt werden, als die Bogen AD und AE enthalten. Also verhalten sich die Kugelstücke, und ihre krummen Oberflächen, wie die Bogen AD, AE (172. §.) oder, wie die Winkel ACD, ACE. Wären die Bogen AD und AE incommensurabel: so kann man AE in so viele gleiche Theile, als man will, eintheilen, und man erhält ein Paar rationale Gränzen, zwischen welchen AD fällt; da dann die Körper ACDP und APCDQ, und ihre krummen Oberflächen zwischen ein paar Gränzen fallen, die

sich gegen ACEP, und APCEQ, und dieser Körper Oberflächen, wie die dazugehörigen Bogen zu AE verhalten. Der Unterscheid dieser rationalen Gränzen kann so klein gemacht werden, als man will: also behält der Satz auch in diesem Fall seine Richtigkeit (175. §.).

1. Zusatz. Wenn also ILMN, ADEB Parallelkreise sind, denen die Axe PQ zugehört; so verhalten sich auch ein Paar vierseitige Stücke der Kugelfläche, wie ADLI, AEMI zwischen diesen Parallelkreisen und den auf ihnen senkrechten Bogen größter Kreise AI, DL, EM, wie die dazugehörigen Bogen der Parallelkreise IL : IM, oder AD : AE (180. §.), oder wie die Winkel der größten Kreise. Eben so verhalten sich die zugehörigen Kugelstücke zwischen den Ebenen dieser Kreisbogen.

2. Zusatz. Der Inhalt, und die krumme Oberfläche aller Kugelstücke von dieser Art läßt sich also nunmehro leicht berechnen, da man den Inhalt und die Oberfläche der ganzen Kugel nicht allein, sondern auch der Abschnitte und Zonen der Kugel nach dem 396. 625. 626. 621. 622. §. zu berechnen weiß.

629 §.

238 Fig. I. Wenn auf der Grundfläche ADBE eines Kugel-Abschnitts ADBEF ein grader Kegel steht, dessen Spitze C in der Kugel Mittelpunct fällt; so schließt die Kegelfläche mit der Kugelfläche des Abschnitts einen kegelförmigen Ausschnitt der Kugel ein.

630. §.

Ein kegelförmiger Ausschnitt der Kugel ist so groß, als ein Kegel, dessen höhe dem

Halbmesser der Kugel, und die Grundfläche der Kugelfläche *AFB* des Ausschnittes gleich ist.

Beweis. Es sey $FG = a$, und der Kugel Halbmesser $= r$; so ist der Abschnitt $ADBEF = \pi aar - \frac{1}{3}\pi a^3$ (625. §.). Weil ferner $BG^2 = 2ar - aa$, die Kreisfläche $ADBE = \pi(2ar - aa)$, und $CG = r - a$; so wird der Kegel $CADBE = \frac{1}{3}\pi(2ar - aa)(r - a)$ (373. §.) $= \frac{1}{3}\pi(2ar^2 - 3a^2r + a^3) = \frac{2}{3}\pi ar^2 - \pi a^2 r + \frac{1}{3}\pi a^3$, folglich der Kugel Ausschnitt $= \frac{2}{3}\pi ar^2$. Man ziehe AF, so wird $AF^2 = AG^2 + FG^2 = 2ar - aa + aa = 2ar$, und ein Kreis mit dem Halbmesser AF beschrieben ist $= \pi . AF^2 = 2\pi ar$. So groß ist die Oberfläche des Abschnitts AEDBF (621. §.). Ein Kegel auf einer eben so grossen Grundfläche in der Höhe $CF = r$, wäre $= \frac{2}{3}\pi arr$ (373. §.), folglich eben so groß, als der Kugel Ausschnitt CADBEF. Der Beweis gilt eigentlich, wenn der Ausschnitt kleiner, als die Halbkugel ist. Er läßt sich aber leicht auf solche Ausschnitte erweitern, die grösser sind, als Halbkugeln. Es ist nemlich die Oberfläche des Abschnittes, der den vorigen zum ganzen Kegel ergänzt, einem Kreise gleich, dessen Halbmesser $= r((2r - a)^2 + 2ar - aa)$ (621. §.) $= r(4rr - 2ar)$, also diese Oberfläche $= 4\pi rr - 2\pi ar$, und ein Kegel auf einer gleichen Grundfläche in der Höhe CF wird $= \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi arr$. Aber der Ausschnitt, welcher den vorigen CADBEF zur ganzen Kugel ergänzt, ist ebenfalls $= \frac{4}{3}\pi r^3 - \frac{2}{3}\pi ar^2$.

Zusatz. In einerley Kugel verhalten sich also diese Art Ausschnitte gegen einander, wie die dazuge-

hörigen Stücke der Kugelfläche, und die ganze Kugel ist einem Kegel gleich, auf einer Grundfläche, die so groß ist, als die ganze Kugelfläche in der Höhe des Halbmessers.

631. §.

Die Seite eines Würfels zu finden, der einem gegebenen geometrischen Körper gleich ist, vorausgesetzt, daß es einer von denjenigen Körpern sey, dessen Inhalt nach den bisher vorgetragenen Lehren der körperlichen Geometrie gefunden werden kann.

Aufl. Man suche den Inhalt des gegebenen Körpers in Cubikfüssen oder Cubikzollen, und ziehe aus der Zahl, welche diesen Inhalt ausdrückt, die Cubikwurzel, entweder vermittelst der Logarithmen (163. §.), oder wenn man mehr Schärfe verlangt, nach dem 105. §. Diese Wurzel drückt die Seite des gesuchten Würfels in Fussen oder Zollen, oder überhaupt in eben demjenigen Längen-Maaß aus, welches bey Berechnung des Inhalts des gegebenen Körpers ist gebraucht worden.

Man braucht hier eine ähnliche Redensart, wie bey der ähnlichen Aufgabe für ebene Figuren 481. §. Man nennt dies den gegebenen Körper cubiren, und die bisherigen Lehren ergeben, daß die Cubatur des Cylinders, des Kegels, der Kugel und der Kugelstücke von der Quadratur des Kreises abhänge. Je genauer man die Grundflächen des Cylinders, des Kegels, imgleichen die Fläche des größten Kreises

ses der Kugel, vermittelst des Verhältnisses $\pi : 1$ (472. §.) berechnet, desto genauer wird der Inhalt der genannten Körper gefunden. Wenn man aber auch diesen Inhalt allemahl genau haben könnte, so würde man sich doch bey Berechnung der Seite des eben so grossen Würfels in unzähligen Fällen mit einer blossen Näherung begnügen müssen, wenn nemlich die Zahl, welche den Inhalt ausdrückt, eine unvollkommene Cubikzahl ist. Weil man voraussetzen kann, daß sich die Seite des dem Körper gleichen Würfels allemahl ohne Schwierigkeit durch Rechnung finden lasse, wenn nur sein Inhalt bekannt ist, so nennt man auch das schon den Körper cubiren, wenn man seinen Inhalt sucht.

Will man in diesem Sinne eine Kugel cubiren, so bemerke man nur ein für allemahl die Zahl $\frac{1}{6}\pi =$ 0,523598775598 ..... denn der Kugel-Inhalt ist $= \frac{1}{6}\pi d^3$, (396. §.) also darf man nur den Würfel des Durchmessers mit der eben angezeigten Zahl multipliciren: man nimmt so viele von diesen Ziffern, als der jedesmahl erforderlichen Schärfe gemäß ist.

632. §.

Die Auflösung der Aufgabe des vorigen §. würde mehr Schwierigkeit haben, wenn man die Seite des verlangten Würfels durch geometrische Verzeichnung suchen wollte, so wie die gegebene Auflösung eigentlich arithmetisch ist. Die alten Geometer suchten die Auflösung dieser und ähnlicher Aufgaben allemahl durch Zeichnung, und es war unter ihnen vornemlich das so genannte Delphische Problem berühmt.

Das

Das Orakel zu Delphos soll den Athenienſern, welche bey Gelegenheit einer zu Athen graſſirenden Peſt den Apoll befragen lieſſen, durch welche Mittel ſie die Götter verſöhnen könnten, geantwortet haben: ſie ſollten dem Apoll einen doppelt ſo groſſen cubiſchen Altar bauen, als derjenige gleichfalls cubiſche Altar war, den er damals hatte. Dies ſoll die damaligen Geometer bewogen haben, die Auflöſung der Aufgabe zu ſuchen:

Es iſt die Seite eines Würfels gegeben, man ſoll die Seite eines andern finden, der doppelt ſo groß, als der gegebene iſt.

Wenn l die gegebene Seite und L die geſuchte iſt, ſo verlangt die Aufgabe, daß $L^3 = 2l^3$ ſeyn ſoll, oder es ſoll ſich verhalten $l^3 : L^3 = 1 : 2 = l : 2l$. Demnach ſoll das Verhältniß $l : 2l$ dreymahl gröſſer ſeyn, als das Verhältniß $l : L$ (242. 347. §.), und es iſt L die erſte von zwoen mittlern ſtetigen Proportionallinien zwiſchen l und $2l$ (241. §.). Daher kam die geometriſche Auflöſung des delphiſchen Problems darauf an, daß man zwiſchen zwoen gegebenen graden Linien zwey mittlere ſtetige Proportionallinien ſuchen mußte. Weil ſich nun dieſe Aufgabe nicht geometriſch auflöſen läßt, wofern man keine andre krumme Linie, als allein den Kreis zu Hülfe nimmt, wie bey weiterer Ausführung der theoretiſchen Mathematik bewieſen werden ſoll; ſo gehört ſie ſchon zur höhern Geometrie (51. §.). Man würde übrigens auf eben die Art die Seite eines Würfels finden können, der zum gegebenen ein jedes andres Verhältniß hätte.

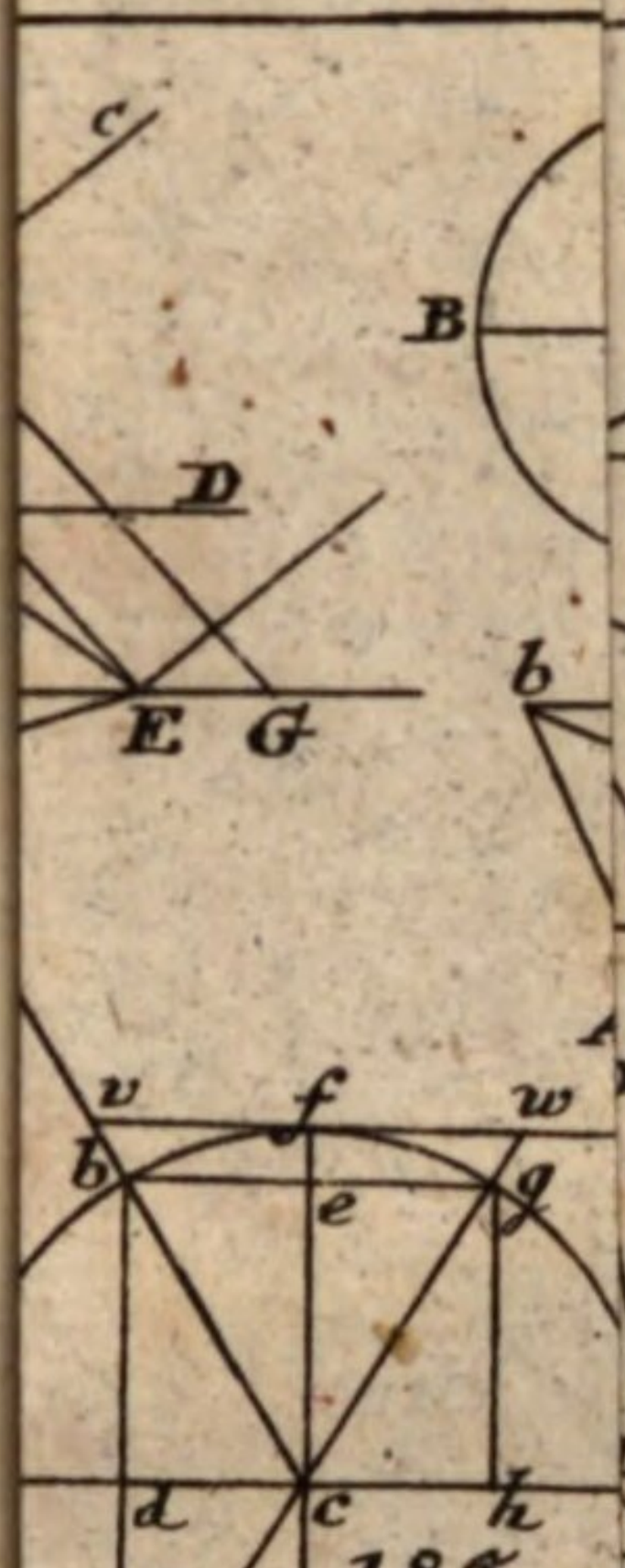
Will man die Rechenkunst zu Hülfe nehmen, so ist diese Aufgabe nur ein besondrer Fall der Aufgabe des vor. §. Man berechnet den Inhalt des gegebenen Würfels, duplirt ihn, oder verändert ihn sonst in dem gegebenen Verhältniß. Wenn man nun aus der Zahl, die herauskommt, die Cubikwurzel sucht, so ist die Seite des verlangten Würfels gefunden.

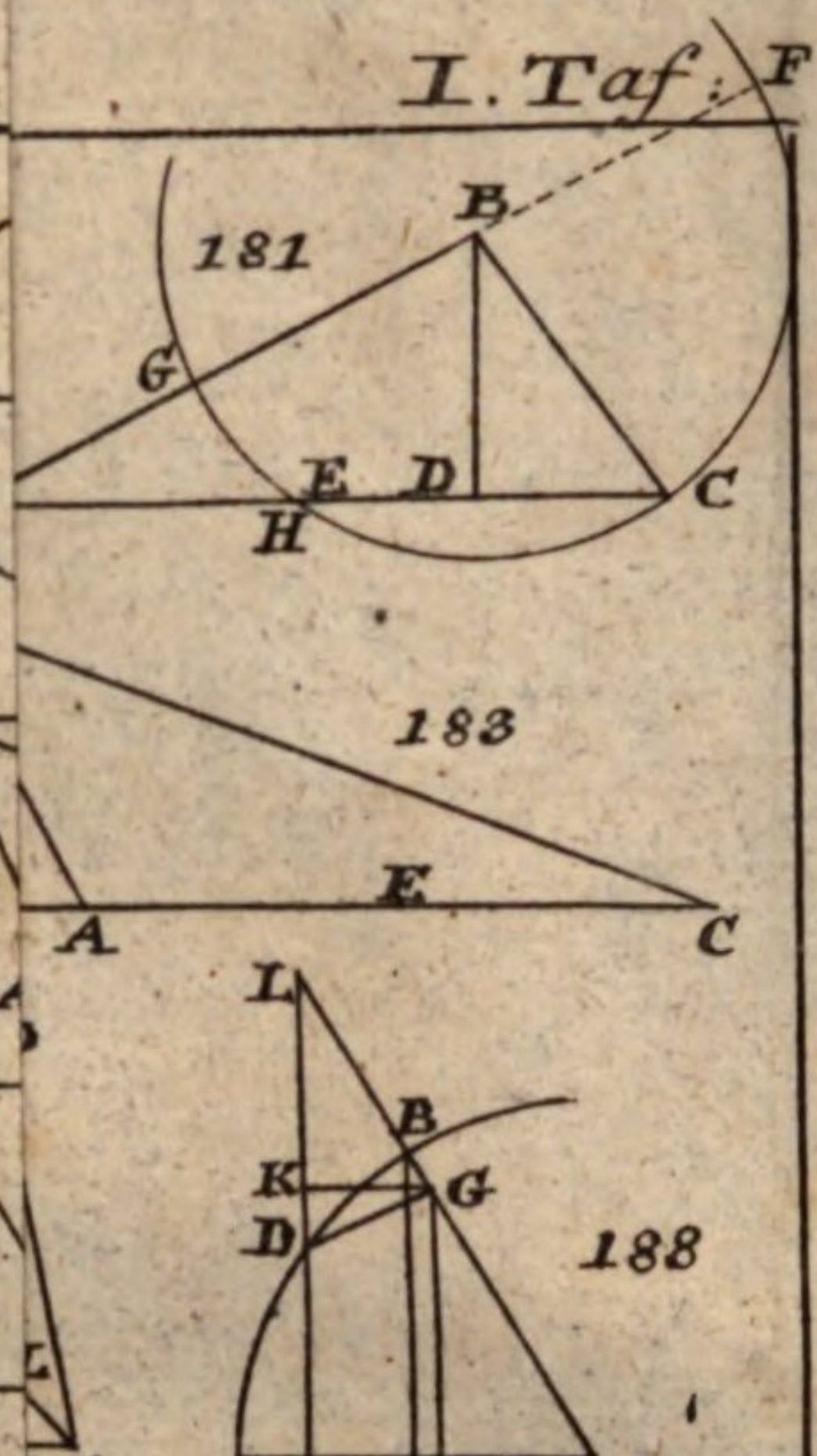
Verzeichniß einiger Druckfehler.

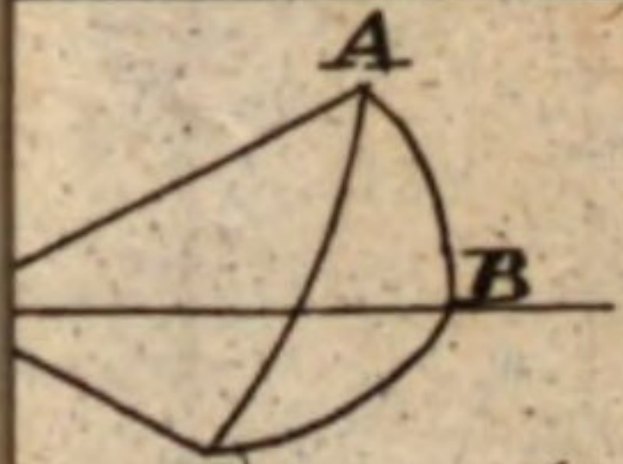
Auf der 2 Seite 11 Z. statt welche lese man welcher
- = 4 S. 21 Z. nach 214. §. fehlt das Wort: sind
- = 8 S. 2 u. 9 Z. v. u. statt $\alpha\ \beta$ l. m. $\alpha : \beta$.
- = 36 S. 15 Z. statt 7903,14 l. m. 7903,15
- = 59 S. 8 Z. statt nun l. m. um
- = 67 S. 10 Z. statt 309. l. m. 390.
- = = = letzte Z. statt $13 + 50$ l. m. 13×50.
- = 73 S. 10 Z. statt 90 l. m. 96.
- = = = 4 Z. v. u. statt rechnet l. m. rechnete
- = 89 S. 6 Z. statt -666 l. m. $+666$.
- = 98 S. 17 Z. statt b im Nenner l. m. bb.
- = = = 6 Z. v. u. vor $\frac{5gg}{ff}$ fehlt $+$
- = 101 S. 1 Z. statt $\frac{a}{b}\ \frac{c}{d}$ l. m. $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d}$.
- = = = 9 Z. v. u. im Nenner statt b^3 l. m. b^4.

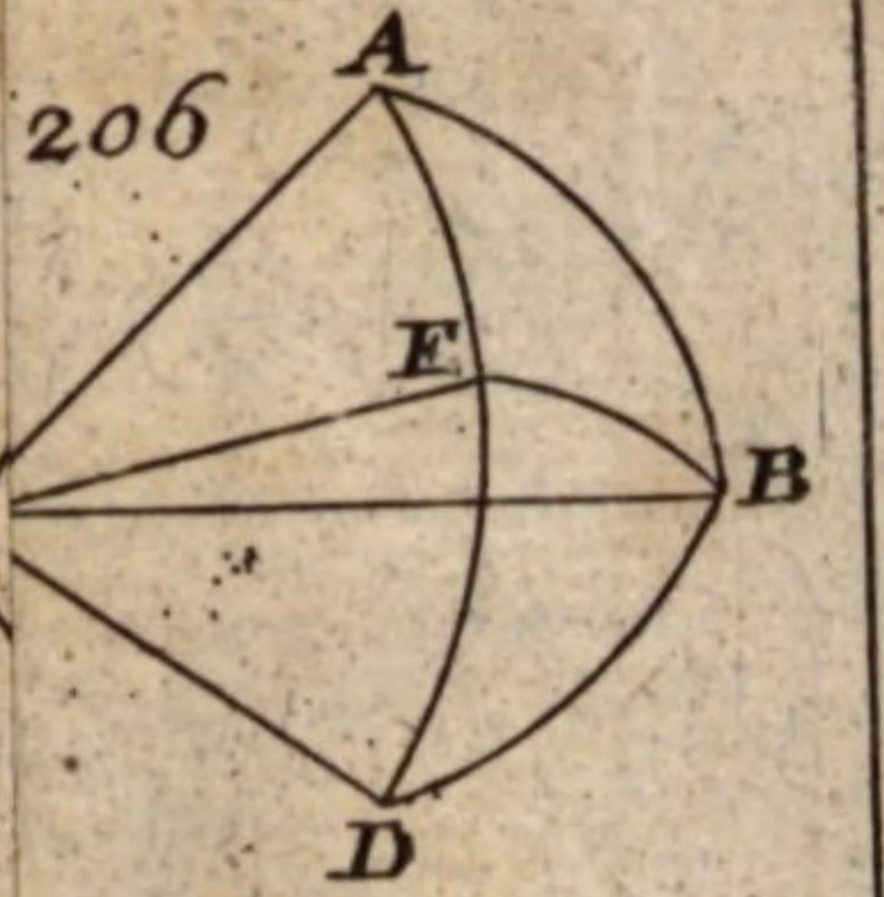
Auf

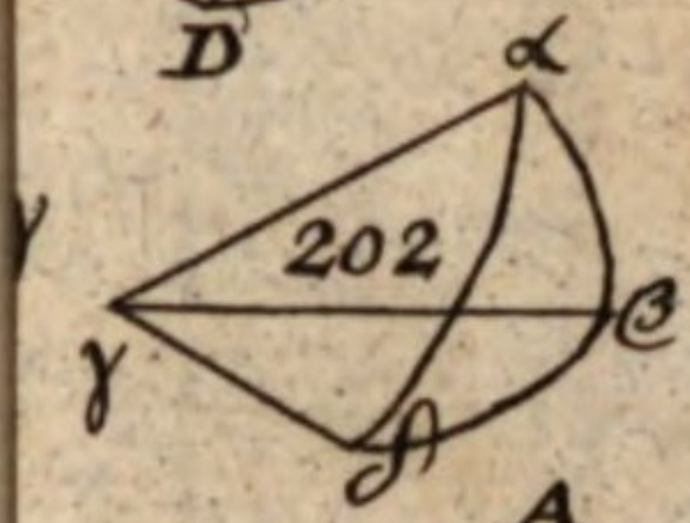
Auf der 167 S. 3 Z. v. u. statt $a + 1$ l. m. $\alpha + 1$.
" " 181 S. 8 Z. v. u. statt $\sqrt[3]{10} = 3$, ... l. m. $\sqrt[3]{10} = 2$, ...
" " 312 S. letzte Z. statt $+ PxQ$ l. m. $+ Px + Q$.
" " 315 S. 12 Z. statt $x = \alpha$ l. m. $x - \alpha$.
" " 329 S. 4 Z. vor problema fehlt das Wort: ein
" " 345 S. 9 Z. v. u. statt Englischer l. m. Englischer
" " 428 S. 2 Z. v. u. $\sin(\beta + \gamma) \sin\beta$, l. m. $\sin(\beta + \gamma)$, $\sin\beta$
" " 430 S. 4 Z. v. u. BC cosβ l. m. BC $=$ cosβ
" " 437 S. 14 Z. — *l* sin. tot. log *b* l. m. — *l* sin. tot und log. *b*
" " 478 S. 16 Z. 1445. l. m. 1425.
" " 533 S. 2 Z. cosP, cosH l. m. cosP : cosH.
" " 538 S. 3 Z. v. u. zezeichnet l. m. gezeichnet.
" " 550 S. 23 Z. Das würden l. m. Das würde
" " 553 S. 6 Z. tangB l. m. tangβ
" " 555 S. 8 Z. tang AB tang AD l. m. tang AB : tang AD.

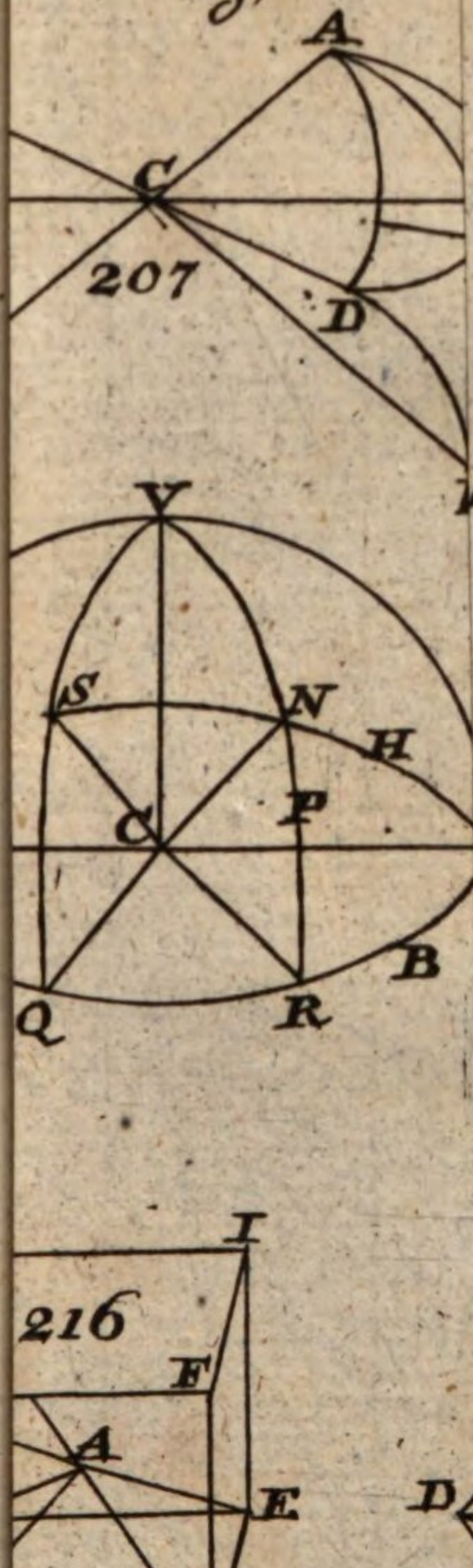

C
B
D
E G
b
v f w
b e g
d c h
185
p l
B H E
189
A DF

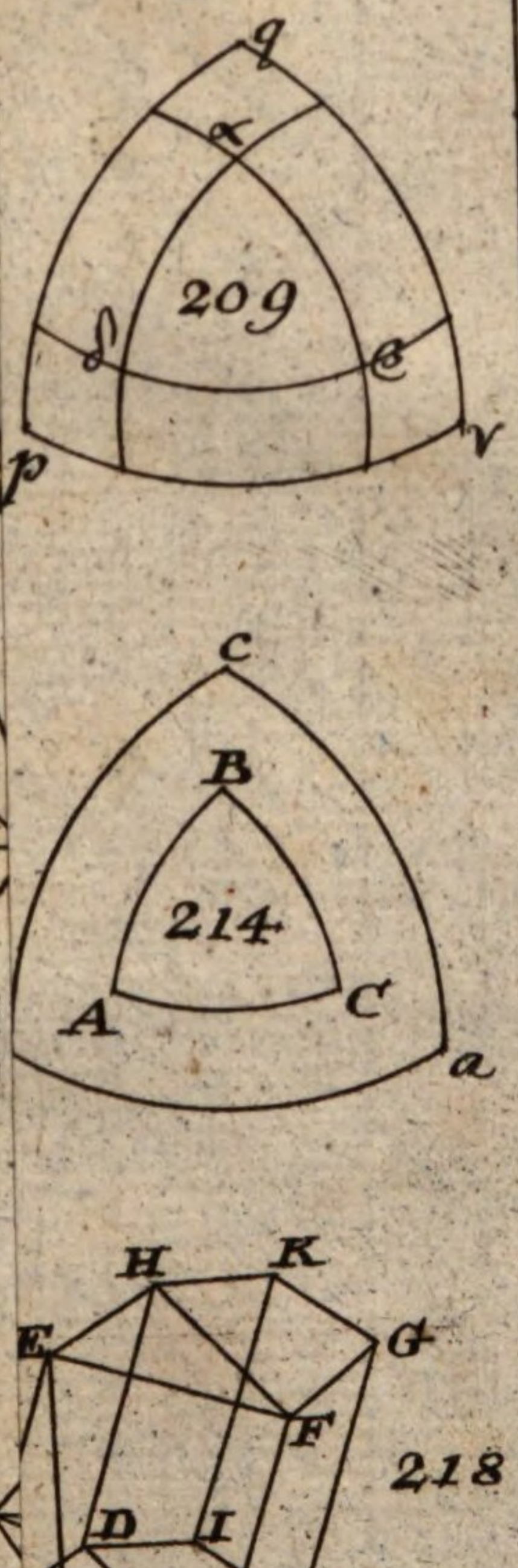

F
B
181
G
E D
C
H
183
E
A
C
L
B
K G
D
188
A F E H C
D
Q
E F
B M N
P A G C H K
191
G
R O
D H
S
L
B
193
M M
K
C
F
π
A
E
B
D
192
F
G
B
N
E
A M H F R
C
S
198
D
K

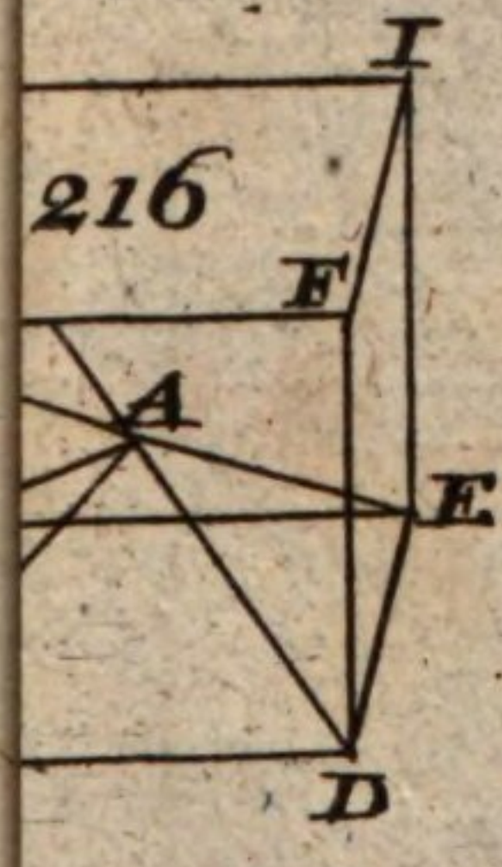

A
B
D

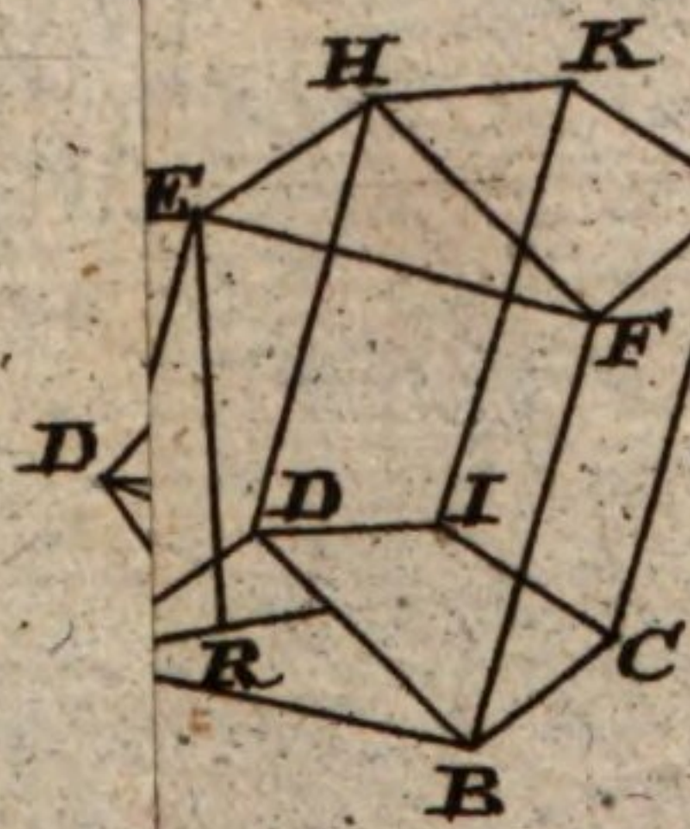

206
A
F
B
D

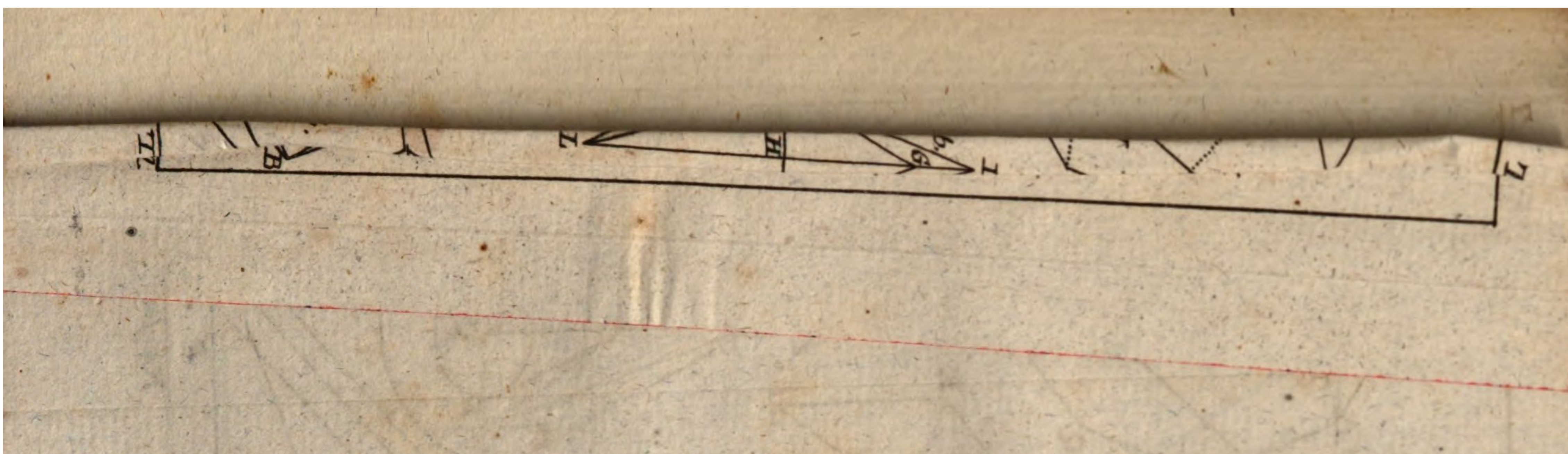

α
202
γ
β

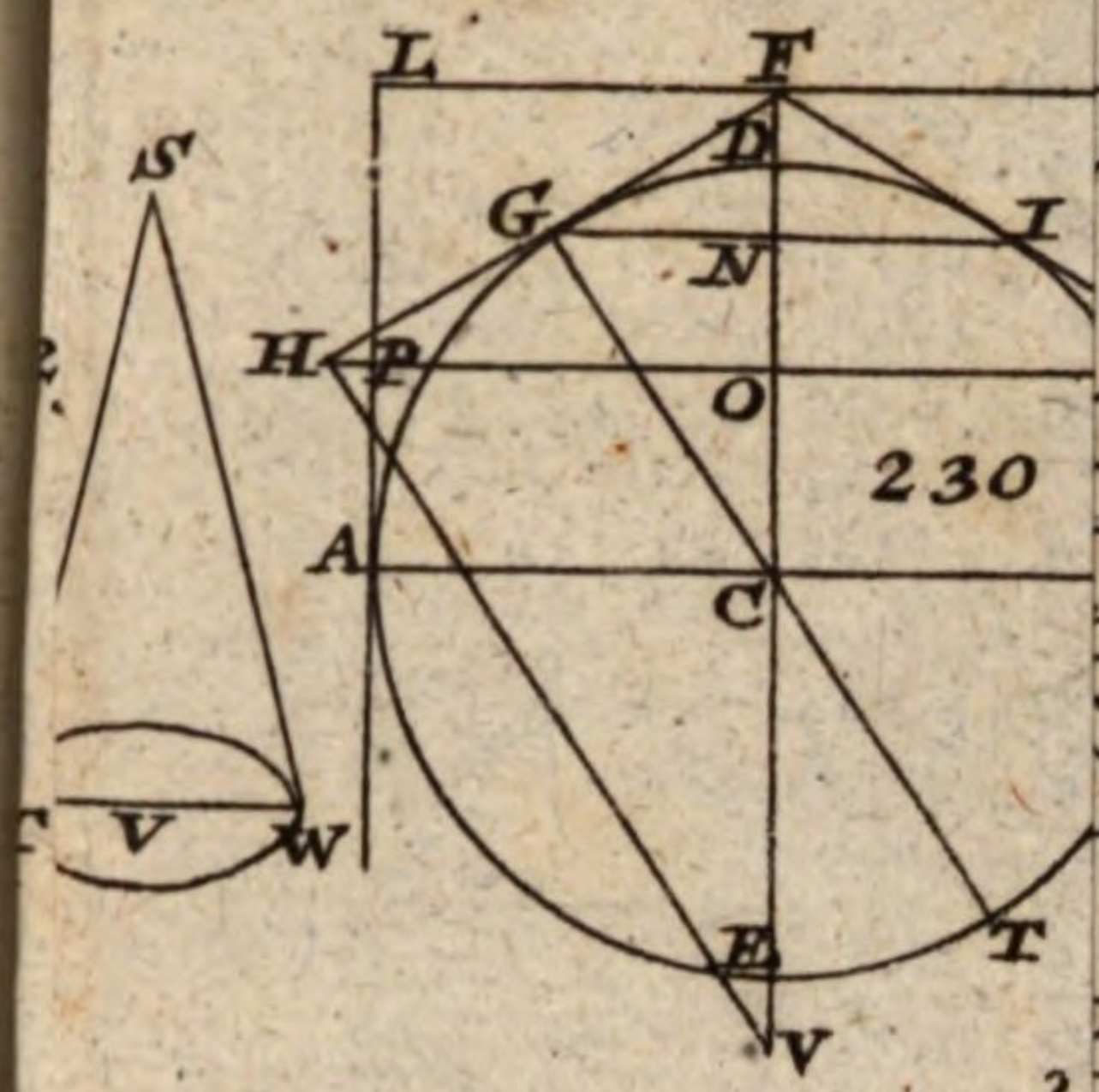

A
C
207
D
Y
S
N
H
C
P
B
Q
R

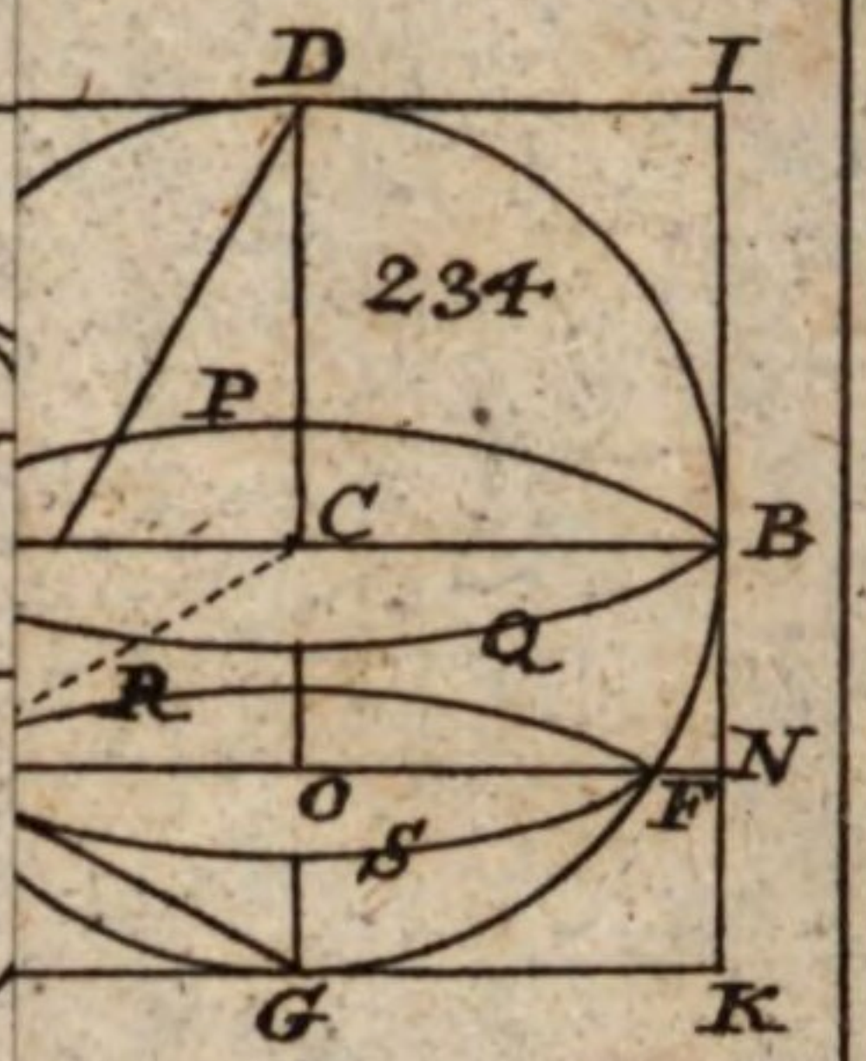

q
α
209
δ
ε
γ
p
C
B
214
A
C
a

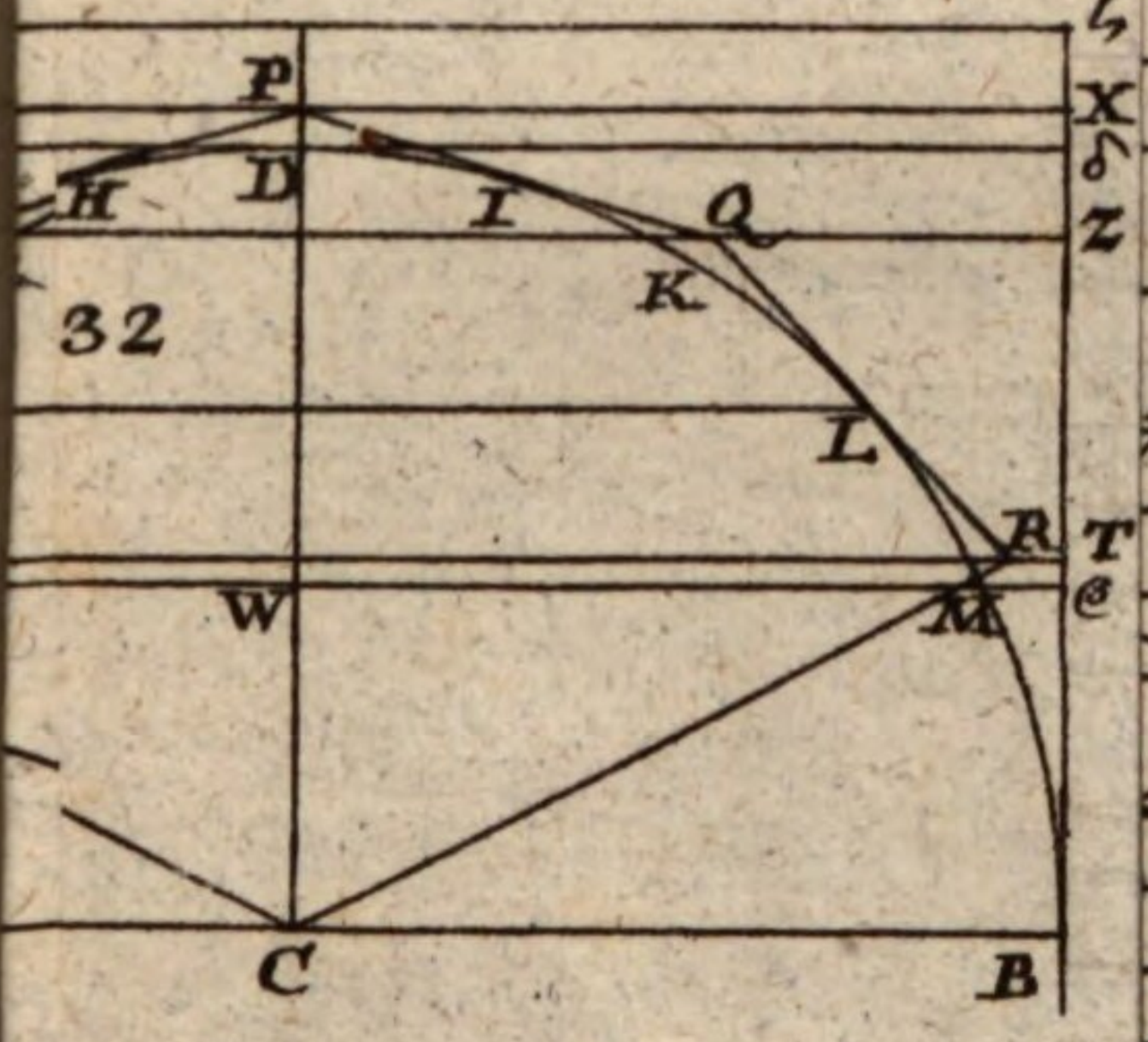

I
216
F
A
E
D

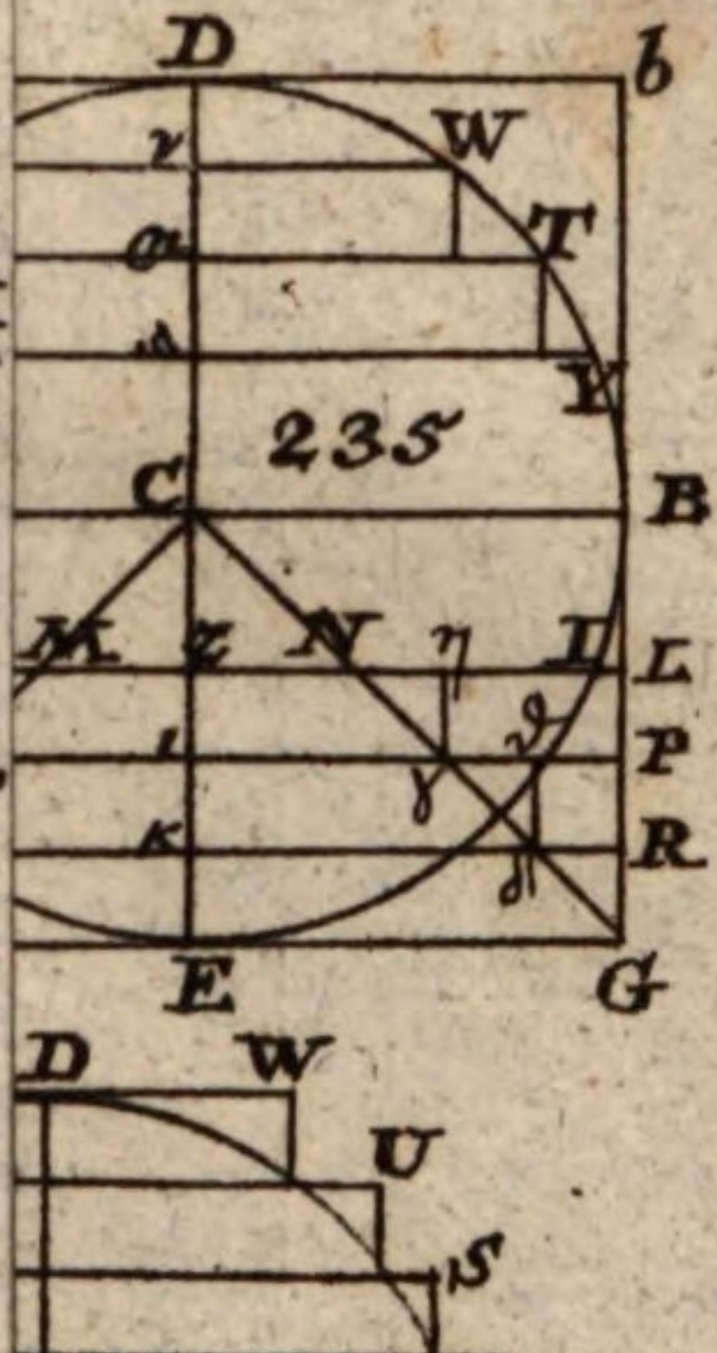

H
K
E
G
F
218
D
D
I
R
C
B

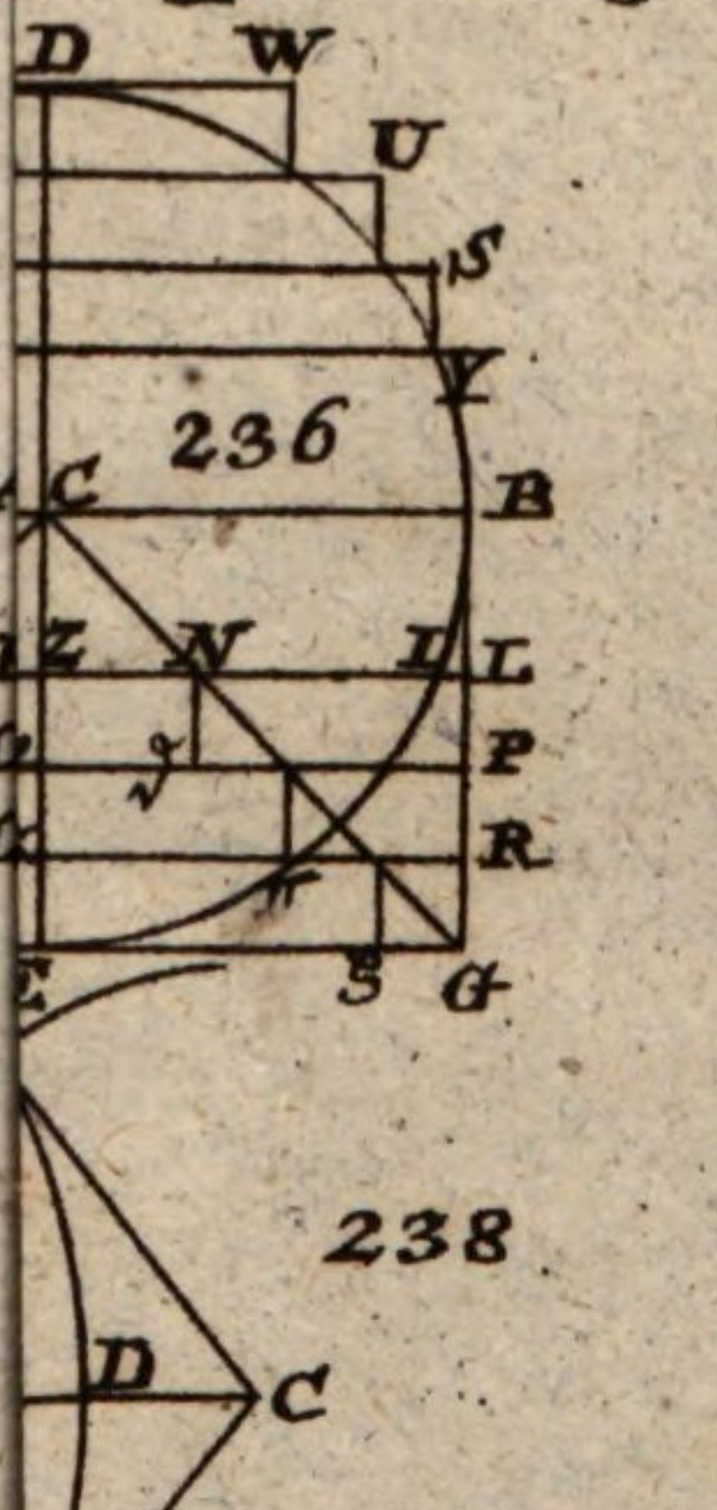

7
1
H
L
B
Z

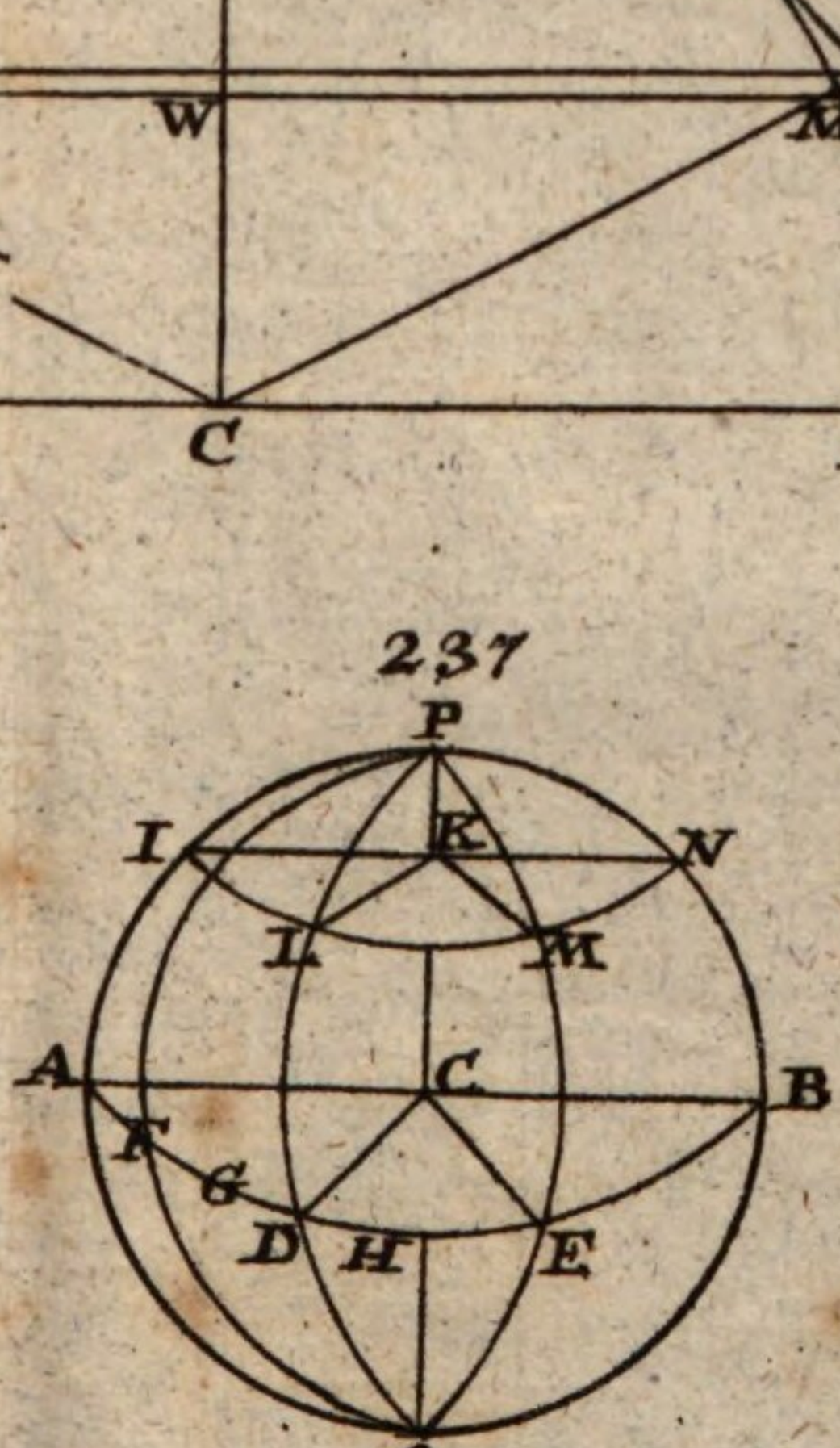

L
F
S
D
G
I
N
H
P
O
230
A
C
E
T
V
W


D
I
234
P
C
B
Q
R
N
o
F
s
G
K


P
X
H
D
I
Q
z
32
K
L
R
T
W
M
C
B


D
b
W
T
Y
235
C
B
M
N
L
P
R
E
G


D
W
U
S
Y
236
C
B
N
L
P
R
E
G


237
P
I
K
N
L
M
A
C
B
F
G
D
H
E
Q

238
D
C

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Karsten, Wenceslaus Johann Gustav, 1732-1787

Lehrbegriff der gesamten Mathematik

Bd.: 2,1

Greifswald 1786

Augsburg, Staats- und Stadtbibliothek -- Math 406 -2,1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11267523-0
VD18 8050826X-001